Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I.

Von

ERNST STEINITZ in Breslau.

Einleitung.

1. Den folgenden Untersuchungen denken wir uns einen beliebigen (endlichen) algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ zugrunde gelegt. Wir betrachten ausschließlich Zahlen und Ideale aus $\mathfrak{K}$, und zwar, wofern nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, ganze Zahlen und ganze Ideale.

2. Hat man zwei rechteckige Systeme $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ von ganzen Zahlen aus $\mathfrak{K}$, und ist die Anzahl der Kolonnen von A gleich der Anzahl der Zeilen von B, so geht aus ihnen durch „Multiplikation" ein neues Rechteck $C = (c_{ik})$ hervor, wo $c_{ik} = \sum_i a_{ii} b_{ik}$ ist. C hat so viele Zeilen wie A und so viele Kolonnen wie B. Für diese Art der Multiplikation besteht das assoziative, aber nicht notwendig das kommutative Gesetz. Besteht zwischen zwei Rechtecken A, B eine Relation von der Form

$$B = PAQ,$$

so heißt B „teilbar durch A". Ist zugleich A durch B teilbar, so heißen A und B „äquivalent".

3. Wir behandeln die Frage nach den Bedingungen für die Äquivalenz zweier Systeme A, B und — in einem zweiten Artikel — die weitergehende nach den Bedingungen für die Teilbarkeit von B durch A. Ist $\mathfrak{K}$ der Körper der rationalen Zahlen, so ist die Beantwortung dieser Fragen bekannt. Im Falle eines beliebigen algebraischen Körpers sind die schließlichen Ergebnisse dieselben, sofern man sich auf quadratische Systeme von nicht verschwindender Determinante beschränkt. Die Herleitung erfordert aber noch andere Hilfsmittel als die, welche im Falle des natürlichen Rationalitätsbereichs zum Ziele führen. Gibt man die Beschränkung auf quadratische Systeme auf, oder läßt man quadratische Systeme von der Determinante 0 zu, so modifizieren sich auch die Resultate.

4. Spezielle Fälle der Teilbarkeit und Äquivalenz sind die „Links- (bzw. Rechts-) Teilbarkeit“ und die „Links- (bzw. Rechts-) Äquivalenz“. B heißt links (rechts) teilbar durch A, wenn eine Relation $B = PA$ (bzw. $B = AQ$) besteht; die Systeme A und B heißen links- (bzw. rechts-) äquivalent, wenn jedes durch das andere links bzw. rechts teilbar ist.

§ 1.

Vorbemerkungen.

5. Wir stellen zunächst einige bekannte Tatsachen aus der Idealtheorie zusammen, um zugleich verschiedene der fernerhin gebrauchten Bezeichnungen zu erläutern. Die von 0 verschiedenen Ideale des Körpers $\mathfrak{K}$ zerfallen in endlich viele Klassen, deren Anzahl h sein möge. Die Klasse, zu welcher das Produkt zweier Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehört (Kl. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$), ist durch die Klassen, zu denen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehören, bestimmt und wird deshalb das „Produkt“ dieser Klassen genannt; in Zeichen

$$\text{Kl. } \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \text{Kl. } \mathfrak{a} \cdot \text{Kl. } \mathfrak{b}. \tag{1}$$

Die h Klassen bilden eine Gruppe und zwar eine kommutative, sodaß auch der Quotient zweier Klassen eindeutig bestimmt ist. Die Einheit in dieser Gruppe wird durch die „Hauptklasse“ dargestellt, welche die von den Zahlen aus $\mathfrak{K}$ repräsentierten Ideale, die „Hauptideale“, umfaßt. In die h Klassen reihen sich auch die gebrochenen Ideale aus $\mathfrak{K}$ ein derart, daß auch bei dieser Ausdehnung die Gleichung (1) gültig bleibt.

6. Irgend n ganze Ideale $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ haben einen „größten gemeinsamen Teiler“ $\mathfrak{t}$, in dem jeder gemeinsame Teiler aufgeht; wir bezeichnen ihn durch

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n).$$

Das Vorkommen von Nullen ist nicht ausgeschlossen; sind alle Ideale $\mathfrak{a}_i$ gleich 0, so ist auch $\mathfrak{t} = 0$ zu setzen. Unter dem größten gemeinsamen Teiler von n Zahlen $a_1, \cdots, a_n$ ist der größte gemeinsame Teiler t der durch die Zahlen repräsentierten Hauptideale zu verstehen. In der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

werden alle und nur die durch t teilbaren Zahlen dargestellt. Ist $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{t}$, so sind die Ideale $\frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{t}}$ teilerfremd. Von dieser Bemerkung ausgehend gelangt man zu einer Ausdehnung des Begriffs „größter gemeinsamer Teiler“ auf gebrochene Ideale. Denn auch wenn solche unter den $\mathfrak{a}_i$ vorkommen, existiert ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{t}$, für welches die Ideale $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{t}}, \cdots, \frac{\mathfrak{a}_n}{\mathfrak{t}}$ ganz und teilerfremd ausfallen. $\mathfrak{t}$ ist in diesem Falle stets gebrochen. Für ganze oder gebrochene Ideale gilt die Formel

(2) $$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}, \mathfrak{a}_2\mathfrak{q}, \cdots, \mathfrak{a}_n\mathfrak{q}) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n)\mathfrak{q},$$

sowie die allgemeinere

(3) $$(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n) \cdot (\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_m) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_m, \cdots, \mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_m).$$

Bei Beschränkung auf ganze Ideale ist noch zu bemerken: Auch ein System $\mathfrak{S}$ von unendlich vielen Idealen besitzt einen größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{t}$, und man kann ein endliches Teilsystem von $\mathfrak{S}$ angeben, welches auch den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{t}$ hat. $\mathfrak{t}$ ist 0, wenn alle Ideale aus $\mathfrak{S}$ gleich 0 sind. Ist andernfalls $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal aus $\mathfrak{S}$, sind $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ die verschiedenen Primfaktoren von $\mathfrak{a}$, und bezeichnet $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, \cdots, l)$ ein Ideal aus $\mathfrak{S}$, welches $\mathfrak{p}_i$ zu möglichst niedriger Potenz enthält, so wird $\mathfrak{t} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_l)$.

7. Es seien $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ l verschiedene Primideale, $e_1, \cdots, e_l$ ganze rationale, nicht negative Zahlen. Bestimmt man l ganze Zahlen $x_1, \cdots, x_l$ aus $\mathfrak{R}$ so, daß x_i durch $\mathfrak{p}_i^{e_i}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}_i^{e_i+1}$ teilbar ist, ferner x den Kongruenzen

$$x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{e_i+1}} \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

gemäß, so enthält x oder auch das durch x repräsentierte Hauptideal $\mathfrak{x}$ jedes der Primideale $\mathfrak{p}_i$ genau e_i mal. Sind ferner $\varkappa$, $\varkappa'$ zwei reziproke Idealklassen, ist $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\varkappa'$, $\mathfrak{y}$ ein Hauptideal, welches jedes der Primideale $\mathfrak{p}_i$, sowie jedes in $\mathfrak{b}$ aufgehende Primideal ebenso oft enthält wie $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{y}$ von der Form $\mathfrak{y} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}$ ein ganzes, durch $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ nicht teilbares Ideal aus $\varkappa$ bezeichnet. Das Ideal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}$ gehört ebenfalls zur Klasse $\varkappa$ und enthält jedes Primideal $\mathfrak{p}_i$ genau e_i mal. Es gibt also in jeder Klasse Ideale, die gegebene Primideale zu genau vorgeschriebener Potenz enthalten, insbesondere also auch Ideale, die durch ein gegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ $(\neq 0)$ teilbar oder zu $\mathfrak{a}$ relativ prim sind.

8. Es seien $a_1, \cdots, a_n$ ganze oder gebrochene Zahlen aus $\mathfrak{R}$, aber nicht sämtlich gleich 0, es sei

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \mathfrak{t},$$

und es bezeichne c jede von 0 verschiedene ganze oder gebrochene Zahl aus $\mathfrak{R}$. Dann bezeichnet das durch c bestimmte Hauptideal $\mathfrak{c}$ jedes ganze oder gebrochene Ideal der Hauptklasse, das System

$$a_1c, a_2c, \cdots, a_nc$$

jedes zu $a_1, a_2, \cdots, a_n$ proportionale System und das Ideal

$$(a_1c, a_2c, \cdots, a_nc) = \mathfrak{t}\mathfrak{c}$$

jedes ganze oder gebrochene Ideal der durch $\mathfrak{t}$ bestimmten Idealklasse. $\mathfrak{t}\mathfrak{c}$ fällt dann und nur dann ganz aus, wenn die n Zahlen $a_1c, \cdots, a_nc$ sämtlich ganz sind. Da es in jeder Klasse Ideale gibt, die zu einem ge-

gebenen, von 0 verschiedenen Ideal $\mathfrak{a}$ teilerfremd sind (Nr. 7), so kann zu jedem System $a_1, \cdots, a_n$ ein proportionales ganzzahliges angegeben werden, dessen Elemente nicht sämtlich mit $\mathfrak{a}$ einen Teiler gemein haben.

§ 2.

Elementarteiler, Zeilen- und Kolonnenklasse.

9. Ist A ein rechteckiges System von ganzen Zahlen aus $\mathfrak{R}$, so heißt der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{d}_k$ der Unterdeterminanten k^{ten} Grades „k^{ter} Determinantenteiler von A“. Für jede ganze Zahl k, die größer ist als die Anzahl der Zeilen oder Kolonnen von A, soll $\mathfrak{d}_k = 0$ gesetzt werden. Aus dem Laplaceschen Determinantensatz ergibt sich, daß $\mathfrak{d}_k$ in $\mathfrak{d}_{k+1}$ aufgeht. Ist $\mathfrak{d}_{r+1}$ der erste verschwindende Determinantenteiler, so bezeichnet r den „Rang des Rechtecks A“ („Rg. A“). Die ganzen Ideale

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1},\ \cdots,\ \mathfrak{e}_r = \frac{\mathfrak{d}_r}{\mathfrak{d}_{r-1}},\ \mathfrak{e}_{r+1} = 0,\ \mathfrak{e}_{r+2} = 0,\ \cdots$$

heißen die „Elementarteiler von A“.

10. Ist B teilbar durch A,

$$B = PAQ,$$

so ist, wie das allgemeine Multiplikationstheorem der Determinanten sofort zeigt, jeder Determinantenteiler von B durch den entsprechenden von A teilbar. Daraus folgt weiter:

Äquivalente rechteckige Systeme stimmen in den Determinantenteilern, also auch in den Elementarteilern überein. (Erste Äquivalenzbedingung.)

