Ueber die Convergenz unendlicher Producte.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Die Hauptsätze über die Convergenz unendlicher Producte sind zuerst von Cauchy*) mit Hülfe der Theorie der Logarithmen und der logarithmischen Reihe bewiesen worden. So bequem dieses Auskunftsmittel auch erscheinen mag — denn in der That wird dadurch die ganze Theorie der unendlichen Producte mit *einem* Schlage auf diejenige der unendlichen Reihen zurückgeführt — so kann dasselbe doch da, wo es sich um einen wirklich methodischen Aufbau der Analysis handelt, schwerlich als ein befriedigendes gelten: vielmehr blieb es — bei der Stellung, welche die unendlichen Producte als völlig gleichberechtigte analytische Darstellungsformen neben den unendlichen Reihen einnehmen — durchaus wünschenswerth, jene Sätze unmittelbar aus der Definition des Productes abzuleiten, ohne die Heranziehung von *Transcendenten*, welche mit dieser Definition gar nichts zu thun haben, gleichwie es wohl Niemandem einfallen wird, die elementaren Sätze über *endliche* Producte mit Hülfe der Logarithmen aus den entsprechenden Additionssätzen herzuleiten. In Folge dessen erscheint es sehr begreiflich, dass Herr Weierstrass, gelegentlich seiner Bearbeitung der Theorie der analytischen Facultäten**), sein Augenmerk u. a. auch darauf gerichtet hat, das fundamentale Criterium für die Convergenz unendlicher Producte rein elementar zu begründen. Dasselbe sagt aus, dass das unendliche Product $\Pi(1+a_\nu)$ stets convergirt, wenn die unendliche Reihe Σa_ν *unbedingt* convergirt, und es hat keinerlei Schwierigkeit, diesen Satz dahin zu vervollständigen, dass das obige Product dann auch *unbedingt* convergirt. Da sich hiernach die unbedingte Convergenz jener Reihe als eine *hinreichende* Bedingung für diejenige des Productes ergiebt, so entsteht

---

*) Cours d'Analyse algébr. (1821) p. 562 ff.

**) Journal für Mathematik Bd. 51 (1856), p. 18 ff.

sofort die Frage, ob sich diese nämliche Bedingung auch als eine *nothwendige* erweist. Diese — weder von Cauchy, noch von Herrn Weierstrass erörterte — Frage ist erst von Herrn Dini*) im bejahenden Sinne beantwortet worden, und zwar wiederum unter Anwendung jener älteren Cauchy'schen Methode, mit Hülfe der Logarithmen. Dagegen ist die *elementare* Theorie der unendlichen Producte nach dieser Seite hin bisher unvollständig geblieben. Allerdings wird in der kürzlich publicirten „*Theorie der analytischen Functionen*" des Herrn Biermann auf Grund einer rein elementaren Deduction der Satz von der *Nothwendigkeit* jener Bedingung ebenfalls ausgesprochen (p. 58): der dort versuchte Beweis für diese Behauptung ist aber schlechthin unbrauchbar, wie ich sogleich zeigen werde.

Herr B. formt zunächst das endliche Product:

$$P_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$$

(wo die a_ν reelle oder complexe Grössen mit Ausschluss des Werthes -1 bedeuten) in die folgende Reihe um:

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + a_1 + a_2 P_1 + \cdots + a_n P_{n-1} \\ &= g_0 + g_1 + \ g_2 \ + \cdots + g_n \quad \left(g_k = (1 + a_1) \cdots (1 + a_{k-1})\, a_k\right), \end{aligned}$$

worauf dann das unendliche Product $\prod_1^\infty {}_\nu (1 + a_\nu)$ als Summe der unendlichen Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu\, g_\nu$ definirt wird. Nun heisst es (a. a. O. § 56, letzte Zeile) weiter:

> *Soll* ein solches Product unabhängig von der Anordnung der Factoren *endlich* sein, so *muss* die unendliche Reihe $g_0 + g_1 + g_2 + \cdots$ *unbedingt* convergiren.

