

gleiche, wie diejenige, welche das direct gesehene Flammenbild, resp. das dünne Blättchen im diffusen weissen Lichte zeigt.

Infolge der eben erwähnten Ursache sind auch die Aureolen und Ringe nie durchaus gleichmässig gefärbt, sondern ändern von Stelle zu Stelle die Nuance, jedoch unter Beibehaltung des Grundcharakters der Farbe. Uebereinstimmend mit vorstehender Erklärung ist es auch, dass bei Platten, welche in monochromatischem Licht einen dunklen Raum um die Lichtquelle zeigen, dieser dunkle Raum bei Betrachtung einer weissen Lichtquelle nahezu die zur Farbe des Lichtpunktes und des ersten gebeugten Ringes complementäre Färbung zeigt, während bei solchen Platten, welche in einfarbigem Licht die Fraunhofer'sche Aureole aufweisen, diese Aureole, wie man von vornherein erwarten muss, bei auftreffendem weissen Licht nahezu in der gleichen Farbe erscheint, wie die Lichtquelle.

Es erübrigt mir nur noch, dem Vorstand des hiesigen Instituts, Hrn. Prof. Dr. Lommel, sowie Hrn. Prof. Dr. Narr für die vielseitige Anregung und Unterstützung mit Rath und That bei Ausführung dieser Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

München, im April 1888.

VII. *Die Newton'schen Ringe im durchgehenden Lichte (experimenteller Theil);* von *E. Gumlich.*

(Hierzu Taf. VI Fig. 3—7.)

Als ich vor einigen Jahren auf dem von den Herren Sohncke und Wangerin eingeschlagenen Wege¹⁾ die Theorie der Newton'schen Ringe im durchgehenden Lichte entwickelte²⁾, war ich leider nicht in der Lage, die theoretisch gefundenen Resultate durch Experimente zu bestätigen. Erst

1) Sohncke u. Wangerin, Wied. Ann. 12. p. 1 u. 201. 1881.

2) E. Gumlich, Wied. Ann. 26. p. 337. 1885.

im Laufe des vorigen Jahres wurde ich durch die Güte des Hrn. v. Helmholtz in den Stand gesetzt, dies nachzuholen, und ich möchte nicht versäumen, ihm bei dieser Gelegenheit den wärmsten Dank hierfür auszusprechen, ebenso den Herren König, Lummer und Lehmann, die mich dabei mannigfach freundlichst unterstützten.

Bei den Messungen kam folgender Apparat zur Verwendung (Fig. 3).

Auf das frei bewegliche Mittelstück eines mit feiner Kreistheilung versehenen Spectralfusses wurde die von Schmidt und Hänsch zu Berlin gefertigte Linsencombination fest aufgeschraubt. Dieselbe bestand aus einer planparallelen Platte und einer planconvexen Linse, beide Theile zusammengehalten durch eine doppelte Fassung aus Messing, und zwar so, dass von der einen Fassung aus sechs Schrauben durch Löcher der zweiten Fassung hindurchgingen, sodass die letztere durch Schraubenmuttern an die erstere beliebig angedrückt werden konnte; zur besseren Regulirung des Druckes waren ausserdem zwischen beide Fassungen in Höhlungen derselben sechs kleine Spiralfedern eingelegt. Vermöge eines mit dem ganzen Mittelstücke fest verbundenen Armes, der zur Kreistheilung führte und ein Mikroskop trug, konnte man die jeweilige Stellung des Linsensystems bis auf Minuten genau ablesen.

Als Lichtquelle benutzte ich anfangs einen mit Kochsalzlösung getränkten Asbestdocht über einem Bunsenbrenner, was jedoch wegen der mangelhaften Lichtstärke nur sehr ungenügende Resultate gab. Viel besser wurden dieselben, als ich statt dessen eine sehr intensiv leuchtende Natriumlampe verwendete. Das so erhaltene Licht wurde, durch ein Collimatorrohr möglichst parallel gemacht, auf das Linsensystem geworfen und auf der anderen Seite mit dem Mikroskope beobachtet. Das letztere war befestigt an einem mit Horizontal- und Verticalverschiebung versehenen kleinen Kathetometer, dessen Nonien noch 0,02 mm abzulesen gestatteten, und vermittelte also direct die Messungen in einer Ebene. Die Messungen nach der Tiefe zu, also in der zur Kathetometerebene senkrechten Richtung, würden sich einfacher gestaltet haben, wenn man das ganze, auf seiner