11. Es sei $A = (a_{ik})$ ein ganzzahliges rechteckiges System aus $\mathfrak{R}$ von m Zeilen und n Kolonnen, sein Rang $r \geqq 1$. Aus den Determinanten r^{ten} Grades, die man A entnehmen kann, bilden wir ein rechteckiges System $A' = (a'_{ik})$ von $m' = \binom{m}{r}$ Zeilen und $n' = \binom{n}{r}$ Kolonnen derart, daß jede Zeile (Kolonne) von A' die Determinanten aus r festen Zeilen (Kolonnen) von A enthält. Im Falle $r = m = n$ besteht A' aus einem einzigen Element, im Falle $r = m$ aus einer einzigen Zeile, im Falle $r = n$ aus einer einzigen Kolonne; in jedem Falle aber ist, wie aus den Elementen der Determinantentheorie bekannt, der Rang von A' gleich 1. Es sind also die Zeilen von A' (soweit sie nicht aus lauter Nullen bestehen, was nicht bei allen Zeilen der Fall sein kann) untereinander proportional; und es gehören deshalb die größten gemeinsamen Teiler, die man aus den Elementen der einzelnen Zeilen von A' bilden kann, einer und derselben Idealklasse $\varkappa$ an (Nr. 8). Ebenso gehören die größten gemeinsamen Teiler

der Elemente der einzelnen Kolonnen zu einer Idealklasse $\varkappa'$. Wir nennen $\varkappa$ und $\varkappa'$ die „Zeilen- („Kolonnen-) Klasse" von A; in Zeichen

$$\varkappa = \text{Zkl. } A, \quad \varkappa' = \text{Kkl. } A. \tag{4}$$

12. Es sei a'_{pq} irgend ein von 0 verschiedenes Element aus A', und es stelle $a'_{pq} = u \cdot v$ eine Zerlegung von a'_{pq} in zwei ganze oder gebrochene Zahlen aus $\mathfrak{R}$ dar. Dann gibt es $m' + n'$ ganze oder gebrochene Zahlen $u_1, \cdots, u_{m'}; v_1, \cdots, v_{n'}$, welche den Bedingungen

$$u_p = u, \; v_q = v, \; u_i v_k = a'_{ik} \quad (i = 1, \cdots, m'; \; k = 1, \cdots, n')$$

genügen. Die Elemente einer jeden Zeile von A' sind dem System $v_1, \cdots, v_{n'}$, diejenigen einer Kolonne dem System $u_1, \cdots, u_{m'}$ proportional. Setzt man also

$$(u_1, \cdots, u_{m'}) = \mathfrak{u}, \quad (v_1, \cdots, v_{n'}) = \mathfrak{v},$$

so wird

$$\text{Kl. } \mathfrak{u} = \varkappa', \quad \text{Kl. } \mathfrak{v} = \varkappa. \tag{5}$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = (u_1, \cdots, u_{m'})(v_1, \cdots, v_{n'})$$

gleich dem größten gemeinsamen Teiler der $m' \cdot n'$ Zahlen $u_i v_k = a'_{ik}$, d. h. gleich dem r^{ten} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_r$ von A. Aus $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{d}_r$ und den Gleichungen (4), (5) erhalten wir den Satz:

Ist $\mathfrak{d}_r$ der r^{te} Determinantenteiler eines rechteckigen Systems A vom Range r $(r \geqq 1)$, so ist

$$\text{Zkl. } A \cdot \text{Kkl. } A = \text{Kl. } \mathfrak{d}_r.$$

13. Es sei jetzt $B = (b_{ik})$ ein durch A links teilbares rechteckiges System:

$$B = PA, \quad P = (p_{ik}) \quad (i = 1, \cdots, l; \; k = 1, \cdots, m).$$

Rg. B kann nicht $> r$ sein; wir wollen Rg. $B = r$ voraussetzen. Aus den Determinanten r^{ten} Grades von P bilden wir ein rechteckiges System $P' = (p'_{ik})$ von $l' = \binom{l}{r}$ Zeilen und m' Kolonnen. Das Rechteck $B = PA$ hat l Zeilen und n Kolonnen, die den l Zeilen von P und den n Kolonnen von A entsprechen. Verstehen wir jetzt unter b'_{ik} diejenige Determinante r^{ten} Grades aus B, deren r Zeilen den in $p'_{i1}, \cdots, p'_{im'}$ auftretenden Zeilen von P und deren r Kolonnen den in $a'_{1k}, \cdots, a'_{m'k}$ auftretenden r Kolonnen von A entsprechen, so wird nach dem allgemeinen Multiplikationstheorem der Determinanten

$$b'_{ik} = \sum_{h=1}^{m'} p'_{ih} a'_{hk} = v_k \sum_{h=1}^{m'} p'_{ih} u_h.$$

Dies zeigt, daß die Zeilen des Rechtecks $B' = (b'_{ik})$ dem System $v_1, \cdots, v_{n'}$ proportional sind. Mithin ist

$$\text{Zkl. } B = \text{Kl. } (v_1, \cdots, v_{n'}) = \text{Kl. } \mathfrak{v} = \text{Zkl. } A.$$

D. h.: *Haben die Rechtecke A und $B = PA$ gleichen Rang, so haben sie dieselbe Zeilenklasse.*

Ganz ebenso gilt natürlich: *Haben die Rechtecke A und AQ gleichen Rang, so haben sie dieselbe Kolonnenklasse.*

14. Es seien jetzt A und $B = PAQ$ äquivalente rechteckige Systeme, ihr Rang $r \geqq 1$. Dann sind ihre Determinantenteiler gleich; und da jeder Determinantenteiler von PA durch den entsprechenden von A teilbar sein und in dem entsprechenden von $B = (PA)Q$ aufgehen muß, so hat auch PA dieselben Determinantenteiler wie A und B. Es sei $\mathfrak{d}_r$ der r^{te} Determinantenteiler von A, PA, B. Dann ist (Nr. 13)

$$\text{Zkl. } A = \text{Zkl. } PA, \quad \text{Kkl. } PA = \text{Kkl. } B,$$

nach Nr. 12

$$\text{Kl. } \mathfrak{d}_r = \text{Zkl. } A \cdot \text{Kkl. } A = \text{Zkl. } PA \cdot \text{Kkl. } PA = \text{Zkl. } B \cdot \text{Kkl. } B,$$

daher

$$\text{Zkl. } A = \text{Zkl. } B, \quad \text{Kkl. } A = \text{Kkl. } B,$$

also:

Äquivalente rechteckige Systeme haben dieselbe Zeilenklasse und dieselbe Kolonnenklasse. (Zweite Äquivalenzbedingung.)

§ 3.

Linearformen, Gleichungen und Kongruenzen.

15. Es seien m Linearformen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{6}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ gegeben; es sei $\mathfrak{t}$ der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten a_{ik}. Setzen wir für die Unbestimmten x ganze Zahlen aus $\mathfrak{R}$, die sämtlich durch ein gegebenes Ideal $\mathfrak{u}$ teilbar sind, so werden alle y_i durch $\mathfrak{tu}$ teilbar. Wir wollen jetzt beweisen:

Ist der Rang des Koeffizientensystems $A = (a_{ik}) \geqq 2$, so kann man für die Unbestimmten x solche durch $\mathfrak{u}$ teilbare Zahlen setzen, daß

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \mathfrak{tu}$$

wird.

Beweis. Da der Fall $\mathfrak{u} = 0$ als bedeutungslos ausgeschlossen werden kann, so enthält $\mathfrak{tu}$ nur endlich viele Primfaktoren. Es sei

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_l \tag{7}$$

ein System von l verschiedenen Primidealen, unter denen aber jedenfalls alle in $\mathfrak{tu}$ aufgehenden Primfaktoren enthalten sein sollen. Es bezeichne

für $i = 1, \cdots, l$ $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ die höchste in $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{p}_i^{f_i}$ die höchste in $\mathfrak{u}$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{p}_i$. Dann ist jeder Koeffizient a_{ik} durch $\mathfrak{p}_1^{e_1}$ teilbar, aber es gibt auch wenigstens einen Koeffizienten, der nicht durch $\mathfrak{p}_1^{e_1+1}$ teilbar ist. Ist dies bei a_{pq} der Fall, und wählen wir n Zahlen $\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1n}$ so, daß ξ_{1q} den Faktor $\mathfrak{p}_1$ genau f_1 mal enthält, während die übrigen Zahlen ξ_{1k} durch $\mathfrak{p}_1^{f_1+1}$ teilbar sind, so werden für $x_1 = \xi_{11}, \cdots, x_n = \xi_{1n}$ die zugehörigen Werte von $y_1, \cdots, y_m$ alle den Faktor $\mathfrak{p}_1^{e_1+f_1}$ enthalten, y_p aber wird nicht durch $\mathfrak{p}_1^{e_1+f_1+1}$ teilbar sein; es wird also der größte gemeinsame Teiler $(y_1, \cdots, y_m)$ dieser Werte den Primfaktor $\mathfrak{p}_1$ genau $e_1 + f_1$ mal enthalten. In gleicher Weise lassen sich für $i = 1, \cdots, l$ je n durch $\mathfrak{p}_i^{f_i}$ teilbare Zahlen $\xi_{i1}, \cdots, \xi_{in}$ so bestimmen, daß $(y_1, \cdots, y_m)$ für $x_1 = \xi_{i1}, \cdots, x_n = \xi_{in}$ den Faktor $\mathfrak{p}_i$ genau $e_i + f_i$ mal enthält. Bestimmt man sodann n Zahlen $\xi_1, \cdots, \xi_n$, welche den Kongruenzen

$$\xi_k \equiv \xi_{ik} \pmod{\mathfrak{p}_i^{f_i+1}} \qquad (i = 1, \cdots, l;\ k = 1, \cdots, n) \tag{8}$$

genügen, setzt man $x_1 = \xi_1, \cdots, x_n = \xi_n$, und bezeichnet man die zugehörigen Werte der y_i mit

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k \qquad (i = 1, \cdots, m), \tag{9}$$

so sind alle x durch $\mathfrak{u}$ teilbar und $(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ enthält jedes Primideal $\mathfrak{p}_i$ genau $e_i + f_i$ mal, d. h. ebenso oft wie $\mathfrak{tu}$. Es wird also

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) = \mathfrak{tur}, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{r}$ ein ganzes Ideal ist, welches keinen der Primfaktoren (7) enthält.