Um diesen durch kein weiteres Wort begründeten Ausspruch, in welchem offenbar der Kern des ganzen Beweises steckt, richtig zu verstehen, muss vor allen Dingen festgestellt werden, was hier mit dem Worte „*endlich*" gesagt sein soll: Herr B. operirt nämlich in seinem Buche je nach Bedarf mit zwei ganz verschiedenen Endlichkeitsbegriffen und überlässt es im Allgemeinen dem Leser, zu errathen, welcher von diesen beiden gerade gemeint ist. Er definirt zunächst (S. 19 ff.) nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass die Irrationalzahlen als Summen unendlich vieler Elemente und sagt alsdann (S. 28):

> Eine aus unendlich vielen positiven und negativen Elementen zusammengesetzte Grösse a heisst endlich, wenn eine

*) Annali di Matematica, Ser. II, T. II (1870), p. 35. Vgl. auch: Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 238.

positive Grösse existirt, die grösser ist als der absolute Betrag irgend eines Bestandtheils von a.

Da hier der Ausdruck „Bestandtheil" nach der auf S. 19 gegebenen Definition jede willkürliche, aber beschränkte Anzahl herausgegriffener Elemente bedeutet, so ist offenbar nach der obigen Begriffsbestimmung für die „*Endlichkeit*" einer solchen Grösse erforderlich, dass die Summe jeder herausgegriffenen Anzahl von ausschliesslich positiven und ebenso von ausschliesslich negativen Elementen — letztere natürlich absolut genommen — unterhalb einer festen positiven Zahl liegt, sodass man jene Definition folgendermassen in die gewöhnliche Sprache der Analysis übersetzen könnte:

> Eine durch eine unendliche Reihe definirte Zahl heisst *endlich* nur dann, wenn diese Reihe *absolut* — also auch *unbedingt* — convergirt.

Dass man mit diesem gewiss richtigen, aber nach den heute üblichen Anschauungen viel zu engen Endlichkeitsbegriffe nicht ausreicht, liegt auf der Hand, und so führt auch Herr B. neben der eben erwähnten Definition der Irrationalzahlen auch noch die Heine-Cantor'sche durch sog. „Fundamentalreihen" (Zahlenfolgen) ein (S. 33 ff.), bei welcher an eine derartige Einschränkung des Endlichkeitsbegriffes gar nicht gedacht werden kann; denn hier definirt die „Fundamentalreihe":

$$1 \quad 1-\frac{1}{2} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots$$

gerade so gut eine bestimmte *endliche* Zahl, wie die folgende:

$$1 \quad 1+\frac{1}{2} \quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdots,$$

obschon bei unendlich wachsender Stellenzahl die definirenden Terme der ersteren nach der ursprünglichen Definition gar nicht mehr als „endlich" zu betrachten wären. In der That spricht auch Herr B. späterhin urplötzlich von den *Summen bedingt* convergenter Reihen (S. 55, 62), deren blosse Existenz auf Grund der erst genannten Definition einer „endlichen" Grösse schlechthin unverständlich erscheinen müsste.

Da es nun aber Herr B. völlig unterlässt, diesen Zwiespalt an irgend einer Stelle aufzuklären, bezw. sich für eine bestimmte dieser grundverschiedenen Definitionen zu entscheiden, so bleibt schliesslich nichts anderes übrig, als die Richtigkeit des oben citirten Ausspruches mit Rücksicht auf jene *beiden* Endlichkeitsbegriffe zu prüfen.

Dabei zeigt sich denn sofort, dass bei Zugrundelegung der ersten Definition nicht das Geringste gegen die in jenem Satze ausgesprochene Schlussfolgerung einzuwenden ist — nur ist dieselbe dann leider absolut werthlos: denn wenn man das unendliche Product zunächst durch eine gewisse unendliche Reihe *definirt* und diese wiederum nur dann endlich *nennt*, wenn sie *unbedingt* convergirt, so wird eben bei der ganzen Sache *überhaupt nichts* bewiesen*).