Oberfläche mit einer Millimetertheilung versehene Mikroskop etwa in einer Hülse hätte verschieben und so die verschiedene Tiefenlage der anvisirten Punkte direct auf der Theilung hätte ablesen können. Da das Mikroskop jedoch fest lag, musste statt dessen der Objectivauszug, der leider auch nicht mit einem Getriebe, sondern nur mit der Hand bewegt werden konnte, mit einer Theilung in halbe Millimeter versehen werden, und es war daher durch eine Voruntersuchung zu bestimmen, welche thatsächliche Verrückung des anvisirten Gegenstandes einer bestimmten, abgelesenen Verschiebung des Mikroskopauszugs in jeder möglichen Stellung desselben entsprach. Dies gelang folgendermassen: Ich drehte das Mikroskop so, dass seine Axe parallel wurde der horizontalen Verschiebung des Kathetometers, stellte in derselben Richtung ein anzuvisirendes Object, feine Nadelspitze oder Coconfaden, auf, und verschob den Kathetometeraufsatz — ohne den Mikroskopauszug zu benutzen — solange, bis das betreffende Object vollkommen deutlich erschien. (Jedesmal acht Einstellungen.) Sodann wurde der Auszug um 5 mm herausgezogen und gleichzeitig der ganze Kathetometeraufsatz so weit zurückgeschoben, bis wieder das Bild ganz deutlich war — die dazu nöthige Verschiebung betrug beispielsweise 4,79 mm. Hierauf wurde das Objectiv bis zum Theilstrich 10 herausgezogen und das Kathetometer entsprechend — etwa um 9,40 mm zurückverschoben und so fort bis zum Theilstriche 100, wo schliesslich einer Verschiebung des Objectivs um 100 mm eine Zurückziehung des Kathetometeraufsatzes oder, was dasselbe ist, eine Verschiebung des anvisirten Gegenstandes um 96,02 mm entsprach. Auf diese Weise wurden 20 Gleichungen gewonnen, die sich folgendermassen weiter verwerthen liessen: Sei allgemein a die Verschiebung des Objectivrohres vom Nullpunkt an gerechnet, b die zugehörige Verschiebung des anvisirten Objectes, so ist die Differenz zwischen beiden ($b - a$), jedenfalls eine Function der Verschiebung a , die sich in eine nach Potenzen von a fortschreitende Reihe wird entwickeln lassen, sodass man setzen kann:

$$b - a = x.a + y.a^2 + z.a^3 + \dots$$

Die Coëfficienten $x, y, z \dots$ dieser Entwicklung kann man

aus den 20 Beobachtungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen, und wenn man die so erhaltenen Werthe in die Gleichungen einsetzt, dann ergibt die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sofort, ob man bereits eine genügende Anzahl von Gliedern in der Entwicklung berücksichtigt hat, oder ob man weiter gehen muss. So genügte es z. B. bei der gewöhnlich angewandten, starken Vergrösserung (von linear 52—92, je nach Stellung des Objectivs), noch das quadratische Glied der Reihe zu berücksichtigen, denn die Rechnung ergab einen wahrscheinlichen Fehler von ca. 0,05 mm, — eine Grösse, die jedenfalls weit unter der Grenze der zu erwartenden Einstellungsfehler liegt. Wendete man dagegen schwächere Vergrösserung (ca. 23—77fach) an, so blieb der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung bei Berücksichtigung von zwei Coëfficienten x und y noch 0,56 mm, bei Berücksichtigung von drei Coëfficienten immer noch 0,12 mm. Es empfahl sich also schon aus diesem Grunde, bei der Tiefenmessung, wenn irgend möglich, von der stärkeren Vergrösserung Gebrauch zu machen, ganz abgesehen davon, dass bei Anwendung der schwächeren Vergrösserung die Einstellungsfehler so viel grösser sind, und man das Objectiv oft um mehrere Millimeter verschieben konnte, ohne dass die Schärfe des Bildes sich wesentlich zu ändern schien, während andererseits freilich die Verschwommenheit der Erscheinungen in manchen Fällen den Gebrauch der stärkeren Vergrösserung geradezu ausschloss.

Die zunächst erforderliche Bestimmung der Brennweite, resp. des Krümmungsradius der Linse lieferte recht unbefriedigende Resultate: Trotzdem fünf verschiedene Methoden zur Anwendung kamen, und ich bei den Versuchen, die theilweise einen Raum von 20 m in Anspruch nahmen, und deshalb von einem einzelnen gar nicht vorgenommen werden konnten, von verschiedenen Seiten freundlichst unterstützt wurde, blieb doch die Unsicherheit eine ziemlich bedeutende; auch die von Hrn. Sohncke¹⁾ angegebene Modification der Methode der Spiegelung ergab, obwohl mehrfach und

1) Sohncke, Wied. Ann. 12. p. 1 u. 201. 1881.

mit vorzüglichen Instrumenten ausgeführt, keine befriedigende, innere Uebereinstimmung. Der wahrscheinlichste Werth des Krümmungsradius war 2,41 m. — Die Dicke der Glaslinse wurde mit dem Sphärometer zu 5,706 mm bestimmt. — Die Justirung des ganzen Apparates geschah in folgender Weise: Zunächst wurden Spectralfuss und Kathetometer durch Libellen möglichst horizontal, resp. vertical gestellt, und dann durch Drehung des Linsenaufsatzes die Ebene desselben parallel zur Ebene des Kathetometers, also senkrecht zur Axe des Beobachtungsmikroskopes, gerichtet. Da sich im Lager des letzteren ein Fernrohr mit Gauss'schem Ocular nicht anbringen liess, musste dies so bewerkstelligt werden, dass man zunächst den Mikroskopauszug bis fast zur Berührung mit der planen Fläche der Linse herauszog und beobachtete, ob bei der Verschiebung des Mikroskopes über die Fläche der Linse hinweg das Objectiv und sein Spiegelbild dieselbe relative Lage beizubehalten schienen. Die feinere Einstellung wurde sodann dadurch hervorgebracht, dass man mit Hülfe der stärksten Vergrösserung auf die über die ganze hintere Linsenfläche zerstreuten Lycopodiumkörner einstellte und das Linsensystem so lange drehte, bis bei derselben Stellung des Objectivauszugs sämtliche Lycopodiumkörner auf der ganzen Oberfläche gleichmässig scharf erschienen; es dürfte hierdurch die normale Stellung des Linsensystems bis auf $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}^0$ garantirt werden können. Sodann wurde das Lager des Collimatorrohres mit Hülfe eines Fernrohrs mit Gauss'schem Ocular senkrecht gerichtet gegen die planparallele Platte und das Collimatorrohr eingelegt. Es war also auf diese Weise der Fall des senkrecht einfallenden Lichtes realisirt; wollte man dann den Einfallswinkel des Lichtes ändern, so hatte man nur nöthig, den Arm des Linsensystems um den gewünschten, auf der Kreistheilung abzulesenden Winkel zu drehen.