Nunmehr machen wir von der Voraussetzung Gebrauch, daß der Rang des Koeffizientensystems $A = (a_{ik}) \geqq 2$ ist. Da die Reihenfolge sowohl der Linearformen y wie der Unbestimmten x belanglos ist, so dürfen wir $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ von 0 verschieden annehmen. Ferner dürfen wir voraussetzen, daß die in d aufgehenden Primfaktoren unter den Primidealen (7) vorkommen. Aus $d \neq 0$ folgt noch, daß eine der Zahlen a_{21}, a_{22} von 0 verschieden sein muß, und daß man daher bei der Wahl der nur an die Kongruenzen (8) gebundenen Zahlen ξ_k so verfügen kann, daß $\eta_2 \neq 0$ wird. Dies setzen wir nun voraus. η_2 kann außer den Primidealen (7) noch andere $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots$ in endlicher Anzahl enthalten. Bezeichnet jetzt μ eine durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{p}_1^{f_1+1} \cdot \mathfrak{p}_2^{f_2+1} \cdots \mathfrak{p}_l^{f_l+1} = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_l$$

teilbare, durch die Primfaktoren $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots$ aber nicht teilbare Zahl, so enthält sowohl (μ, η_2) als auch $(\mu d, \eta_2)$ nur Primfaktoren aus der Reihe (7). Man kann daher eine ganze Zahl α so bestimmen, daß $(\eta_1 + \alpha \cdot \mu d, \eta_2)$ auch keine anderen als diese Primfaktoren enthält. Aus $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = d$ ergibt sich nun aber, daß durch die Gleichungen

(11) $$a_{11}\sigma + a_{12}\tau = \alpha d, \quad a_{21}\sigma + a_{22}\tau = 0$$

σ und τ als ganze Zahlen bestimmt werden. Ersetzt man nun ξ_1 durch $\xi_1' = \xi_1 + \sigma\mu$, ξ_2 durch $\xi_2' = \xi_2 + \tau\mu$, so genügen ξ_1' und ξ_2' wie vorher ξ_1 und ξ_2 den Kongruenzen (8). Das Wertsystem

$$x_1 = \xi_1', \; x_2 = \xi_2', \; x_3 = \xi_3, \; \cdots, \; x_n = \xi_n$$

besteht aus lauter durch $\mathfrak{u}$ teilbaren Zahlen, und für das zugehörige Wertsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ erhalten wir, wie vorher für die η, eine Relation von der Form

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \mathfrak{t}\mathfrak{u}\mathfrak{r}',$$

wo $\mathfrak{r}'$ keinen der Primfaktoren (7) enthält. Nun wird aber nach (11)

$$y_1 = \eta_1 + a_{11}\sigma\mu + a_{12}\tau\mu = \eta_1 + \alpha\mu d, \quad y_2 = \eta_2 + a_{21}\sigma\mu + a_{22}\tau\mu = \eta_2$$

und da, wie wir sahen, $(y_1, y_2) = (\eta_1 + \alpha\mu d, \eta_2)$ keinen Primfaktor außerhalb der Reihe (7) besitzt, so wird $\mathfrak{r}' = 1$, also

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \mathfrak{t}\mathfrak{u}.$$

Damit ist der Beweis geführt.

Der Fall $\mathfrak{u} = 1$ liefert den Satz, daß man den Unbestimmten in den Linearformen (6), sofern das Koeffizientensystem wenigstens vom Range 2 ist, solche Werte erteilen kann, daß der größte gemeinsame Teiler der Werte, welche die Linearformen annehmen, mit dem größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten übereinstimmt.

16. Der Satz der vorigen Nummer gestattet mannigfache Anwendungen, zu deren Ableitung wir jetzt übergehen. — Es liege ein Rechteck

$$A = (a_{ik}) \qquad (i = 1, \cdots, m; k = 1, \cdots, n)$$

vor; es sei $m \leqq n - 2$, Rg. $A = m$, also der m^{te} Determinantenteiler $\mathfrak{d}$ von A von 0 verschieden. Wird A durch Hinzufügung einer neuen Zeile von n Unbestimmten $x_1, \cdots, x_n$ zu einem Rechteck A' erweitert, so sind die Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades aus A' Linearformen der Unbestimmten x, deren Koeffizientensystem aus den Determinanten m^{ten} Grades von A besteht und wenigstens vom Range 2 ist. Denn wenn δ eine von 0 verschiedene Determinante m^{ten} Grades aus A ist, so kann man wegen $m \leqq n - 2$ zwei verschiedene Determinanten δ_1, δ_2 $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades aus A' angeben, welche δ als Unterdeterminante enthalten. Die Linearformen δ_1, δ_2 sind dann, wie man leicht sieht, linear unabhängig. Aus dem Satze der vorigen Nummer ergibt sich daher sofort:

Ein Rechteck aus n Kolonnen und $m \leqq n - 2$ Zeilen, dessen m^{ter} Determinantenteiler $\mathfrak{d}$ ist, kann durch Hinzufügung einer weiteren Zeile, deren sämtliche Elemente durch ein vorgeschriebenes Ideal $\mathfrak{u}$ teilbar sind, zu einem Rechteck erweitert werden, welches den $(m+1)^{\text{ten}}$ Determinantenteiler $\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{u}$ hat.

Werden die Elemente der neuen Zeile keiner Bedingung unterworfen, so kann man derart über sie verfügen, daß der $(m+1)^{\text{te}}$ Determinantenteiler des neuen Rechtecks wiederum $\mathfrak{d}$ ist. Dieser Prozeß kann wiederholt werden, bis die Zahl der Zeilen $n-1$ geworden ist. Im Falle $\mathfrak{d}=1$ ergibt dann das Hinzufügen einer n^{ten} Zeile von n Unbestimmten $x_1, \cdots, x_n$ eine Linearform mit teilerfremden Koeffizienten, der man durch passende Wahl der x den Wert 1 verleihen kann. Dies ergibt den Satz:

Ein Rechteck A von n Kolonnen und $m<n$ Zeilen, dessen Unterdeterminanten m^{ten} Grades teilerfremd sind (insbesondere also eine Zeile aus teilerfremden Elementen), kann durch Hinzufügung weiterer Zeilen zu einem quadratischen System von der Determinante 1 ergänzt werden.

17. Es seien m Linearformen von n Unbestimmten gegeben

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i=1, \cdots, m). \tag{12}$$

Dann gilt der Satz:

Ist der Rang des Koeffizientensystems (a_{ik}) in den Linearformen (12) $\leqq n-2$, *so lassen sich die Gleichungen*

$$y_i = 0 \qquad (i=1, \cdots, m)$$

durch teilerfremde Zahlen befriedigen.

Beweis. Aus den Elementen der Determinantentheorie ist bekannt, daß man zwei linear unabhängige Lösungen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ und $\beta_1, \cdots, \beta_n$ angeben kann, deren Elemente sich rational durch die Koeffizienten ausdrücken lassen und, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, als ganze Zahlen aus $\mathfrak{R}$ angenommen werden können. Ist

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathfrak{t}, \quad (\beta_1, \cdots, \beta_n) = \mathfrak{u},$$

so kann man ein zu $\beta_1, \cdots, \beta_n$ proportionales System angeben, dessen größter gemeinsamer Teiler zu $\mathfrak{t}$ relativ prim ist (Nr. 8). Wir dürfen daher $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{u}$ von vornherein relativ prim annehmen. Dann ist das Koeffizientensystem in den Linearformen

$$\alpha_k \xi + \beta_k \eta \qquad (k=1, \cdots, n)$$

vom Range 2, der größte gemeinsame Teiler der $2n$ Koeffizienten α_k, β_k ist 1, und man kann daher nach dem Satz in Nr. 15 ξ und η so wählen, daß die n Zahlen $\alpha_k \xi + \beta_k \eta$ teilerfremd ausfallen. Diese Zahlen stellen aber eine Lösung der Gleichungen $y_i = 0$ dar. Damit ist unser Satz bewiesen.

18. *Ist der Rang des Koeffizientensystems (a_{ik}) in den Linearformen* (12) $\leqq n-1$, $\mathfrak{m}$ *ein von Null verschiedenes Ideal, so sind die Kongruenzen*

$$y_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}} \qquad (i=1, \cdots, m) \tag{13}$$

in teilerfremden Zahlen lösbar.

Beweis. Zunächst haben die Gleichungen

$$y_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

eine Lösung in ganzen Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, die nicht sämtlich verschwinden, und es darf $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathfrak{t}$ relativ prim zu $\mathfrak{m}$ angenommen werden, da unter den proportionalen Systemen, die ja sämtlich die Gleichung befriedigen, solche vorkommen, deren größter gemeinsamer Teiler relativ prim zu $\mathfrak{m}$ ist (Nr. 8). Wenn wir nur eine Lösung der Kongruenzen (13) haben wollen, so dürfen wir die α durch mod. $\mathfrak{m}$ kongruente Zahlen ersetzen; der größte gemeinsame Teiler bleibt dann stets relativ prim zu $\mathfrak{m}$. Wählen wir nun eine von 0 verschiedene zu α_1 kongruente Zahl α_1' und eine zu α_2 kongruente Zahl α_2', welche durch keinen in α_1' und nicht zugleich in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primfaktor teilbar ist, so wird

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3, \cdots, \alpha_n) = 1,$$

und die Zahlen $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ befriedigen die Kongruenzen (13).

19. *Ist* $\mathfrak{e}_n$ *der* n^{te} *Elementarteiler des Koeffizientensystems* (a_{ik}) *in den Linearformen* (12), *so besteht jede Lösung der Kongruenzen*

$$y_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}} \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{13}$$

aus Zahlen, die durch $\frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)}$ *teilbar sind.*

Beweis. Im Falle $\mathfrak{e}_n = 0$ wird $\frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)} = 1$ und der Satz trivial; wir setzen also jetzt $\mathfrak{e}_n \neq 0$, mithin $m \geqq n$ voraus. Es sei nun $\mathfrak{d}_n$ der n^{te}, $\mathfrak{d}_{n-1}$ der $(n-1)^{\text{te}}$ Determinantenteiler des Koeffizientensystems (a_{ik}), also $\mathfrak{e}_n = \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_{n-1}}$, ferner $x_1 = \xi_1, \cdots, x_n = \xi_n$ ein Lösungssystem der Kongruenzen (13), sodaß die Zahlen