Fasst man dagegen den Endlichkeitsbegriff in der sonst üblichen Weise, so enthält der in Rede stehende Schluss geradezu eine petitio principii: es wäre nämlich sehr wohl denkbar, dass das Product unabhängig von der Anordnung der Factoren *denselben* endlichen Werth liefert, auch wenn die Reihe Σg_ν nur *bedingt* convergirt. Denn bezeichnet man etwa mit $a_1', a_2', a_3', \ldots$ irgend eine neue Anordnung der Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und setzt:

$$P_m' = \prod_1^m{}_\nu (1 + a_\nu') = g_0' + g_1' + \cdots + g_m'$$

(wo die g_k' gerade so aus den a_ν' gebildet sein sollen, wie die g_k aus den a_ν), so erfordert die Existenz eines von der Factorenanordnung unabhängigen, endlichen Productwerthes lediglich die *Convergenz* und *Gleichheit* der beiden Reihensummen Σg_ν und $\Sigma g_\nu'$: diese letztere könnte aber sehr wohl gedacht werden, auch wenn diese beiden Reihen nur *bedingt* convergiren, indem ja die Reihe der g_ν' keineswegs eine blosse Umordnung der Glieder g_ν darstellt, sondern aus ganz neuen, in anderer Weise aus den a_ν zusammengesetzten Termen besteht.

Hiernach kann ich in keinem Falle den bezüglichen Ausführungen des Herrn B. irgend welche Beweiskraft zuerkennen. Da mir aber auf der andern Seite der vollständige Ausbau einer elementaren Theorie der unendlichen Producte von principieller Wichtigkeit zu sein schien, so habe ich im Folgenden den Versuch gemacht, nicht nur die oben angedeutete Lücke auszufüllen, sondern auch die Theorie der bedingten

*) Uebrigens ist Herrn B.'s Beweis, selbst bei dieser Auffassung, in seinem weiteren Verlaufe noch nicht einmal einwurfsfrei. Denn soll nun — worauf es ja ankommt — weiter gefolgert werden, dass zur unbedingten Convergenz von Σg_ν schliesslich diejenige von Σa_ν *nothwendig* ist, so erscheint das offenbar nur dann zulässig, wenn von vornherein angenommen wird, dass die P_ν nicht nur *endlich* schlechthin, sondern auch um ein angebbares *von Null verschieden* sein sollen (also $\lim_{n=\infty} P_n$ *nicht* $= 0$). Dass aber Herr B. *nicht* — wie man ja allenfalls zu seinen Gunsten annehmen könnte — diese weitere Einschränkung des Wortes „endlich" stillschweigend gemacht wissen will, geht zur Evidenz daraus hervor, dass er das Resultat der gedachten Deduction auf S. 58 dahin zusammenfasst:

> „Die *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung dafür, dass ein von der Anordnung der Factoren unabhängiges Product *endlich* ist, besteht in der Convergenz der Reihe $|a_1| + |a_2| + |a_3| \cdots$"

während er, vollkommen hiervon getrennt, erst ganze 4 Seiten später nachweist, dass — im Falle der Convergenz von $\Sigma |a_\nu|$ — das betreffende Product *nicht verschwinden* kann.

Convergenz wenigstens für Producte mit reellen Factoren elementar zu begründen. Wenn ich dabei in den ersten drei Paragraphen wesentlich bekannte Dinge voransschicke, so geschieht dies theils des besseren Zusammenhanges wegen, theils aber auch in der Hoffnung, dass die in § 1 an die Definition der Productconvergenz geknüpften Bemerkungen immerhin etwas zur Beseitigung von mancherlei Unklarheiten beitragen könnten, und dass auch die in §§ 2 und 3 gegebene Darstellung bekannter Sätze vor den sonst üblichen Darstellungen vielleicht manche Vorzüge besitzt. Für neu möchte ich hingegen — trotz ihres elementaren Charakters — die in § 4 angestellten Betrachtungen halten, deren Resultat sodann im § 5 zum Beweise des oben urgirten Hauptsatzes verwendet wird. Ich schliesse daran im § 6 gewisse — wie ich glaube, ebenfalls noch nicht bekannte — Hülfssätze über endliche Producte; dieselben dienen dann im § 7 dazu, die bedingte Convergenz reeller Producte zu behandeln. Was die Theorie der bedingten Convergenz complexer Producte betrifft*) — der ich übrigens, analog wie bei den unendlichen Reihen, nur eine secundäre Bedeutung zuerkennen kann — so muss ich leider gestehen, dass es mir bisher nicht gelungen ist, dieselbe rein elementar darzustellen, und dass ich sogar bezüglich der Möglichkeit einer solchen Behandlung starke Zweifel hege. Dabei verstehe ich unter einer „rein elementaren" Darstellungsweise eine solche, bei der nicht nur die Benützung der Logarithmen, sondern auch die Einführung der sogenannten trigonometrischen Form der complexen Zahlen principiell ausgeschlossen ist. In der That sind diese beiden Hülfsmittel dem Wesen nach gar nicht verschieden, und man wird da, wo es sich um die Untersuchung ganz elementarer Eigenschaften von Zahlen der Form $a+bi$ handelt, bei einigem Sinne für Reinheit der Methode deren transcendente Form: $\sqrt{a^2+b^2}\left\{\cos \operatorname{arctg}\frac{b}{a}+i\sin\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$, soweit das irgend angeht, zu vermeiden suchen (wie dies z. B. auch Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über analytische Functionen zu thun pflegt). Da dieser Standpunkt in den folgenden Betrachtungen streng festgehalten wird, so möge, um später den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, bezüglich der complexen Grössen an dieser Stelle noch Folgendes eingeschaltet werden:

Nennt man, wie üblich, den positiven Werth von $\sqrt{a^2+b^2}$ den *absoluten Betrag* der complexen Zahl $a+bi$ und setzt

$$\sqrt{a^2+b^2}=|a+bi|=r,$$

*) Man vergleiche hierüber — ausser dem oben citirten Aufsatze des Herrn Dini — noch: Stolz, a. a. O. p. 245 ff., sowie den Excurs über unendliche Producte in meiner Abhandlung: „Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen etc.", Math. Ann. Bd. XXII, p. 478 ff.

so hat man

$$a + bi = r\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right).$$

Ich will alsdann den Factor $\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right)$ — welcher offenbar eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1 ist — die *Charakteristik**) der complexen Zahl $a + bi$ nennen. Darnach kann also eine complexe Zahl stets zerlegt werden in das Product ihres absoluten Betrages und ihrer Charakteristik. Diese Zerlegung ist offenbar nur auf eine einzige Weise möglich, und umgekehrt ist eine complexe Zahl durch ihren absoluten Betrag und ihre Charakteristik eindeutig bestimmt.

Ferner ergeben sich dann ohne Weiteres die folgenden Sätze:

> Multiplicirt man eine complexe Zahl mit einem beliebigen positiven Factor, so wird die Charakteristik hierdurch nicht geändert.
>
> Wie der absolute Betrag eines Productes (Quotienten) complexer Zahlen gleich ist dem Producte (Quotienten) der absoluten Beträge, so ist auch die Charakteristik eines Productes (Quotienten) gleich dem Producte (Quotienten) der einzelnen Charakteristiken.

---

§ 1.

Definition der Convergenz eines unendlichen Productes und Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

Es sei $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ eine unbegrenzt fortsetzbare Folge reeller oder complexer Grössen von der Beschaffenheit, dass zu jedem *endlichen* Index n ein *eindeutig bestimmter*, *endlicher*, für's erste auch *von Null verschiedener* Werth p_n gehört**). Setzt man dann

---

*) Ich führe diesen Ausdruck ein, da eine *allgemein* acceptirte Bezeichnung für den fraglichen Begriff nicht existirt, und die allenfalls dafür gebrauchten Ausdrücke, wie *Richtungscoefficient*, *Richtungsfactor* (bei Hankel, Stolz u. a. nach dem Vorgange Argand's) wegen ihres rein geometrischen Ursprunges mir nicht recht zusagten, während die Cauchy'sche Bezeichnung „*expression réduite*" (Anal. algébr. p. 183) mir zu umständlich und dabei wenig charakteristisch erschien.

**) Ich sage keineswegs, dass die absoluten Beträge der p_n *durchweg* endlich und von Null verschieden sein sollen, d. h. genauer gesagt dass $|p_n|$ für jedes (noch so grosse) n sowohl *über* als *unter* einer festen endlichen Zahl liegen soll. Vielmehr können die $|p_n|$, wenn n über alle Grenzen wächst, sehr wohl sämmtlich oder zum Theil unter jede Grenze hinabsinken oder über jede Grenze hinaus wachsen, sodass also *der* Werth oder wenigstens *einer* der Werthe von $\lim p_n$ für $n = \infty$ Null oder unendlich gross sein könnte.

$$(1)\qquad p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_{1}^{n}{}_{\nu}\, p_\nu = P_n,$$

so soll der Grenzwerth von P_n für $n = \infty$ als der Werth des *unendlichen* Productes:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, p_\nu$$

bezeichnet werden. Das letztere heisst *convergent*, wenn P_n für $n = \infty$ einen bestimmten *endlichen*, insbesondere auch *von Null verschiedenen* Werth P besitzt*), und man hat in diesem Falle:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, p_\nu = P_\infty = P.$$