Was zunächst das Aussehen der Ringe betrifft, so erscheinen dieselben, mit dem Mikroskop betrachtet, namentlich in der Nähe des Mittelpunktes als ungemein verschwommene, nebelhafte Gebilde, um so schwerer erkennbar, je stärker die angewandte Vergrösserung, und je grösser der Einfalls-

winkel des Lichtes ist. Die Deutlichkeit ist noch am grössten in der centralen Einfallsebene des Lichtes, sie nimmt um so mehr ab, je weiter man sich von derselben entfernt, und erreicht ihr Minimum in der auf dieser centralen Einfallsebene senkrecht stehenden centralen Querebene. Hier war bei grösserem Einfallswinkel mit starker Vergrösserung überhaupt nichts mehr zu entdecken, bei Anwendung der schwächeren Vergrösserung blieb eine geringe Anzahl von Ringen auch hier noch sichtbar, wenn auch sehr schwer einstellbar.

Die Messungen selbst ergaben für senkrecht einfallendes Licht, wie die Theorie erwarten liess, nichts Neues: War das Mikroskop einmal auf einen beliebigen Punkt der in diesem Falle kreisförmigen Ringe scharf eingestellt, so konnte man dasselbe über das ganze System mit derselben Stellung des Objectivauszugs hinwegbewegen, ohne dass irgendwo die Deutlichkeit sich vermindert hätte. Das ganze System liegt also hier in einer Ebene, nämlich der inneren Ebene der planparallelen Platte. Für die Maassverhältnisse der Ringdurchmesser gilt das bekannte Gesetz der Quadratwurzeln.

Ganz anders sind die Verhältnisse bei schräg einfallendem Lichte.

Die Theorie verlangt, dass in diesem Falle die Ringe nicht mehr Kreise sind, sondern Curven doppelter Krümmung, die sämmtlich auf einer geradlinigen Fläche dritter Ordnung liegen, der Interferenzfläche. Diese letztere soll eine zur entsprechenden Interferenzfläche im reflectirten Lichte spiegelbildliche Lage haben (wenn man als spiegelnde Fläche die innere Fläche der Glasplatte betrachtet); während dieselbe also im reflectirten Lichte sich innerhalb der der Lichtquelle zugewandten Glasplatte ausbreiten würde, soll sie in unserem Falle innerhalb der dem Lichte abgewandten Linse liegen, im übrigen aber sämmtliche für die Interferenzfläche im reflectirten Lichte bereits durch die Herren Sohncke und Wangerin nachgewiesene Eigenthümlichkeiten zeigen, mit dem einzigen Unterschiede, dass ihre Gestalt nicht, wie beim reflectirten Lichte, abhängt von der Dicke der Glasplatte, sondern von der Dicke der Glaslinse, gemessen im Mittelpunkt des Linsensystems.

Auch in unserem Falle wird also die Interferenzfläche zwei Gerade enthalten, welche sämmtliche Ringe treffen, und zwar die in der centralen Einfallsebene des Lichtes liegende Hauptgerade und die senkrecht dazu liegende centrale Quergerade. Die Hauptgerade soll bei schrägem Einfalle des Lichtes nicht mehr parallel sein den planen Flächen der Platte, sondern mit diesen einen Winkel bilden, dessen Grösse einzig und allein abhängt vom Einfallswinkel des Lichtes. Die Quergerade dagegen wird stets parallel bleiben den Flächen der Platte, sie soll ohne Schnitt unter der Hauptgeraden vorbeigehen, und zwar um so tiefer unter die letztere sinken, je grösser der Einfallswinkel des Lichtes ist. Die auf diesen beiden Geraden liegenden Durchmesser der Ringe sollen das Gesetz der Quadratwurzeln befolgen, und zwar sollen die in Richtung der Hauptgeraden gemessenen Durchmesser gleich sein den in Richtung der Quergeraden gemessenen, wenn man sich die ersteren durch Parallele zur Mikroskopaxe auf die Ebene der Platte projecirt denkt.

Die lichtferne Hälfte der Ringe wird schneller und tiefer unter eine senkrecht zur Einfallsebene durch die Hauptgerade gelegte Ebene — die Hauptebene — sinken, als sich die lichtnahe Hälfte darüber erhebt; zum Theil wird die lichtnahe Hälfte noch unter Hauptebene liegen.

Es wurde nun zunächst die Lage der Interferenzorte in der centralen Einfallsebene geprüft. Zu diesem Zwecke waren, wenn man die Richtungen der horizontalen und verticalen Verschiebung des Kathetometers als Coordinatenachsen bezeichnet, die scheinbaren Coordinaten des Mittelpunktes des Ringsystems zu suchen, was, da man mit der angewandten starken Vergrösserung nie einen Ring vollkommen überblicken konnte, nur dadurch zu erreichen war, dass man die erst horizontal, dann vertical gestellten Fäden des Mikroskops als Tangenten an ein und denselben Ring legte und durch Halbierung der so erhaltenen Grössen die Mittelpunktscoordinaten berechnete. In der für den Mittelpunkt gefundenen Höhe, die also gleichzeitig die Einfallsebene des Lichtes darstellt, wurde dann das Mikroskop mittelst der horizontalen Verschiebung des Kathetometers an das eine Ende des