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{14}$$

sämtlich durch $\mathfrak{m}$ teilbar sind. Aus den m Gleichungen (14) lassen sich $\binom{m}{n}$ Systeme von je n Gleichungen herausgreifen. Unter ihnen seien l, bei denen die Determinante der Koeffizienten a_{ik} von 0 verschieden ist. Diese Systeme seien mit $S_1, \cdots, S_l$, die zugehörigen Determinanten mit $d_1, \cdots, d_l$ bezeichnet. Dann ist

$$(d_1, \cdots, d_l) = \mathfrak{d}_n;$$

das durch $d_q (q = 1, \cdots, l)$ repräsentierte Hauptideal hat also die Form $\mathfrak{u}_q \mathfrak{d}_n$, wobei

$$(\mathfrak{u}_1, \cdots, \mathfrak{u}_l) = 1 \tag{15}$$

wird. Wir greifen aus den Systemen S ein beliebiges S_q, aus den Zahlen $\xi_1, \cdots, \xi_n$ eine beliebige ξ heraus. Aus dem Gleichungssystem S_q gewinnen

wir für ξ einen Ausdruck in Form eines Bruches, dessen Nenner d_q ist, während der Zähler eine Linearform der (durch $\mathfrak{m}$ teilbaren Größen) η darstellt, deren Koeffizienten Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades aus dem Koeffizientensystem (a_{ik}), mithin durch $\mathfrak{d}_{n-1}$ teilbar sind. Das durch ξ repräsentierte Hauptideal $\mathfrak{x}$ hat also die Form

$$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{t}_q \mathfrak{d}_{n-1} \mathfrak{m}}{\mathfrak{u}_q \mathfrak{d}_n} = \frac{\mathfrak{t}_q}{\mathfrak{u}_q} \cdot \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{e}_n}.$$

Den l Systemen S_q entsprechend erhalten wir l solche Darstellungen von $\mathfrak{x}$. Stellt nun $\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{u}}$ die reduzierte Form des Quotienten $\frac{\mathfrak{t}_q}{\mathfrak{u}_q}$ $(q = 1, \cdots, l)$ dar, so geht $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{u}_1, \cdots, \mathfrak{u}_l$ auf, und aus (15) folgt $\mathfrak{u} = 1$,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} \cdot \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{e}_n}. \tag{16}$$

Hieraus folgt weiter (unter Benutzung der Formel (2))

$$\mathfrak{x} = \left[\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{e}_n}(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)\right] \cdot \frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)} = \left(\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{e}_n} \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{t}\right) \frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{t}) \frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)}$$

oder, wenn das ganze Ideal $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{f}$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{f} \cdot \frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)}.$$

Es ist also ξ durch $\frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)}$ teilbar; w. z. b. w.

20. *Damit die homogenen linearen Kongruenzen*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}} \qquad (i = 1, \cdots, m;\ \mathfrak{m} \neq 0)$$

in teilerfremden Zahlen lösbar seien, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{m}$ *in dem* n^{ten} *Elementarteiler* $\mathfrak{e}_n$ *des Koeffizientensystems* (a_{ik}) *aufgeht.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Denn nach dem Satze der vorigen Nummer sind die Elemente einer jeden Lösung durch $\frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)}$ teilbar, können also nur dann teilerfremd sein, wenn $\frac{\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n)} = 1$, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{e}_n) = \mathfrak{m}$, d. h. $\mathfrak{m}$ Teiler von $\mathfrak{e}_n$ ist. — Der Nachweis, daß die Bedingungen hinreichend sind, ist für den Fall $\mathfrak{e}_n = 0$ schon in Nr. 18 enthalten. Wir setzen also jetzt $\mathfrak{e}_n \neq 0$ voraus und haben dann nur zu zeigen, daß die Kongruenzen

$$y_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{e}_n} \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

in teilerfremden Zahlen lösbar sind; denn dieselben Kongruenzen bestehen dann auch für jeden in $\mathfrak{e}_n$ aufgehenden Modul. Sei nun

$$\mathfrak{e}_n = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{r_2} \cdots \mathfrak{p}_l^{r_l}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{e}_n$ in Potenzen verschiedener Primideale, so zeigen wir zunächst, daß die Kongruenzen $y_i \equiv 0$ für die einzelnen Potenzen $\mathfrak{p}_1^{r_1}, \cdots, \mathfrak{p}_l^{r_l}$ in teilerfremden Zahlen lösbar sind. Um dies etwa für $\mathfrak{p}_1^{r_1}$ durchzuführen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_{n-1}$ und $\mathfrak{d}_n$ den $(n-1)^{\text{ten}}$ und den n^{ten} Determinantenteiler von (a_{ik}), mit $\mathfrak{p}_1^{f_{n-1}}$ und $\mathfrak{p}_1^{f_n}$ die höchste in $\mathfrak{d}_{n-1}$ bzw. $\mathfrak{d}_n$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{p}_1$, sodaß $\mathfrak{e}_n = \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_{n-1}}$, $r_1 = f_n - f_{n-1}$ wird. Die Linearformen y und die Unbestimmten x denken wir uns so angeordnet, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & , \cdots, & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & , \cdots, & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{17}$$

den Primfaktor $\mathfrak{p}_1$ nur f_{n-1} mal enthält, und lösen, was nach Nr. 18 möglich ist, zunächst die ersten $n-1$ Kongruenzen

$$y_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{r_1}} \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

in teilerfremden Zahlen $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1n}$. Dann werden, wenn wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_{1k} = \eta_i \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{18}$$

setzen, $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ durch $\mathfrak{p}_1^{r_1}$ teilbar sein. Bezeichnet ν eine der Zahlen $n, n+1, \cdots, m$ und Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & , \cdots, & a_{1,n-1} & , & \eta_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & , \cdots, & a_{n-1,n-1} & , & \eta_{n-1} \\ a_{\nu 1} & , \cdots, & a_{\nu,n-1} & , & \eta_\nu \end{vmatrix},$$

so ergibt sich aus (18)

$$\Delta = \xi_{1n} \begin{vmatrix} a_{11} & , \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & , \cdots, & a_{n-1,n} \\ a_{\nu 1} & , \cdots, & a_{\nu n} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{f_n}}. \tag{19}$$

Andererseits erhält man, wenn man Δ nach den η ordnet,

$$\Delta = \delta_1\eta_1 + \cdots + \delta_{n-1}\eta_{n-1} + \delta_\nu\eta_\nu. \tag{20}$$

Nun ist

$$\delta_1\eta_1 + \cdots + \delta_{n-1}\eta_{n-1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{f_n}}, \tag{21}$$

weil $\delta_1, \cdots, \delta_{n-1}$ als Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus (a_{ik}) durch $\mathfrak{p}_1^{f_{n-1}}$ teilbar sind, während $\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ den Faktor $\mathfrak{p}_1^{r_1}$ enthalten.

Aus (19), (20), (21) folgt

$$\delta_\nu\eta_\nu \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{f_n}},$$

und da δ_ν die Determinante (17) darstellt, den Faktor $\mathfrak{p}_1$ also genau f_{n-1} mal enthält, so ist η_ν durch $\mathfrak{p}_1^{r_1}$ teilbar. Da dies für $\nu = n, \cdots, m$ gilt, so ergeben die Gleichungen (18) die Kongruenzen

$$\sum_k a_{ik}\xi_{1k} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{r_1}} \qquad (i = 1, \cdots, m).$$

Bezeichnet in gleicher Weise $\xi_{q1}, \cdots, \xi_{qn}$ ein teilerfremdes Lösungssystem der Kongruenzen

$$y_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_q^{r_q}} \qquad (q = 1, \cdots, l),$$

und bestimmt man $\xi_1, \cdots, \xi_n$ nach den Kongruenzen

$$\xi_k \equiv \xi_{qk} \pmod{\mathfrak{p}_q^{r_q}}, \qquad (k = 1, \cdots n;\ q = 1, \cdots, l),$$

so stellen $\xi_1, \cdots, \xi_n$ eine Lösung der Kongruenzen

$$y_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{e}_n} \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

dar, und es wird $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ relativ prim zu $\mathfrak{e}_n$. Da man aber $\xi_1, \cdots, \xi_n$ durch mod. $\mathfrak{e}_n$ kongruente Zahlen ersetzen darf, so kann man (vgl. S. 337, Z. 7—14) auch so verfügen, daß $(\xi_1, \cdots, \xi_n) = 1$ wird.*)

21. *Damit das System der Gleichungen*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{22}$$

in ganzen Zahlen lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Koeffizientensystem $A = (a_{ik})$ und dasjenige System A', welches man aus A durch Hinzufügung von $c_1, \cdots, c_m$ als letzte Kolonne erhält, denselben Rang r und denselben r^{ten} Determinantenteiler $\mathfrak{d}$ haben.

Beweis. Wenn $\xi_1, \cdots, \xi_n$ ein ganzzahliges Lösungssystem der Gleichungen (22) bilden, so ist, wie die elementare Determinantentheorie zeigt, jede Unterdeterminante r^{ten} Grades aus A', welche die letzte Kolonne enthält, eine Linearform der ξ mit Determinanten r^{ten} Grades aus A als Koeffizienten; sie ist also durch $\mathfrak{d}$ teilbar. Daraus ergibt sich, daß beim Übergange von A zu A' der r^{te} Determinantenteiler (ebenso jeder andere) erhalten bleibt. In ähnlicher Weise zeigt sich, daß der Rang keine Erhöhung erfährt. Die Bedingungen des Satzes sind also notwendig.

Nehmen wir nun an, die Bedingungen des Satzes seien erfüllt und δ eine von Null verschiedene Unterdeterminante r^{ten} Grades aus A. Denken wir uns die Gleichungen und Unbekannten so geordnet, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}, & \cdots, & a_{rr} \end{vmatrix} = \delta$$

*) Bei diesem Schluß ist $n > 1$ vorausgesetzt. Für $n = 1$ ergibt sich aber die Richtigkeit des Satzes unmittelbar, da alsdann $x = 1$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

wird. Dann haben die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} x_k = \delta c_i \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

ein ganzzahliges Lösungssystem $\xi_1, \cdots, \xi_r$. Da aber r der Rang des ganzen Koeffizientensystems ist, so gelten die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \xi_k = \delta c_i$$

oder, wenn wir $\xi_{r+1} = \xi_{r+2} = \cdots = \xi_n = 0$ setzen, die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k = \delta c_i \tag{23}$$

für $i = 1, \cdots, m$.

Es seien nun $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_l$ die in δ enthaltenen Primfaktoren, $\mathfrak{p}_q$ einer von ihnen, δ_q eine Unterdeterminante r^{ten} Grades aus A, welche den Primfaktor $\mathfrak{p}_q$ ebenso oft enthält wie $\mathfrak{d}$; es sei ferner $\mathfrak{d}_q = \mathfrak{r}_q \cdot \mathfrak{d}$ das durch δ_q repräsentierte Hauptideal, also $\mathfrak{r}_q$ durch $\mathfrak{p}_q$ nicht teilbar; endlich sei μ_q eine durch $\mathfrak{r}_q$ teilbare, durch $\mathfrak{p}_q$ nicht teilbare Zahl. Nehmen wir wieder, um die Darstellung zu vereinfachen, Gleichungen und Unbekannte so geordnet an, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}, & \cdots, & a_{rr} \end{vmatrix} = \delta_q$$

wird, so werden die Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} x_k = \mu_q c_i \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

ganzzahlig, und wenn wir die übrigen Unbekannten $= 0$ setzen, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_{qk} = \mu_q c_i \qquad (i = 1, \cdots, m). \tag{24}$$

Solche Gleichungen können wir für jeden der Primfaktoren $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ herstellen. Die Zahlen $\delta, \mu_1, \cdots, \mu_l$ sind dann teilerfremd, und wenn wir $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_l$ so bestimmen, daß

$$\alpha\delta + \beta_1\mu_1 + \cdots + \beta_l\mu_l = 1 \tag{25}$$

wird, und

$$\alpha\xi_k + \beta_1\xi_{1k} + \cdots + \beta_l\xi_{lk} = \bar{\xi}_k \qquad (k = 1, \cdots, n) \tag{26}$$

setzen, so folgt aus (23), (24), (25), (26)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\bar{\xi}_k = c_i \qquad (i = 1, \cdots, m), \tag{27}$$

womit unser Satz bewiesen ist.