---

*) Diese Definition der Convergenz eines unendlichen Productes ist freilich noch nicht allgemein acceptirt: den streitigen Punkt bildet das Auftreten des Grenzwerthes $P_\infty = 0$, welches von manchen Mathematikern als ein Fall von *Convergenz* angesehen wird, z. B. von Herrn Stolz (a. a. O. Bd. II, p. 231) und Cam. Jordan (Cours d'Analyse, T. I, No. 133). Herr Thomae — in seiner „Elementaren Theorie der analytischen Functionen" — schlägt eine Art Mittelweg ein: „Nähert sich mit wachsendem n P_n immer mehr der Null, so ist damit die *Convergenz* des Productes ausgesprochen" — heisst es zunächst a. a. O. p. 23. Dann wird aber hinzugefügt: „Allein solche Producte, welche gegen Null convergiren, ohne dass ein Factor Null ist, verhalten sich anders als solche Producte, die gegen eine bestimmte von Null verschiedene Zahl convergiren, und es soll daher der *Bequemlichkeit* halber angenommen werden, dass ein Product nur dann convergirt, wenn es gegen einen *von Null verschiedenen* endlichen Werth convergirt."

Andere Schriftsteller (wie Herr Weierstrass und Dini a. a. O.) sprechen wohl ausdrücklich von Producten, die unter gewissen Bedingungen endliche und von Null verschiedene Werthe besitzen, ohne indessen den Begriff eines *convergenten* Productes überhaupt zu definiren; während noch andere (vgl. Lipschitz, Grundlagen der Analysis, Bd. I, p. 503; Mittag-Leffler in den Act. Math. T. IV, p. 29) die im Texte als *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Convergenz aufgestellte *Ungleichung* (3) geradezu als *Definition* zu Grunde legen. (NB. Die von Herrn Lipschitz a. a. O. noch hinzugefügte Bedingung: es müssten ausserdem die P_n für jedes noch so grosse n unter einer festen endlichen Grenze liegen, ist in Wahrheit *überflüssig* — ein „bis in idem" — wie die im Texte an die Ungl. (3) geknüpfte Discussion lehrt). Diese letztere Definition ist offenbar von der hier gegebenen nur der äusseren Form nach verschieden, und ich möchte dieser lediglich aus dem Grunde den Vorzug geben, weil es mir natürlicher erscheint, einen neu einzuführenden Begriff, wenn irgend thunlich, durch charakteristische, unmittelbar fassliche Eigenschaften zu definiren und dann erst deren Einkleidung in analytische Zeichen vorzunehmen, als umgekehrt.

Was nun aber ferner die Ausschliessung der unendlichen Producte mit dem Grenzwerthe Null aus der Zahl der als *convergent* zu bezeichnenden betrifft, so will es mir scheinen, dass es sich hierbei nicht bloss — wie Herr Thomae sich ausdrückt — um eine Sache der grösseren *Bequemlichkeit*, sondern schlechterdings um eine directe *logische Nothwendigkeit* handelt. Man hat dabei nur *fest-*

In jedem anderen Falle wird das unendliche Product *divergent* genannt, und zwar sagt man: dasselbe divergire nach 0 bezw. ∞ oder werde unbestimmt, je nachdem $\lim P_n$ für $n = \infty$ verschwindet, bezw. in bestimmter Weise unendlich wird, oder aber innerhalb endlicher oder unendlich grosser Unbestimmtheitsgrenzen oscillirt.

Lässt man jetzt auch zu, dass unter den Grössen p_ν solche mit endlichem Index vorkommen, welche Null oder unendlich gross sind, (was z. B. in dem Falle, wo die p_ν Functionen einer oder mehrerer Variablen sind, für gewisse Werthe dieser Variablen eintreten kann), und sind solche Factoren nur in *begrenzter* Zahl vorhanden, so soll über den Charakter des unendlichen Productes die Beschaffenheit desjenigen Productes entscheiden, welches nach Ausschluss jener kritischen Factoren zurückbleibt. (Man könnte hierbei, im Falle der *Convergenz* des von Null- und Unendlichkeitsfactoren befreiten Productes, das Gesammtproduct, statt es schlechthin als *convergent* zu bezeichnen, vielleicht nicht unpassend *hebbar divergent* nennen).