Ringsystems verschoben und mit Hülfe des Objectivauszuges auf den zwischen dem Fadenpaare erscheinenden Ring scharf eingestellt, dessen Abscissen direct der Nonius des Kathetometers angab, und die Stellung des Objectivrohres abgelesen. Sodann wurde der ganze Kathetometeraufsatz um ein bestimmtes Stück in horizontaler Richtung nach der Mitte zu verschoben, das Mikroskop wieder scharf eingestellt, die neue Stellung des Objectivrohres abgelesen, und so fort über das ganze System hinweg. Die so abgelesenen Stellungen des Rohres hatte man sämmtlich mit Hülfe der oben bestimmten Correctionen x und y zu reduciren, die bei dieser Vergrösserung resp. $-0,05964$ und $+0,0001819$ betrugen, also beispielsweise bei der Stellung 50, resp. 52 des Mikroskoprohres:

$$50 + 50 \cdot x + 50^2 \cdot y = 47,471$$

$$52 + 52 \cdot x + 52^2 \cdot y = 49,342$$

Die Differenz 1,871

der so gefundenen, aufeinander folgenden Werthe ergibt die factische Verschiebung der Interferenzpunkte in Richtung der Mikroskopaxe. Trägt man diese Grössen, von einem beliebigen Anfangspunkte ausgehend, als Ordinaten eines schiefwinkligen Coordinatensystems auf, dessen Abscissen durch die entsprechenden horizontalen Verschiebungen des Kathetometeraufsatzes geliefert werden, so sollen die Verbindungslinien der betreffenden Endpunkte eine gerade Linie bilden. Fig. 4, in der die Erscheinungen für die Einfallswinkel $\vartheta = 28\frac{3}{4}, 45, 54\frac{3}{4}, 60^\circ$ in vierfacher Vergrösserung wiedergegeben sind, zeigt, dass dies in der That in sehr befriedigender Weise der Fall ist. Die Abweichungen von einer Geraden betragen im Maximum 0,3 mm und zeigen auch keinerlei Gang, der auf andere Ursachen, als auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler schliessen liesse.

Diese Hauptgerade soll nun mit der Platte einen Winkel ω bilden, dessen Grösse gegeben ist durch die Formel: $\operatorname{tg} \omega = \sin \vartheta \cos \vartheta / (1 + \cos^2 \vartheta)$, wenn ϑ der Einfallswinkel des Lichtes ist, und zwar soll die Gerade nach der lichtnahen Hälfte des Systems aufsteigen. Dies letztere lässt sich leicht dadurch verificiren, dass man die plane Fläche der Linse mit

Lycopodiumsamen bestäubt und nun das Mikroskop, von der lichtfernen Hälfte beginnend, in der Richtung der Einfallsebene vorschiebt. Man kommt dann in der lichtnahen Hälfte auf einen Punkt, wo neben den Ringerscheinungen auch die Lycopodiumkörner, die vorher unsichtbar waren, deutlich und deutlicher werden, dann aber wieder verschwinden, und man findet beispielsweise für den Einfallswinkel $\vartheta = 28^{\circ} \frac{3}{4}$, in Uebereinstimmung mit der Theorie, dass die Körner am deutlichsten erscheinen etwa beim 115. Ring, bei $\vartheta = 45^{\circ}$ beim 24. Ring etc. Bei den Ringen mit niedrigerer Ordnungszahl liegen demnach die scheinbaren Interferenzen vollkommen innerhalb der Glascombination, bei den folgenden liegt ein Theil derselben jedoch ausserhalb des ganzen Systems in der Luft.

Die Neigung der Hauptgeraden ω findet man aus den vorher angegebenen Messungen auf folgende Weise:

Es sei (cf. Fig. 5) PO die Richtung der einfallenden Strahlen, $ABCD$ das Linsensystem in normaler Stellung, also bei senkrecht einfallendem Lichte, M das längs der Kathetometersohle EF horizontal verschiebbare Mikroskop, dann ist, wie oben nachgewiesen, die Hauptgerade parallel AD . Ändert man nun den Einfallswinkel dadurch, dass man das um O drehbare System um den gewünschten Winkel ϑ in die Stellung $A'B'C'D'$ dreht, so ist nunmehr die Hauptgerade ST nicht mehr parallel $A'D'$, sondern bildet mit ihr den zu bestimmenden Winkel ω .

Nimmt man an, man habe nach der Drehung um ϑ zunächst den Punkt L ins Auge gefasst, dann nach der Verschiebung des Mikroskops um das Stück GN den Punkt J , so war, um diesen scharf zu sehen, das Objectivrohr um ein Stück herauszuziehen, das nach der Reduction durch x und y gleich ist dem Stücke JH . Man kennt also im Dreieck JHL die Grössen LH ($= GN$, direct abgelesen an Nonius) und JH (abgelesen auf dem Mikroskopauszuge), und findet demnach $\operatorname{tg} \lambda = JH/LH$, somit aber, da $\angle \vartheta$ der Aussenwinkel des Dreiecks LKR ist, auch den gesuchten $\angle \omega = \vartheta - \lambda$. Setzt man also $\operatorname{tg} \lambda = x$, so hat man $JH = x \cdot LH$ und kann aus sämtlichen Beobachtungen die Grösse x nach der

Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, somit $\lambda = \arctg x$ finden, und damit auch den Werth von ω . Hierbei hat man noch zu berücksichtigen, dass die Einstellungen in der Nähe des Mittelpunktes des Systems ungemein unsicher werden, da die Ringe hier kaum mehr sichtbar sind, — es ist deshalb vollkommen gerechtfertigt, diesen Beobachtungen bei der Ausgleichung ein geringeres Gewicht — etwa das Gewicht $\frac{1}{2}$ — zu ertheilen. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ergaben sich für die verschiedenen Einfallswinkel ϑ folgende Werthe von ω :