§ 4.

Moduln.

22. Fortan verstehen wir unter dem „Grade eines Rechtecks" die Anzahl seiner Kolonnen. Dies soll auch insbesondere dann gelten, wenn das Rechteck nur aus einer Zeile besteht, deren Grad somit gleich der Zahl ihrer Elemente zu setzen ist. Zur Bezeichnung von Zeilen verwenden wir kleine griechische Buchstaben. Die Gleichung $\sigma = 0$ besagt, daß alle Elemente von σ gleich Null sind. Faktor einer Zeile σ heißt jedes Ideal, welches in allen Elementen von σ aufgeht; der größte gemeinsame Teiler dieser Elemente wird als der größte Faktor von σ bezeichnet. Unter $a \cdot \sigma$ ist die Zeile zu verstehen, deren Elemente aus denen von σ durch Multiplikation mit der Zahl a hervorgehen; $\sigma + \tau$, $\sigma - \tau$ (wo σ und τ Zeilen gleichen Grades sind) bezeichnen die Zeilen, welche aus σ und τ durch gliedweise Addition bzw. Subtraktion entstehen. — Besteht zwischen den (ganzzahligen) Zeilen $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ eine Beziehung von der Form

$$\sigma = a_1\sigma_1 + \cdots + a_m\sigma_m,$$

mit ganzen Koeffizienten a, so heißt σ „komponierbar aus $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$".

23. Moduln. — Ein System $\mathfrak{S}$ von (ganzzahligen) Zeilen n^{ten} Grades heißt ein „Modul vom Grade n", wenn es folgende Eigenschaften hat:

1) Gehört σ zu $\mathfrak{S}$, so auch jede Zeile $a\sigma$, wo a eine beliebige ganze Zahl aus $\mathfrak{R}$ bezeichnet,

2) Gehören σ und τ zu $\mathfrak{S}$, so auch $\sigma + \tau$.

Zur Bezeichnung von Moduln verwenden wir große deutsche Buchstaben; ein unten beigefügter Index gibt den Grad des Moduls an. Die Zeile $\sigma = 0$ bildet für sich einen Modul, den „Modul 0".

Zwei Zeilen σ, τ heißen kongruent nach einem Modul $\mathfrak{A}_n$, in Zeichen

$$\sigma \equiv \tau \bmod \mathfrak{A}_n,$$

wenn $\sigma - \tau$ dem Modul angehört. Der Modul $\mathfrak{A}_n$ heißt teilbar durch den Modul $\mathfrak{B}_n$ ($\mathfrak{B}_n$ ein Teiler oder Divisor von $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n$ ein Vielfaches von $\mathfrak{B}_n$), wenn alle Zeilen aus $\mathfrak{A}_n$ auch in $\mathfrak{B}_n$ enthalten sind. Eine Kongruenz, welche für einen Modul $\mathfrak{A}_n$ besteht, besteht auch für jeden Divisor von $\mathfrak{A}_n$.

24. Rang, Determinantenteiler, Elementarteiler eines Moduls. — Es liege ein Modul $\mathfrak{A}_n$ vor. Wir betrachten alle Rechtecke A, die sich aus Zeilen von $\mathfrak{A}_n$ zusammensetzen. Gibt es unter ihnen solche vom Range r, aber keine vom Range $r+1$, so heißt r der Rang des Moduls (Rg. $\mathfrak{A}_n$). — Es sei k irgend eine natürliche Zahl. Die k^{ten} Determinantenteiler aller Rechtecke A haben einen größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_k$, den wir als den k^{ten} Determinantenteiler von $\mathfrak{A}_n$ bezeichnen. Wir sehen sofort, daß $\mathfrak{d}_k$ in $\mathfrak{d}_{k+1}$ aufgeht, und daß im Falle Rg. $\mathfrak{A}_n = r$ die ersten r Determinantenteiler $\neq 0$, die übrigen $= 0$ sind. Im Anschluß hieran definieren wir auch den Begriff „Elementarteiler" für Moduln wie oben (Nr. 9) für rechteckige Systeme.

25. Basis eines Moduls. — Sind $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ Zeilen vom Grade n, so stellt die Gesamtheit aller aus $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ komponierbaren Zeilen offenbar einen Modul vom Grade n dar. Es läßt sich aber auch leicht zeigen, daß die sämtlichen Zeilen irgend eines Moduls $\mathfrak{A}_n$ aus einer endlichen Anzahl unter ihnen komponierbar sind. Es sei nämlich Rg. $\mathfrak{A}_n = r$, $\mathfrak{d}_r$ der r^{te} Determinantenteiler. Dann können wir aus den Rechtecken A_r die sich aus Zeilen von $\mathfrak{A}_n$ zusammensetzen ein r-zeiliges A_0 herausgreifen, dessen r^{ter} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_{0r}$ von Null verschieden ist. Sind $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ die verschiedenen Primfaktoren von $\mathfrak{d}_{0r}$, so können wir, wie aus der Definition der Determinantenteiler bei Moduln hervorgeht, l aus je r Zeilen von $\mathfrak{A}_n$ zusammengesetzte Rechtecke $A_1, \cdots, A_l$ so bestimmen, daß der r^{te} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_{qr}$ von A_q $(q = 1, \cdots, l)$ den Primfaktor $\mathfrak{p}_q$ ebenso oft enthält, wie er in $\mathfrak{d}_r$ enthalten ist. Dann wird

$$(\mathfrak{d}_{0r}, \mathfrak{d}_{1r}, \cdots, \mathfrak{d}_{lr}) = \mathfrak{d}_r,$$

und das aus den $(l+1) \cdot r$ Zeilen von $A_0, A_1, \cdots, A_r$ zusammengesetzte Rechteck hat $\mathfrak{d}_r$ zum r^{ten} Determinantenteiler. Es sei nun

$$A = (a_{ik}) \qquad (i = 1, \cdots, m;\ k = 1, \cdots, n)$$

irgend ein Rechteck, dessen Zeilen, die wir auch mit $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ bezeichnen, dem Modul $\mathfrak{A}_n$ angehören, und dessen r^{ter} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_r$ ist. Erweitern wir dasselbe durch Hinzufügung einer beliebigen Zeile σ aus $\mathfrak{A}_n$, die aus den Elementen $c_1, \cdots, c_n$ bestehen möge, zu einem Rechteck A', so kann weder der Rang r noch der r^{te} Determinantenteiler eine Änderung erfahren. Nach dem Satze in Nr. 21 sind also die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} x_i = c_k \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

in ganzen Zahlen $a_1, \cdots, a_m$ lösbar, und wir erhalten die Gleichung

$$\sigma = a_1 \sigma_1 + \cdots + a_m \sigma_m,$$

welche aussagt, daß jede Zeile des Moduls $\mathfrak{A}_n$ aus $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ komponierbar ist.

Wir nennen nun jedes System von m Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ eines Moduls $\mathfrak{A}_n$, aus dem sich alle Zeilen komponieren lassen, ebenso auch das aus $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ gebildete Reckteck A eine „Basis des Moduls $\mathfrak{A}_n$“, in Zeichen

$$\mathfrak{A}_n = \text{Md.}\,(\sigma_1, \cdots, \sigma_m) = \text{Md.}\,A.$$

Die Basis heißt irreduzibel, wenn es keine andere von weniger Zeilen gibt.

26. Es seien $\mathfrak{A}_n = \text{Md.}\,A$, $\mathfrak{B}_n = \text{Md.}\,B$ zwei Moduln vom Grade n. Damit $\mathfrak{B}_n$ durch $\mathfrak{A}_n$ teilbar sei, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Zeilen von B aus denen von A komponiert werden können oder, anders ausgedrückt, daß eine Gleichung von der Form

$$B = PA$$

besteht, B also links teilbar durch A ist. Daraus folgt weiter, daß für das Bestehen der Gleichung

$$\text{Md.}\,B = \text{Md.}\,A$$

die Linksäquivalenz von A und B die notwendige und hinreichende Bedingung ist.

Ist C ein aus k Zeilen von $\mathfrak{A}_n$ gebildetes Rechteck, so hat man eine Gleichung $C = PA$, der k^{te} Determinantenteiler von A geht also in dem k^{ten} von C auf. Hieraus und aus der Definition der Determinantenteiler für Moduln ergibt sich sofort, daß die Basis A dieselben Determinantenteiler, also auch dieselben Elementarteiler hat wie der Modul $\mathfrak{A}_n$.

Da alle Basen eines Moduls $\mathfrak{A}_n$ äquivalent sind, also dieselbe Zeilenklasse und dieselbe Kolonnenklasse haben (Nr. 14), so kann man diese Begriffe auch auf den Modul $\mathfrak{A}_n$ übertragen. Von diesen beiden Klassen bevorzugen wir die letztere, die wir auch kurz als die „Klasse des Moduls“ bezeichnen: Kkl. $\mathfrak{A}_n = \text{Kl.}\,\mathfrak{A}_n$. Die Moduln zerfallen hiernach in ebensoviele Klassen wie die Ideale des Körpers $\mathfrak{k}$.