---

zuhalten, dass es hier nicht sowohl darauf ankommt, die Convergenz irgend einer Grössenfolge $P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ im Allgemeinen zu definiren, dass vielmehr die Frage lautet: Was soll man unter einem *convergenten unendlichen Producte* verstehen? d. h. der Nachdruck ist darauf zu legen, dass die P_n durch eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Multiplicationen entstehen. Wenn man nun überhaupt das Resultat einer unbegrenzten Reihe von Rechnungsoperationen als *convergent* einführt, so geschieht das stets auf Grund des Principes, dass die *definirende Haupteigenschaft*, welche das Resultat einer begrenzten Anzahl jener Operationen charakterisirt, erhalten bleibt.

So erscheint z. B. die Summe S_n einer endlichen Anzahl (n) von Summanden stets als eine eindeutig bestimmte endliche Zahl, *einschliesslich der Null:* demgemäss wird die Summe einer *unendlichen* Reihe von Summanden *convergent* genannt, wenn $\lim S_n$ für $n = \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwerth hat, der auch Null sein darf.

Dagegen ist es die *erste und wesentlichste* Eigenschaft des Productes einer endlichen Anzahl von Factoren, von denen keiner verschwindet, einen bestimmten endlichen, unter allen Umständen *von Null verschiedenen* Werth zu haben: diese Eigenschaft ist in dem Grade mit dem Begriffe eines solchen Productes verknüpft, dass man darauf geradezu den Charakter unseres complexen Zahlensystems als eines in sich abgeschlossenen, nicht mehr erweiterungsfähigen begründen kann (vgl. z. B. Hankel, Vorl. über compl. Zahlen, § 29; Stolz, a. a. O. Bd. II, § 10; Weierstrass, „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten compl. Zahlen“ — Gött. Nachr. 1884, p. 410).

Hiernach erscheint es mir aber geradezu als eine *contradictio in adjecto*, von einem nach *Null convergirenden* Producte zu sprechen; und wenn solche Producte mit dem Grenzwerthe Null sich, wie Herr Thomae ausdrücklich hervorhebt, ganz *anders* verhalten wie die gegen einen festen endlichen, von Null verschiedenen Werth convergirenden Producte, so möchte ich daraus folgern, dass es nicht nur *unbequem*, sondern geradezu *unlogisch* ist, dieselben als convergent zu bezeichnen. (Man vergleiche hierzu auch noch die Randbemerkung des § 5). —

Enthält dagegen das betrachtete Product Factoren dieser Art in *unbegrenzter* Anzahl, sodass eine derartige Reduction desselben durch Ausschluss einer endlichen Factorenzahl nicht mehr möglich erscheint, so wird dasselbe ein für allemal als *divergent* anzusehen sein: sein Werth ist wie der jedes anderen divergenten Productes 0, ∞ oder unbestimmt.

Hiernach wird es für die weitere Untersuchung der Convergenz- und Divergenzbedingungen eines unendlichen Productes bei der ursprünglich eingeführten Annahme sein Bewenden haben dürfen, dass die p_ν für jeden endlichen Index endlich und von Null verschieden sein sollen.

Die oben gegebene Definition der Convergenz eines unendlichen Productes lässt sich — unter Zugrundelegung der üblichen Definition eines Grenzwerthes überhaupt — folgendermassen analytisch formuliren: Es muss sich eine positive Grösse g und zu einer beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ eine positive ganze Zahl N fixiren lassen, sodass gleichzeitig:

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{(a)}\ \ |P_\varrho| > g \\ \text{(b)}\ \ |P_{n+\varrho} - P_n| < \delta \end{cases} \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, 3 \cdots \text{in inf.} \\ n \geqq N \end{pmatrix}.$$

Es ist ohne Weiteres klar, dass aus diesen *beiden* Gleichungen, welche zusammen die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Convergenz des unendlichen Productes darstellen, — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass vermöge der Ungl. (a) auch insbesondere $|P_n| > g$ — sich stets eine Ungleichung von der Form

$$(3)\qquad \left|\frac{P_{n+\varrho}}{P_n} - 1\right| < \varepsilon \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, 3, \cdots \\ n \geqq N \end{pmatrix}$$

ableiten lässt, wo ε eine positive Grösse von ebenfalls vorzuschreibender Kleinheit bedeutet.