$\vartheta = 28\frac{3}{4}^{\circ}$: ω (beob.) = $13^{\circ} 17'$ ω (berechn.) = $13^{\circ} 25'$ $v = + 0^{\circ} 8'$	$\vartheta = 45^{\circ}$: ω (beob.) = $18^{\circ} 9'$ ω (berechn.) = $18^{\circ} 26'$ $v = + 0^{\circ} 17'$
$\vartheta = 54\frac{3}{4}^{\circ}$: ω (beob.) = $20^{\circ} 8'$ ω (berechn.) = $19^{\circ} 28'$ $v = - 0^{\circ} 40'$	$\vartheta = 60^{\circ}$: ω (beob.) = $19^{\circ} 28'$ ω (berechn.) = $19^{\circ} 15'$ $v = - 0^{\circ} 13'$

Bedenkt man die Unsicherheit des Winkels ϑ , die bei der angewandten Methode, das Mikroskop senkrecht zum Linsensystem zu stellen, wohl noch bis zu $\frac{1}{2}^{\circ}$ betragen kann, sowie die Schwierigkeit der Beobachtung, die, um auf diesem Wege überhaupt ans Ziel zu gelangen, für jeden Punkt mindestens 5—8 Einzeleinstellungen nöthig machte, so darf die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung gewiss als eine befriedigende betrachtet werden.

Aus theoretischen Gründen ergibt sich, dass ω bei einem Einfallswinkel des Lichtes von $54\frac{3}{4}^{\circ}$ sein Maximum erreicht haben muss. Leider gelang es nicht, Versuche mit grösserem Einfallswinkel als 60° anzustellen, weil die vorstehende Fassung der Linse das Licht am Eintritt hinderte. Da jedoch die theoretische Formel für die Grösse des ω durch das Experiment bestätigt zu sein scheint, so ist jedenfalls auch die aus ihr abgeleitete Maximalbestimmung richtig, und der Rückgang des beobachteten Werthes ω_{60} gegenüber $\omega_{54\frac{3}{4}}$ spricht ebenfalls dafür, wenn auch die Differenz der theoretisch geforderten Werthe noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt.

Demnächst war zu untersuchen die Lage der Ringpunkte

in der zur centralen Einfallsebene senkrechten Ebene, der centralen Querebene. Sämmtliche Punkte sollten hier ebenfalls auf einer Geraden liegen, die aber bei jedem Einfallswinkel parallel den planen Flächen des Systems verläuft.

Nur beim Einfallswinkel $\vartheta = 28^{\frac{3}{4}}_4^{\circ}$ gelang es überhaupt, einige Interferenzen in dieser Richtung auch mit starker Vergrößerung zu sehen, bei den grösseren Einfallswinkeln musste schwächere Vergrößerung gewählt werden, die natürlich viel unsicherere Einstellungen ergibt. Es zeigte sich aber doch, dass man in jedem Falle die sämmtlichen Punkte des ganzen Systems in dieser Richtung deutlich erkennen konnte, ohne die Stellung des Objectivrohres zu ändern, wenn man einmal auf einen bestimmten Punkt eingestellt hatte, was an sich schon zum Beweise genügen würde. Auch die graphische Aufzeichnung gibt zwar natürlich bei Anwendung der schwächeren Vergrößerung stärkere Abweichungen, dieselben sprechen jedoch ebenfalls ihrem Vorzeichen nach nur für zufällige Einstellungsfehler, die mit stärkerer Vergrößerung bei $\vartheta = 28^{\frac{3}{4}}_4^{\circ}$ vorgenommenen Messungen stimmen dagegen auch der Grösse nach ganz vorzüglich miteinander überein (cf. Fig. 6).

Nach der Theorie soll die Quergerade ohne Schnitt hinter der Hauptgeraden vorbeigehen, und zwar soll die Entfernung beider Linien voneinander mit dem Einfallswinkel des Lichtes wachsen.

Auch dies wurde durch die Messungen vollkommen bestätigt, und zwar in dem Falle, wo stärkere Vergrößerung anwendbar war ($\vartheta = 28^{\frac{3}{4}}_4$), auch quantitativ. Es wurde aus zwei correspondirenden Einstellungen auf die Hauptgerade die Grösse berechnet, um welche das Objectivrohr hätte herausgezogen werden müssen, wenn man gerade im Mittelpunkte des Systems die Lage der Hauptgeraden hätte fixiren wollen. Stellte man dann die Quergerade wirklich ein, so ergab sich für $\vartheta = 28^{\frac{3}{4}}_4$, dass das Mikroskop noch um 0,42 mm weiter herausgezogen werden musste, um von dem betreffenden Punkte der Hauptgeraden aus gezählt die auf der Quergeraden liegenden Punkte deutlich zu sehen, — die Theorie ergab 0,59 mm entsprechend:

$$\begin{array}{lcl}
 \vartheta = 28\frac{3}{4}^{\circ} \text{ (starke Vergrößerung) } & \text{beob.: } 0,42 \text{ mm} & \\
 & \text{berechn.: } 0,59 \text{ „} & \\
 & v = + 0,17 \text{ mm} & \\
 \vartheta = 45^{\circ} \text{ (schwache Vergr.) } & \text{beob.: } 0,88 \text{ mm} & \vartheta = 54\frac{3}{4}^{\circ} \text{ (beob.): } 3,56 \text{ mm} \\
 & \text{berechn.: } 1,58 \text{ „} & \text{(berechn.): } 2,37 \text{ „} \\
 & v = + 0,65 \text{ mm} & v = - 1,19 \text{ mm.}
 \end{array}$$