27. Es sei $A = (a_{ik})$ ein Rechteck aus m Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ vom Grade n, $\text{Rg.}\,A = r$, $\text{Md.}\,A = \mathfrak{A}$, $a_1, \cdots, a_m$ ein System teilerfremder Zahlen, und es werde

$$a_1\sigma_1 + \cdots + a_m\sigma_m = \sigma \tag{28}$$

gesetzt. Dann kann man ein quadratisches System P vom Grade m bilden, dessen Determinante 1 ist und dessen erste Zeile aus den Elementen $a_1, \cdots, a_m$ besteht (Nr. 16). Das zu P reziproke System P^{-1} ist dann ebenfalls ganzzahlig; die Systeme $B = PA$ und $A = P^{-1}B$ sind daher links-äquivalent. Mithin stellt $B = PA$ wie A eine m-zeilige Basis von $\mathfrak{A}$ dar, und zwar ist σ die erste Zeile dieser Basis. Kann man die teilerfremden Zahlen $a_1, \cdots, a_m$ so bestimmen, daß $\sigma = 0$ wird, so erhält man aus B eine $(m-1)$-zeilige Basis von $\mathfrak{A}$, indem man die Zeile $\sigma = 0$

fortläßt. Die Basis $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ ist also in diesem Falle reduzibel. Nun besagt aber der Satz aus Nr. 17, daß man im Falle $r \leqq m-2$ die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} x_i = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

oder, was dasselbe besagt, die Gleichung

$$x_1 \sigma_1 + \cdots + x_m \sigma_m = 0$$

durch teilerfremde Zahlen befriedigen kann. Eine irreduzible Basis eines Moduls vom Range r kann also nicht mehr als $r+1$ Zeilen enthalten. Da sie offenbar auch nicht aus weniger als r Zeilen bestehen kann, so bleibt nur die Frage offen, in welchen Fällen sie aus r, in welchen aus $r+1$ Zeilen besteht.

Um diese Frage zu entscheiden, betrachten wir zunächst einen (von 0 verschiedenen) Modul $\mathfrak{A}$ vom Range r mit einer r-zeiligen Basis A. Bilden wir wie in Nr. 11 aus den Determinanten r^{ten} Grades aus A das rechteckige System A', so besteht dieses aus einer einzigen Zeile, jede Kolonne aus einem einzigen Element. Der größte gemeinsame Teiler der Elemente einer Kolonne ist also ein Hauptideal, d. h. die Klasse (Kolonnenklasse) von $\mathfrak{A}$ ist die Hauptklasse. Betrachten wir andererseits einen Modul $\mathfrak{A}$ vom Range r, von dem wir voraussetzen, daß er zur Hauptklasse gehört, und bezeichnen wir mit $A = (a_{ik})$ eine aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_{r+1}$ bestehende Basis von $\mathfrak{A}$. Ist dann $c_1, \cdots, c_{r+1}$ eine nicht aus lauter Nullen bestehende Kolonne des Rechtecks A' der Determinanten r^{ten} Grades von A, so wird

$$c_1 \sigma_1 + \cdots + c_{r+1} \sigma_{r+1} = 0 \tag{29}$$

und

$$(c_1, c_2, \cdots, c_{r+1}) \tag{30}$$

ein Hauptideal, welches durch eine ganze Zahl a repräsentiert werden kann. Die Zahlen $c_k' = \frac{c_k}{a}$ $(k = 1, \cdots, r+1)$ sind ganz und teilerfremd, und es wird

$$c_1' \sigma_1 + \cdots + c_{r+1}' \sigma_{r+1} = 0.$$

Mithin ist die Basis $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r+1}$ reduzibel und der Modul $\mathfrak{A}$ besitzt eine r-zeilige Basis.

Wir erhalten also den Satz:

Eine irreduzible Basis eines Moduls $\mathfrak{A}$ vom Range r besteht aus r Zeilen, wenn $\mathfrak{A}$ der Hauptklasse angehört, sonst aus $r+1$ Zeilen.

§ 5.

Die Äquivalenzbedingungen.

28. In § 2 haben wir zwei für die Äquivalenz rechteckiger Systeme notwendige Bedingungen aufgestellt. Jetzt wird es sich darum handeln, zu zeigen, daß beide Bedingungen zusammen für die Äquivalenz auch hinreichend sind. Der Nachweis beruht darauf, daß sich für die Basis eines Moduls eine gewisse Normalform aufstellen läßt, die zwar nicht eindeutig fixiert, aber durch einfache Merkmale charakterisiert ist.

Um die Darstellung im folgenden zu erleichtern, stellen wir die für die Herleitung der Normalform wichtigsten Ergebnisse aus den vorangehenden Untersuchungen hier noch einmal, in zum Teil veränderter Form zusammen.

Es sei

$$A = (a_{ik}) \qquad (i = 1, \cdots, m; k = 1, \cdots, n)$$

ein rechteckiges System von m Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ und n Kolonnen, es sei Md. $A = \mathfrak{A}$, Rg. $A = r \geqq 1$, $\mathfrak{d}_r$ der r^{te} Determinantenteiler, $\mathfrak{e}_r$ der r^{te} Elementarteiler von A, und es bezeichne σ' jede Zeile von der Form

$$\sigma' = c_1\sigma_1 + \cdots + c_m\sigma_m,$$

wo die Koeffizienten c der Bedingung

$$(c_1, \cdots, c_m) = 1 \tag{31}$$

unterworfen, sonst aber beliebig sind. Dann gelten die nachstehenden Sätze:

a) Der Modul $\mathfrak{A}$ besitzt eine Basis, welche aus einer beliebig vorgeschriebenen Zeile von der Form σ' und noch $m - 1$ Zeilen besteht (Nr. 27).

b) Ist $m \geqq r + 1$, $\mathfrak{m}$ ein beliebiges von 0 verschiedenes Ideal, so gibt es Zeilen von der Form σ', die den Faktor $\mathfrak{m}$ enthalten (Nr. 18).

c) Ist $m = r$, so ist der größte Faktor $\mathfrak{t}$ einer Zeile σ' ein Teiler von $\mathfrak{e}_r$, und es gibt Zeilen σ', für welche $\mathfrak{t} = \mathfrak{e}_r$ wird (Nr. 20).

d) Eine Zeile σ vom Grade n gehört dann und nur dann dem Modul $\mathfrak{A}$ an, wenn das Rechteck, welches aus A durch Hinzunahme der Zeile σ entsteht, den Rang r und den r^{ten} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_r$ hat (Nr. 21).

e) Ein aus Zeilen des Moduls $\mathfrak{A}$ zusammengesetztes Rechteck B stellt dann und nur dann eine Basis von $\mathfrak{A}$ dar, wenn (Rg. $B = r$ und) der r^{te} Determinantenteiler von B gleich $\mathfrak{d}_r$ ist (Nr. 25).

29. Moduln der Hauptklasse. — Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(r)}$ ein Modul vom Range $r \geqq 1$, welcher der Hauptklasse angehört, also eine Basis $A = (a_{ik})$ von r Zeilen

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r \tag{32}$$

besitzt (Nr. 27), und es bezeichne e_r den r^{ten} Elementarteiler von $\mathfrak{M}^{(r)}$. Aus den Sätzen a) und c) der vorigen Nummer folgt, daß wir die Basis so annehmen können, daß der größte Faktor von σ_r gleich e_r wird. Wir machen nun diese Voraussetzung und setzen

$$\text{Md.}\,(\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}) = \mathfrak{M}^{(r-1)}.$$

Es ist klar, daß man aus der Basis (32) des Moduls $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(r)}$ wieder eine Basis dieses Moduls erhält, wenn man $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}$ durch irgend eine Basis des Moduls $\mathfrak{M}^{(r-1)}$ ersetzt. Bezeichnet nun e_{r-1} den $(r-1)^{\text{ten}}$ Elementarteiler von $\mathfrak{M}^{(r-1)}$, so schließen wir wie vorher, daß $\mathfrak{M}^{(r-1)}$ eine Basis von $r-1$ Zeilen besitzt, deren letzte e_{r-1} als größten Faktor enthält. Die Basis (32) kann daher so angenommen werden, daß e_r und e_{r-1} den größten Faktor von σ_r bzw. σ_{r-1} darstellen. Indem wir diese Schlußweise fortsetzen, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Der Modul $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{(r)}$ besitzt eine Basis

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$$

von der Beschaffenheit, daß der größte Faktor e_k von σ_k $(k = 1, \cdots, r)$ gleich dem k^{ten} Elementarteiler des Moduls

$$\mathfrak{M}^{(k)} = \text{Md.}\,(\sigma_1, \cdots, \sigma_k)$$

ist.

Eine solche Basis setzen wir nun voraus. Sind dann $c_1, \cdots, c_k$ $(k = 1, \cdots, r)$ teilerfremde Zahlen, so ist (Nr. 28, c)) der größte Faktor von

$$\sigma' = c_1\sigma_1 + \cdots + c_k\sigma_k \tag{33}$$

ein Teiler von e_k. Ist nun aber $k > 1$, und wird $c_{k-1} = 1$ gesetzt, während die übrigen Koeffizienten in (33) gleich 0 angenommen werden, so ist $\sigma' = \sigma_{k-1}$, hat also e_{k-1} als größten Faktor. Somit ergibt sich:

$$e_{k-1} \text{ geht in } e_k \text{ auf} \qquad (k = 2, \cdots, r).$$

Wir bezeichnen nun mit A_k das aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ gebildete Rechteck, mit $\mathfrak{d}_k$ seinen k^{ten} und, falls $k > 1$, mit $\mathfrak{d}'_{k-1}$ seinen $(k-1)^{\text{ten}}$ Determinantenteiler. Dann wird

$$\mathfrak{d}_1 = e_1, \quad \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}''_{k-1} \cdot e_k. \tag{34}$$

Da in dem Rechteck A_k $(k > 1)$ die letzte Zeile den Faktor e_k, die aus den $k-1$ ersten Zeilen gebildeten Determinanten $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades den Faktor $\mathfrak{d}_{k-1}$ enthalten, so folgt, daß $\mathfrak{d}_k$ durch $\mathfrak{d}_{k-1} \cdot e_k$ mithin (wegen (34)) $\mathfrak{d}'_{k-1}$ durch $\mathfrak{d}_{k-1}$ teilbar ist. Andererseits stellt $\mathfrak{d}_{k-1}$ den größten gemeinsamen Teiler der Determinanten $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades aus A_{k-1} dar, während $\mathfrak{d}'_{k-1}$ dieselbe Bedeutung für das A_{k-1} umfassende Rechteck A_k hat. Es muß also $\mathfrak{d}_{k-1}$ durch $\mathfrak{d}'_{k-1}$ teilbar sein. Mithin wird

$$\mathfrak{d}'_{k-1} = \mathfrak{d}_{k-1}, \quad \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_{k-1} \cdot e_k,$$

also

$$\mathfrak{d}_k = \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_k \qquad (k = 1, \cdots, r). \tag{35}$$

Aus dem Umstande, daß $\mathfrak{e}_{k-1}$ in $\mathfrak{e}_k$ aufgeht, folgt, daß irgend ein Produkt von k Faktoren aus der Reihe

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_r$$

durch $\mathfrak{d}_k$ teilbar ist und daß daher auch jede Determinante k^{ten} Grades aus $A = A_r$ den Faktor $\mathfrak{d}_k$ enthält. Da andererseits $\mathfrak{d}_k$ schon für die Determinanten k^{ten} Grades aus A_k den größten gemeinsamen Teiler darstellt, so ist $\mathfrak{d}_k$ der k^{te} Determinantenteiler, $\mathfrak{e}_k$ der k^{te} Elementarteiler des Rechtecks A oder auch des Moduls $\mathfrak{A}$. Die Ergebnisse dieses Abschnittes können wir nun in dem Satze zusammenfassen:

Ein Modul $\mathfrak{A}$ der Hauptklasse vom Range r besitzt eine Basis $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ von der Beschaffenheit, daß die größten Faktoren dieser Zeilen gleich den Elementarteilern $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r$ des Moduls sind. Von diesen geht jeder in dem folgenden auf.

30. Normale Basis eines beliebigen Moduls. — Es sei jetzt $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Modul vom Range r ($\geqq 1$); seine Determinanten- und Elementarteiler seien $\mathfrak{d}_k$ und $\mathfrak{e}_k$ ($k = 1, 2, \cdots$). $\mathfrak{A}$ besitzt eine Basis von $r+1$ Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_{r+1}$, und aus Nr. 28, a) und b) folgt, daß wir dieselbe so annehmen können, daß die Elemente von σ_{r+1} durch ein vorgeschriebenes Ideal $\mathfrak{m}$ ($\neq 0$) teilbar sind. Wir nehmen an, daß σ_{r+1} den Faktor $2\mathfrak{d}_r^2$ enthält. Bezeichnen wir nun mit A_k ($k = 1, \cdots, r+1$) das aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ gebildete Rechteck, mit $\mathfrak{d}_k'$ den k^{ten} Determinantenteiler von A_r, so ist $\mathfrak{d}_k'$ durch $\mathfrak{d}_k$ teilbar und $\mathfrak{d}_k$ der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{d}_k'$ und denjenigen Determinanten k^{ten} Grades aus A_{r+1}, in welchen Elemente von σ_{r+1} auftreten. Da aber diese alle durch $2\mathfrak{d}_r^2$ teilbar sind, also jeden Primfaktor von $2\mathfrak{d}_r$ oder $2\mathfrak{d}_k$ in einer höheren Potenz enthalten als $\mathfrak{d}_k$ ($k \leqq r$ vorausgesetzt), so muß $\mathfrak{d}_k$ jeden dieser Primfaktoren genau so oft enthalten wie $\mathfrak{d}_k'$. Es wird daher

$$\mathfrak{d}_k' = \mathfrak{d}_k \cdot \mathfrak{q}_k,$$

wo $\mathfrak{q}_k$ relativ prim zu $2\mathfrak{d}_r$ ist. Ist $k < r$, so treten bei der Bildung jeder Determinante $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades aus A_{r+1} wenigstens k Zeilen aus A_r auf. Alle diese Determinanten enthalten daher den Faktor $\mathfrak{d}_k' = \mathfrak{d}_k \cdot \mathfrak{q}_k$, welcher demnach auch in $\mathfrak{d}_{k+1}$ aufgehen muß. Da aber $\mathfrak{q}_k$ zu $\mathfrak{d}_{k+1}$ relativ prim ist, so folgt $\mathfrak{q}_k = 1$. Das Rechteck A_r hat also die Determinantenteiler

$$\mathfrak{d}_1, \cdots, \mathfrak{d}_{r-1}, \mathfrak{d}_r \cdot \mathfrak{q}_r,$$

die Elementarteiler

$$\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_{r-1}, \mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{q}_r. \tag{36}$$

Nun ist Md. A_r ein Modul vom Range r mit einer r-zeiligen Basis, also ein Modul der Hauptklasse. Nach den Ergebnissen der vorigen Nummer

geht also von den Idealen (36) jedes im folgenden auf; und da $\mathfrak{q}_r$ zu $\mathfrak{e}_{r-1}$ relativ prim ist, so geht $\mathfrak{e}_{r-1}$ auch in $\mathfrak{e}_r$ auf. Nun sind $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r$ die Elementarteiler des beliebig angenommenen Moduls $\mathfrak{A}$ und jedes Rechteck die Basis eines Moduls, welcher dieselben Elementarteiler wie das Reckteck besitzt. Mithin gilt ganz allgemein der Satz:

Die Elementarteiler

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots$$

eines Rechtecks oder Moduls bilden ein System von Idealen, deren jedes im folgenden aufgeht.

31. (Fortsetzung.) Wir nehmen jetzt mit der Basis $\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_{r+1}$ des in der vorigen Nummer behandelten Moduls eine Umformung vor, indem wir zunächst $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ durch eine andere r-zeilige Basis des Moduls Md. $(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ ersetzen. Da dieser Modul der Hauptklasse angehört und die Elementarteiler $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_{r-1}, \mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{q}$ besitzt (wo $\mathfrak{q}$ für $\mathfrak{q}_r$ gesetzt ist), so können wir die r Zeilen der neuen Basis nach Nr. 29 so wählen, daß ihre größten Faktoren eben diese Elementarteiler werden. Wir bezeichnen dann diese Zeilen wieder mit $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$, mit A_r das aus ihnen gebildete Rechteck, mit A_{r+1} dasjenige Rechteck, welches aus A_r durch Hinzufügung von σ_{r+1} als letzter Zeile hervorgeht, sodaß $\mathfrak{A} = \text{Md. } A_{r+1}$ wird. Ist $\mathfrak{q}'$ ein Ideal aus derselben Klasse wie $\mathfrak{q}$ und relativ prim zu $\mathfrak{q}$, so gibt es eine zu σ_r proportionale Zeile σ_r' mit dem größten Faktor $\mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{q}'$. Erweitern wir A_{r+1} durch Hinzufügung der Zeile σ_r' zu einem Rechteck A_{r+2}, so folgt aus der Proportionalität von σ_r und σ_r', daß

$$\text{Rg. } A_{r+2} = \text{Rg. } A_{r+1} = r$$

ist. Da ferner die $r+2$ Zeilen von A_{r+2} die Faktoren

$$\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_{r-1}, \mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{q}, \mathfrak{d}_r^2, \mathfrak{e}_r \mathfrak{q}'$$

besitzen und das Produkt von irgend r dieser Faktoren durch $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_r = \mathfrak{d}_r$ teilbar ist, so hat A_{r+2} wie A_{r+1} den r^{ten} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_r$. Daraus folgt (Nr. 28, d)), daß die Zeile σ_r' dem Modul $\mathfrak{A}$ angehört. Wir betrachten jetzt das aus den $r+1$ Zeilen

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r, \sigma_r'$$

gebildete Rechteck A_{r+1}'. Unter seinen Determinanten sind zu unterscheiden: 1) diejenigen, in denen sowohl σ_r als σ_r' auftritt — sie verschwinden sämtlich —, 2) die aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ gebildeten mit dem größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_r \cdot \mathfrak{q}$, 3) die aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}, \sigma_r'$ gebildeten, deren größter gemeinsamer Teiler offenbar $\mathfrak{d}_r \cdot \mathfrak{q}'$ ist. Hieraus ergibt sich, daß das Rechteck A_{r+1}' den Rang r hat, und daß sein r^{ter} Determinantenteiler gleich

$$(\mathfrak{d}_r \cdot \mathfrak{q}, \mathfrak{d}_r \cdot \mathfrak{q}') = \mathfrak{d}_r (\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = \mathfrak{d}_r$$

wird. Daraus folgt aber (Nr. 28, e)), daß die Zeilen

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r, \sigma_r'$$

eine Basis von $\mathfrak{A}$ bilden, und wir erhalten den Satz:

Jeder Modul $\mathfrak{A}$ vom Range r mit den Elementarteilern $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r$ besitzt eine Basis von $r+1$ Zeilen

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r, \sigma_r'$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}$ haben als größte Faktoren die Elementarteiler $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_{r-1}$;*

2) *Die Zeilen σ_r und σ_r' sind proportional, und der größte gemeinsame Teiler ihrer $2n$ Elemente ist $\mathfrak{e}_r$.*

Eine solche Basis bezeichnen wir im folgenden als eine „normale".

32. Es sei wieder $\mathfrak{A}$ ein Modul vom Range $r \geqq 1$, A eine Basis von $\mathfrak{A}$, bestehend aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_{r+1}$. Dann kann man $r+1$ Zahlen $c_1, \cdots, c_{r+1}$ angeben, die nicht alle $= 0$ sind, und für welche

$$c_1\sigma_1 + \cdots + c_{r+1}\sigma_{r+1} = 0 \tag{37}$$

wird. Die Zahlen c sind ihren Verhältnissen nach bestimmt. Bildet man das Rechteck der Determinanten r^{ten} Grades aus A, so sind die nicht verschwindenden Kolonnen dem System $c_1, \cdots, c_{r+1}$ proportional, die Klasse $\varkappa$ des größten gemeinsamen Teilers

$$t = (c_1, \cdots, c_{r+1})$$

dieser Zahlen ist also zugleich die (Kolonnen-) Klasse von $\mathfrak{A}$. Ist die Basis A eine normale, so sind die beiden letzten Zeilen, die wir wieder mit σ_r, σ_r' bezeichnen, proportional, und die Relation (37) nimmt die einfache Gestalt

$$c_r\sigma_r + c_r'\sigma_r' = 0 \tag{38}$$

an, sodaß

$$\text{Kl. } \mathfrak{A} = \text{Kl. } (c_r, c_r') \tag{39}$$

wird. Ist $\mathfrak{e}_r$ der r^{te} Determinantenteiler von $\mathfrak{A}$, also der größte gemeinsame Teiler der $2n$ Elemente von σ_r und σ_r', und sind τ, τ' zwei zu σ_r proportionale Zeilen, für welche ebenfalls der größte gemeinsame Teiler der $2n$ Elemente $= \mathfrak{e}_r$ wird, so wird

$$\text{Md. } (\sigma_r, \sigma_r') = \text{Md. } (\tau, \tau'). \tag{40}$$

Dies folgt aus Nr. 28, d)), wenn man bedenkt, daß beide Moduln vom Range 1 sind, $\mathfrak{e}_1$ zum ersten Determinantenteiler haben, und daß auch das aus $\sigma_r, \sigma_r', \tau, \tau'$ gebildete Rechteck den Rang 1 und $\mathfrak{e}_r$ zum ersten Determinantenteiler hat. Aus (40) folgt, daß man eine Normalbasis von $\mathfrak{A}$ erhält, indem man σ_r, σ_r' durch τ, τ' ersetzt.