Um von der Gestalt der Interferenzfläche auch ausserhalb der Haupt- und Quergeraden ein Bild zu gewinnen, verfährt man nach Angabe von Sohncke¹⁾ am besten folgendermassen: Man denkt sich die durch die horizontale und verticale Verschiebung des Kathetometers bestimmte Ebene in lauter Rechtecke zerlegt, deren Projection auf die plane Fläche der Linse parallel der Mikroskopaxe natürlich ebenfalls ein entsprechendes Gitter bilden würde, und zwar wird bei der Projection die Grösse der verticalen Seiten der Rechtecke nicht geändert, die der horizontalen wird gleich der Horizontalverschiebung des Mikroskopes dividirt durch den cosinus des Einfallswinkels. Nimmt man nun in den betreffenden Eckpunkten der Rechtecke Einstellungen auf die Ringpunkte vor, dann erhält man durch die Grösse der Verschiebung, welche man dem Mikroskop ertheilen muss, um den jeweilig eingestellten Punkt scharf zu sehen, direct ein Bild von der Gestalt der Fläche. Es ergibt sich dann in der That sofort, entsprechend der Theorie, dass die centrale Einfallsebene eine Symmetrieebene für die Interferenzfläche ist, nicht aber die Querebene. Am deutlichsten erkennt man die Verhältnisse, wenn man sich durch die Hauptgerade eine auf der Einfallsebene senkrecht stehende Ebene (die Hauptebene) gelegt denkt, die also in unserem Falle eine verticale Lage haben würde, und nun zusieht, welche Hebung über, resp. Senkung unter diese Ebene dem betreffenden Interferenzorte zukommt. Im Folgenden sind die Beobachtungen für zwei Einfallswinkel wiedergegeben, sodass die Zahlen schon durch ihre Stellung die entsprechende Lage der Ringpunkte anzeigen, und zwar sind die beobachteten Zahlen die Mittel aus den für die beiden symmetrischen Hälften erhaltenen Werthe, während die aus den theoreti-

1) Sohncke, l. c.

schen Formeln hierfür berechneten Grössen in Klammer darunter stehen. Die Richtung der mit 0,00 bezeichneten Zahlen würde also zugleich die Richtung der Hauptgeraden, die Richtung der stark gedruckten die der Querggeraden angeben, das \pm Zeichen sagt, ob das Mikroskop, von der Einstellung auf den entsprechenden Punkt der Hauptgeraden an gerechnet, zurückgezogen oder vorgeschoben werden musste.

$\vartheta = 28\frac{3}{4}^\circ$ (starke Vergrösserung)

	-0,47	-0,52	-0,50	+0,20		
	[-0,16]	[-0,23]	[-0,57]	[-0,09]		
-0,14	-0,14	-0,42	-0,50	+0,07	+0,08	+0,05
[-0,03]	[-0,04]	[-0,08]	[-0,57]	[-0,03]	[+0,03]	[+0,06]
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00 mm

$\vartheta = 45^\circ$ (schwache Vergrösserung)

	-0,55	-1,49	-0,91	+0,06		
	[-0,45]	[-0,93]	[-1,53]	[-0,10]		
-0,23	-0,25	-0,96	-0,91	+0,04	+0,09	+0,00
[-0,07]	[-0,12]	[-0,27]	[-1,53]	[-0,03]	[+0,04]	[+0,04]
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00 mm

Nach demselben Principe verfahrend, kann man auch einem einzelnen Ringe folgen und findet dann beispielsweise die in Fig. 7 gegebenen Werthe: (Ring Nr. 13).

Bedenkt man, dass der Objectivauszug, durch den diese Messungen vermittelt wurden, nur in halbe Millimeter getheilt war, also die Zehntel bereits auf Schätzung beruhen, dass die Reduction der Mikroskopangaben auf die thatsächliche Verschiebung bei Anwendung der starken, resp. schwachen Vergrösserung noch mit wahrscheinlichen Fehlern von 0,05, resp. 0,12 mm behaftet ist, und zieht man die Verschwommenheit der Gebilde seitwärts von der Hauptgeraden namentlich bei grösseren Einfallswinkeln in Betracht, durch welche es bedingt wurde, dass die Einzeleinstellungen auf ein und denselben Punkt mit der starken Vergrösserung Abweichungen bis zu 2 mm, mit der schwachen sogar bis zu 5 mm ergeben konnten, so liess sich eine derartige Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, durch welches letzteres wenigstens der ganze Charakter der Interferenzfläche wiedergegeben wird, wohl kaum von vornherein erwarten.

Die grössten, bei den gegebenen Verhältnissen fast unüberwindlichen Schwierigkeiten stellten sich den Messungen entgegen bei Bestimmung der Durchmesser der verschiedenen Ringe. Die Theorie verlangt, dass die Durchmesser der Ringe, gemessen in Richtung der Hauptgeraden und der darauf senkrecht stehenden Quergeraden, das Gesetz der Quadratwurzeln befolgen, aber nur in dem Falle des senkrecht einfallenden Lichtes einander ohne weiteres gleich sind. Bei jedem anderen Einfallswinkel soll erst die Projection der auf den Hauptgeraden liegenden Ringdurchmesser auf die plane Fläche der Linse, ausgeführt in Richtung der Mikroskopaxe, gleich sein den entsprechenden, in Richtung der Quergeraden direct gemessenen Ringdurchmessern. Die absolute Grösse der letzteren ergibt sich theoretisch als:

$$d = 2 \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot r}{\cos \vartheta}},$$

wenn man mit λ die Wellenlänge, mit ϑ den Einfallswinkel des Lichtes, mit r den Krümmungsradius der Linse und mit h die Ringnummer bezeichnet, wobei noch zu bemerken ist, dass diese Formel in unserem Falle nicht für die dunkeln, sondern für die hellen Ringe gilt, welch' letztere ich der grösseren Deutlichkeit halber bei den Messungen allein berücksichtigte, während in der Formel für die dunklen Ringe statt h einzutreten hätte $[(2h - 1)/2]$.

Diese Formel für die Durchmesser der Ringe hat die Annahme zur Grundlage, dass Platte und Linse sich nur in einem Punkte, dem Mittelpunkt des ganzen Systems, berühren, eine Annahme, die thatsächlich wohl nie vollkommen erreicht werden kann und ganz besonders dann nicht, wenn man nicht in der Lage ist, für eine gleichmässige Temperatur zu sorgen. Obiger Uebelstand machte sich auch bei den vorliegenden Messungen sehr unangenehm fühlbar, denn dieselben wurden in einem kleinen Dunkelzimmer angestellt, dessen Temperatur sehr rasch stieg. Es musste dies zur Folge haben, dass die Schrauben, womit die beiden Glasfassungen zusammengehalten waren, sich verlängerten, den Druck der Federn unterstützten und die Glascombination auseinander pressten, sodass die Ringe rasch an Grösse ab-

nahmen Ein nach dieser Richtung hin angestellter Versuch ergab in der That das in folgender kleinen Tabelle zusammengestellte Resultat, deren erste Spalte die Temperatur, welche zur Zeit der Messungen an einem an dem Linsensystem angebrachten Thermometer abgelesen wurde, die zweite Spalte die dazu gehörigen Durchmesser des ersten, die dritte Spalte die entsprechenden des zehnten Ringes enthält:

Temperatur	17,0	18,7	19,9	21,0	22,0	22,5°
d_1	6,68	6,06	5,36	4,84	5,32	5,32 mm
d_{10}	15,90	15,58	15,22	15,12	15,08	15,12 mm

Es fand also bei einer Temperaturzunahme um 4° eine Abnahme des Durchmessers des ersten Ringes von nahezu 30 Proc. statt, was der Grösse nach mindestens dem Dreissigfachen eines Einstellungsfehlers entsprechen würde. Weiter zeigt die Tabelle, dass diese Abnahme keineswegs gleichmässig erfolgte, ja sogar einmal in das Gegentheil umzuschlagen scheint, was wohl nur auf veränderte Spannungsverhältnisse der Glascombination, Biegung der Platte oder dgl. zurückzuführen sein dürfte. Da die Herstellung einer constanten Temperatur als vollkommen unausführbar von vornherein ausgeschlossen werden musste, die directen Messungen aber nur absolut unbrauchbare, negative Resultate ergeben konnten, so kam es darauf an, wenigstens einen möglichst grossen Theil des Temperatureinflusses durch die Art und die Reihenfolge der Messungen zu eliminiren, und in der That gelang das in ziemlich befriedigender Weise auf folgendem Wege: Es wurde zunächst durch eine vorläufige Messung der Mittelpunkt des ganzen Systems bestimmt; hierauf mass ich, von diesem ausgehend, die Halbmesser der Ringe auf den Hauptgeraden nach einer Seite hin und zurück und nahm das Mittel (I), sodann die entsprechenden Halbmesser in Richtung der Quergeraden hin und zurück und nahm das Mittel (II), und schliesslich wieder die Halbmesser auf den Hauptgeraden und nahm das Mittel (III). Das Mittel aus I und III ergab dann erst das bei der Rechnung in Betracht kommende, mit II zu vergleichende Resultat. Wäre die Voraussetzung gültig, dass die Abnahme der Ringdurchmesser proportional ist der auf die Messungen verwandten Zeit, resp.

der damit verbundenen Temperaturerhöhung, so würde diese Methode jedenfalls in vollkommen genügender Weise den Temperatureinfluss eliminirt haben. Da diese Annahme jedoch, wie die kleine Tabelle zeigt, keineswegs streng erfüllt ist, so konnte auch nur auf eine theilweise, aber doch schon recht beträchtliche Elimination des Wärmeeinflusses gerechnet werden. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt, und zwar enthält die erste Spalte die Nummer des Ringes, die zweite die Grösse des direct gemessenen Halbmessers in Richtung der Quergeraden, die dritte die entsprechenden, bereits auf die plane Fläche projectirten Halbmesser in Richtung der Hauptgeraden, die vierte die entsprechenden Differenzen, die fünfte die Mittel aus 2 und 3, die sechste Spalte die entsprechenden, aus der theoretischen Formel berechneten Werthe, die siebente die Differenzen zwischen 5 und 6. Die letzte Spalte gibt somit zugleich auch die bei der angewandten Beobachtungsmethode noch übrig bleibenden Abweichungen vom Gesetze der Quadratwurzeln, denn die theoretische Formel für die Grösse der Ringhalbmesser:

$$\rho = \sqrt{h} \sqrt{\frac{\lambda \cdot r}{\cos \vartheta}},$$

enthält eben in dem Factor \sqrt{h} dies Gesetz als wesentlichen Bestandtheil.