Sind $e_r \cdot \mathfrak{q}$ und $e_r \cdot \mathfrak{q}'$ die größten Faktoren von σ_r und σ_r', so ist

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1, \tag{41}$$

und die Ideale $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ gehören derselben Klasse λ an. Sind $\mathfrak{c}_r$ und $\mathfrak{c}_r'$ die durch c_r und c_r' repräsentierten Hauptideale, so sind $e_r \cdot \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{c}_r$ und $e_r \cdot \mathfrak{q}' \cdot \mathfrak{c}_r'$ die größten Faktoren in $c_r \sigma_r$ und $c_r' \sigma_r'$, und aus (38) folgt:

$$e_r \cdot \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{c}_r = e_r \cdot \mathfrak{q}' \cdot \mathfrak{c}_r', \quad \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{c}_r = \mathfrak{q}' \cdot \mathfrak{c}_r'.$$

Hieraus und aus (41) ergibt sich weiter

$$\mathfrak{c}_r = \mathfrak{c}_r \cdot (\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = (\mathfrak{q}\mathfrak{c}_r, \mathfrak{q}'\mathfrak{c}_r) = (\mathfrak{q}'\mathfrak{c}_r', \mathfrak{q}'\mathfrak{c}_r) = \mathfrak{q}'(\mathfrak{c}_r, \mathfrak{c}_r'),$$

$$\text{Kl. } \mathfrak{c}_r = \text{Kl. } (\mathfrak{c}_r, \mathfrak{c}_r') \cdot \text{Kl. } \mathfrak{q}' = \varkappa \cdot \lambda$$

und, da $\mathfrak{c}_r$ Hauptideal ist,

$$\text{Kl. } \mathfrak{q} = \lambda = \frac{1}{\varkappa},$$

oder

$$\text{Kl. } \mathfrak{A} = \text{Kl. } \frac{1}{\mathfrak{q}}. \tag{42}$$

Es seien nun c und c' irgend zwei Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler u der Klasse $\varkappa$ angehört (und die wir, auch wenn $\varkappa$ die Hauptklasse ist, als von 0 verschieden annehmen wollen), $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ die durch c, c' repräsentierten Hauptideale. Setzt man dann

$$\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{c}'}{u}, \quad \mathfrak{t}' = \frac{\mathfrak{c}}{u},$$

so sind $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ ganze Ideale aus der Klasse $\frac{1}{\varkappa}$, zu welcher auch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ gehören, und es ist $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}') = 1$. Man kann daher zwei zu σ_r proportionale Systeme τ, τ' mit den größten Faktoren $e_r \cdot \mathfrak{t}$, $e_r \cdot \mathfrak{t}'$ bestimmen. Die Systeme $c\tau$ und $c'\tau'$ haben dann beide den größten Faktor $e_r \cdot \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{c}'}{u}$, sind also nur um eine Einheit als Faktor verschieden. Da aber die Systeme τ, τ' überhaupt nur bis auf einen Einheitsfaktor bestimmt sind, so kann man so verfügen, daß $c\tau = -c'\tau'$ also

$$c\tau + c'\tau' = 0$$

wird. $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r-1}, \tau, \tau'$ stellen dabei eine normale Basis von $\mathfrak{A}$ dar. Wir erhalten so den Satz:

Ist $\mathfrak{A}$ ein Modul vom Range r, ist Kl. $\mathfrak{A} = \varkappa$, *und sind c, c' irgend zwei Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler der Klasse $\varkappa$ angehört, so läßt sich eine normale Basis*

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_r'$$

von $\mathfrak{A}$ so bestimmen, daß

$$c\sigma_r + c'\sigma_r' = 0$$

wird.

33. Der Äquivalenzsatz. — Die letzten Resultate führen uns nun unmittelbar zum Beweise des Satzes:

*Für die Äquivalenz zweier rechteckiger Systeme A und B ist notwendig und hinreichend, daß sie in ihren Elementarteilern, in ihrer Zeilen- und ihrer Kolonnenklasse übereinstimmen.**)*

Beweis. Daß die angegebenen Bedingungen notwendig sind, wurde schon in Nr. 10 und Nr. 14 nachgewiesen. Im übrigen sehen wir, daß die Bedingungen nicht unabhängig sind; es folgt aus Nr. 12, daß Rechtecke, welche in den Elementarteilern und der Kolonnenklasse (bzw. Zeilenklasse) übereinstimmen, auch dieselbe Zeilenklasse (bzw. Kolonnenklasse) haben müssen.

Es seien jetzt A und B zwei Rechtecke (gleichen oder verschiedenen Grades) vom Range $r \geqq 1$ mit den Elementarteilern $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots$ und den Determinantenteilern $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \cdots$, ihre Kolonnenklasse sei $\varkappa$. Dann ist die Äquivalenz von A und B nachzuweisen. Zu diesem Zweck bestimmen wir zwei von 0 verschiedene Zahlen c, c', deren größter gemeinsamer Teiler der Klasse $\varkappa$ angehört (Nr. 7), ferner eine normale Basis

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_r'$$

von $\mathfrak{A} = \mathrm{Md.}\, A$ und eine normale Basis

$$\tau_1, \cdots, \tau_r, \tau_r'$$

von $\mathfrak{B} = \mathrm{Md.}\, B$ so, daß

$$c\sigma_r + c'\sigma_r' = 0, \quad c\tau_r + c'\tau_r' = 0 \tag{42}$$

wird (Nr. 32). Es seien

$$A' = (a_{ik}) \qquad (i = 1, \cdots, r+1;\ k = 1, \cdots, n),$$
$$B' = (b_{ik}) \qquad (i = 1, \cdots, r+1;\ k = 1, \cdots, n')$$

die aus den Zeilen σ bzw. τ zusammengesetzten Rechtecke. Dann sind A' und A links-äquivalent, ebenso B' und B, und wir haben nur noch die Äquivalenz von A' und B' zu erweisen. Wenn wir das Rechteck A' durch Hinzunahme einer Kolonne $b_{1q}, \cdots, b_{r+1,q}$ von B zu einem Rechteck A_q' erweitern, so folgt aus (42), daß auch in A_q' die beiden letzten Zeilen proportional sind. Es ist also $\mathrm{Rg.}\, A_q' = r$. Ferner enthalten die Zeilen von A_q' die Faktoren

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_r, \mathfrak{e}_r,$$

und es werden alle Determinanten r^{ten} Grades aus A_q' durch $\mathfrak{d}_r = \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_r$ teilbar. Daher erfährt auch der r^{te} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_r$ beim Übergange von A' zu A_q' keine Veränderung. Daraus folgt (Nr. 21), daß die Gleichungen

---

*) Die Rechtecke vom Range 0 gehören zu keiner Zeilen- oder Kolonnenklasse. Man sieht sofort, daß alle diese Rechtecke, deren sämtliche Elemente, Elementarteiler, Determinantenteiler verschwinden, untereinander äquivalent sind. Sie können daher im folgenden außer Acht gelassen werden.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_{iq} \qquad (i=1,\cdots,r+1)$$

in ganzen Zahlen $p_{1q},\cdots,p_{nq}$ lösbar sind. Dies gilt für alle n' Kolonnen von B' und liefert $(r+1)n'$ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kq} = b_{iq} \quad (i=1,\cdots,r+1;\ q=1,\cdots,n'). \tag{43}$$

Setzen wir

$$P=(p_{ik}) \qquad (i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,n'),$$

so werden die Gleichungen (43) in eine Gleichung

$$A'P=B'$$

zusammengefaßt. Ebenso läßt sich das Bestehen einer Gleichung

$$B'Q=A'$$

nachweisen. Die Rechtecke A' und B' sind also rechts-äquivalent, und damit ist unser Satz bewiesen.

34. Die Elementarteiler

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots$$

eines Rechtecks oder Moduls bilden, wie gezeigt wurde, eine Folge von Idealen, deren jedes im folgenden aufgeht, und von denen nur eine endliche Anzahl von 0 verschieden ist. Umgekehrt stellt jede Folge von Idealen mit den angegebenen Eigenschaften das Elementarteilersystem von Moduln (oder Rechtecken) und zwar von Moduln jeder Klasse dar und soll deshalb kurz „Elementarteilersystem" genannt werden.

Es seien nämlich

$$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_r$$

r von 0 verschiedene Ideale, ein jedes Teiler des folgenden, $\varkappa$ eine beliebige Idealklasse, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ zwei Ideale aus der zu $\varkappa$ reziproken Klasse, $(\mathfrak{q},\mathfrak{q}')=1$, und es werde $\mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_2\cdots\mathfrak{e}_k=\mathfrak{d}_k$ gesetzt $(k=1,\cdots,r)$. Ist dann n eine natürliche Zahl $>r$, so können wir (Nr. 16) ein Rechteck n^{ten} Grades A_r von r Zeilen $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ so herstellen, daß diese Zeilen die Faktoren

$$\mathfrak{e}_1,\cdots,\mathfrak{e}_{r-1},\ \mathfrak{e}_r\cdot\mathfrak{q} \tag{44}$$

enthalten und das aus den ersten k Zeilen gebildete Rechteck A_k, $k<r$, den k^{ten} Determinantenteiler $\mathfrak{d}_k$ hat, falls der r^{te} Determinantenteiler von A_r aber gleich $\mathfrak{d}_r\cdot\mathfrak{q}$ wird. Dann sieht man sofort, daß die unter (44) angegebenen Ideale die Elementarteiler von A_r und zugleich die größten Faktoren der einzelnen Zeilen von A_r werden. Da $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ Ideale aus derselben Klasse sind, so läßt sich eine zu σ_r proportionale Zeile σ_r' mit dem

größten Faktor $\mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{q}'$ bestimmen. Das Rechteck A_{r+1}, welches aus den Zeilen $\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \sigma_r'$ besteht, hat dann die Elementarteiler

$$\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r,$$

und dasselbe gilt für den Modul $\mathfrak{A} = \text{Md. } A_{r+1}$. Aus dem Umstande, daß $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ der Klasse $\frac{1}{\varkappa}$ angehören, folgt nach den Ergebnissen von Nr. 32

$$\text{Kl. } \mathfrak{A} = \varkappa.$$

Will man einen Modul r^{ten} Grades und Ranges mit den Elementarteilern $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r$ haben, so darf man die Klasse natürlich nicht vorschreiben; denn da die Zeilenklasse eines solchen Moduls offenbar die Hauptklasse ist, so muß seine (Kolonnen-)Klasse $= \text{Kl. } \mathfrak{d}_r$ werden. Moduln dieser Klasse lassen sich aber auch konstruieren. Wenn man nämlich (nach Nr. 16) ein Rechteck A' aus r Zeilen vom Grade $r+1$ so bildet, daß diese Zeilen die Faktoren $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r$ haben, und daß $\mathfrak{d}_r$ der r^{te} Determinantenteiler wird, so hat A' die Elementarteiler $\mathfrak{e}_1, \cdots, \mathfrak{e}_r$, und dasselbe gilt für das Rechteck A, welches aus A' durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen hervorgeht, sowie für den Modul r^{ten} Grades $\mathfrak{A} = \text{Md. } A$.