$\vartheta = 0^\circ$							$\vartheta = 28\frac{3}{4}^\circ$						
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
mm							mm						
1	1,17	1,22	+ 0,05	1,19 _s	1,19	- 0,00 _s	1	1,11	1,07	- 0,04	1,09	1,27	+ 0,18
2	1,68	1,73	+ 0,05	1,70 _s	1,68	- 2 _s	2	1,68	1,67	-	1,67 _s	1,80	+ 12 _s
3	2,10	2,11	+	2,10 _s	2,06	- 4 _s	3	2,13	2,10	- 3	2,11 _s	2,20	+ 8 _s
4	2,40	2,43	+	3,2,41 _s	2,38	- 3 _s	4	2,47	2,44	- 3	2,45 _s	2,54	+ 8 _s
5	2,70	2,70	+	0 2,70	2,66	- 4	5	2,77	2,73	- 4	2,75	2,84	+ 9
6	2,97	2,96	-	1,2,96 _s	3,92	- 4 _s	6	3,05	3,02	- 3	3,03 _s	3,12	+ 8 _s
7	3,22	3,19	-	3 3,20 _s	3,15	- 5 _s	7	3,29	3,27	- 2	3,28	3,37	+ 9
8	3,43	3,41	-	2 3,42	3,37	- 5	8	3,53	3,51	- 2	3,52	3,60	+ 8
9	3,63	3,60	-	3 3,61 _s	3,57	- 4 _s	9	3,75	3,72	- 3	3,73 _s	3,82	+ 8 _s
10	3,82	3,80	-	2 3,81	3,77	- 4	10	3,96	3,94	- 2	3,95	4,02	+ 7
20	5,38	5,35	-	3,5,36 _s	5,33	- 3 _s	15	4,88	4,85	- 3	4,86 _s	4,93	+ 6 _s
30	6,59	6,53	-	6 6,56	6,52	- 4	20	5,67	5,61	- 6	5,64	5,68	+ 4
							25	6,36	6,27	- 9	6,31 _s	6,36	+ 4 _s
							30	6,97	6,89	- 8	6,93	6,97	+ 4
							40	8,08	7,98	- 10	8,03	8,04	+ 1

$\vartheta = 45^\circ$.

$\vartheta = 54\frac{3}{4}^\circ$.

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
mm							mm						
1	1,37	1,34	-0,03	1,35 ₅	1,42	+0,06 ₅	1	1,75	1,72	-0,03	1,73 ₅	1,57	-0,16 ₅
2	2,04	1,99	-	5 2,01 ₅	2,00	-1 ₅	2	2,41	2,36	-	5 2,38 ₅	2,22	-16 ₅
3	2,50	2,46	-	4 2,48	2,45	-3	3	2,89	2,84	-	5 2,86 ₅	2,72	-14 ₅
4	2,86	2,84	-	2 2,85	2,83	-2	4	3,33	3,24	-	9 3,28 ₅	3,14	-14 ₅
5	3,19	3,18	-	1 3,18 ₅	3,17	-1 ₅	5	3,68	3,60	-	8 3,64	3,51	-13
6	3,49	3,48	-	1 3,48 ₅	3,47	-1 ₅	6	4,02	3,93	-	9 3,97 ₅	3,84	-13 ₅
7	3,79	3,75	-	4 3,77	3,75	-2	7	4,32	4,23	-	9 4,27 ₅	4,15	-12 ₅
8	4,04	4,00	-	4 4,02	4,01	-1	8	4,60	4,49	-11	4,54 ₅	4,44	-10 ₅
9	4,29	4,26	-	3 4,27 ₅	4,25	-2 ₅	9	4,87	4,77	-10	4,82	4,71	-11
10	4,51	4,48	-	3 4,49 ₅	4,48	-1 ₅	10	5,10	5,03	-	7 5,06 ₅	4,96	-10 ₅
15	5,50	5,47	-	3 4,48 ₅	4,49	+0 ₅	15	6,21	6,13	-	8 6,17	6,08	-9
20	6,36	6,35	-	1 6,35 ₅	6,33	-2 ₅	20	7,20	7,08	-17	7,11 ₅	7,02	-9 ₅
25	7,10	7,06	-	4 7,08	7,08	+0	25		7,87		7,87	7,85	-2
30	7,83	7,75	-	8 7,79	7,76	-3	30		8,61		8,61	8,59	-2
35		8,36		8,36	8,38	+2	40		9,95		9,95	9,92	-3
40		8,94		8,94	8,96	+2	60		12,11		12,11	12,15	+4

Der Gang der Abweichungen v in der vierten und siebenten Spalte, deren Grösse die Einstellungsfehler immerhin noch bedeutend übersteigt, lässt natürlich noch das Vorhandensein einer das Resultat systematisch verfälschenden Fehlerquelle, eben des nicht vollkommen eliminirten Temperatureinflusses, erkennen, allein die Wirkung derselben ist doch mittelst der angewandten Methode so weit verringert, dass man unter Berücksichtigung der Schwierigkeit der Verhältnisse Theorie und Experiment auch in diesem Punkte als in ziemlich genügender Uebereinstimmung stehend wird betrachten dürfen.

VIII. Ueber Totalreflexion an doppeltbrechenden Krystallen; von Joh. Norrenberg.

(Zum Theil nach der Inauguraldissertation bearbeitet vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 8–15.)

I.

Die vorliegende, auf Anregung der Herren Prof. Ketteler und Dr. Pulfrich ausgeführte Experimentaluntersuchung bezweckt, einige Lücken auszufüllen, welche sämtliche mit Hülfe der Totalreflexion zur experimentellen Prüfung