Um aber auch einzusehen, dass umgekehrt die Ungleichung (3) *allein* schon die *beiden* Ungleichungen (2) zu ersetzen geeignet ist, hat man offenbar nur nachzuweisen, dass unter der Voraussetzung, welche durch Ungl. (3) ausgesprochen wird, P_n für $n \geqq N$ stets sowohl oberhalb als unterhalb einer festen endlichen Grenze liegt; denn die erstere dieser Eigenschaften sagt offenbar im Wesentlichen dasselbe aus, wie die Ungleichung (2a), während die zweite es ermöglichen würde, die Ungleichung (3) durch Multiplication mit P_n ohne Weiteres in eine Ungleichung von der Form (2b) überzuführen.

Man denke sich nun ε als positiven ächten Bruch, im übrigen beliebig fixirt, und die endliche, positive, ganze Zahl N, welche zur Ungl. (3) gehört, passend bestimmt. Alsdann ist insbesondere:

$$\left| \left| \frac{P_{N+\varrho}}{P_N} \right| - 1 \right| \leqq \left| \frac{P_{N+\varrho}}{P_N} - 1 \right| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, 2, 3, \cdots)$$

und daher, wenn man n statt $N + \varrho$ schreibt und den — sicher bestimmten, endlichen und von Null verschiedenen — absoluten Betrag von P_N mit A bezeichnet:

$$-\varepsilon < \frac{|P_n|}{A} - 1 < +\varepsilon \quad (n \geqq N)$$

oder:

$$(1 - \varepsilon) A < |P_n| < (1 + \varepsilon) A \quad (n \geqq N)$$

d. h. $|P_n|$ — und folglich auch $|P_\varrho|$ — bleibt in der That durchweg endlich und von Null verschieden.

Die Ungleichung (3) stellt somit für sich allein die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Convergenz von P_∞ dar.

Hieraus ergiebt sich insbesondere als eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz die Beziehung:

$$\left| \frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 \right| = |p_{n+1} - 1| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

d. h. es muss, falls überhaupt Convergenz möglich sein soll:

$$\lim |p_n - 1| = 0 \quad (n = \infty)$$

sein, oder auch, wenn man

$$p_n = 1 + u_n$$

setzt:

$$\lim u_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Daraus folgt, dass in einem convergenten Producte von der Form $\Pi(1 + u_\nu)$ die absoluten Beträge der Grössen u_ν von einer bestimmten *endlichen* Stelle ab ächte Brüche sein müssen.

§ 2.

Producte der Form $\prod_1^\infty {}_\nu (1 + a_\nu)$, wo $a_\nu \geqq 0$.

Lehrsatz: *Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz des Productes* $\prod_1^\infty {}_\nu (1 + a_\nu)$, *wo die* a_ν *reelle, positive Grössen bedeuten, besteht in der Convergenz der Reihe* $\sum_1^\infty {}_\nu a_\nu$. *Ist dieselbe erfüllt, so convergirt das Product unabhängig von der Anordnung der Factoren gegen denselben*

Werth, wie die — auch in ihren einfachsten Bestandtheilen — unbedingt convergirende Reihe

$$1+\sum_{1}^{\infty} a_\nu A_{\nu-1}$$

(wo

$$A_0 = 1 \quad \textit{und für} \quad n \geqq 1 \; A_n = \prod_{1}^{n}{}^{(\nu)} (1+a_\nu)$$

zu setzen ist).

Beweis: Man hat hier:

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1\right| = (1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+\varrho}) - 1 > s_{n,\varrho}$$

wo

$$s_{n,\varrho} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\varrho}.$$

Soll nun das Product A_∞ convergiren, also $\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1\right|$ durch Wahl von $n \geqq N$ beliebig klein werden, so ist nach der obigen Ungleichung hierzu vor allem erforderlich, dass auch $s_{n,\varrho}$ durch Wahl von $n \geqq N$ beliebig klein gemacht werden kann — d. h. die Convergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$ ist eine *nothwendige* Bedingung für diejenige des Productes.

Angenommen jetzt, es convergire $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$, so lässt sich, wenn ε einen beliebig klein anzunehmenden, pos. ächten Bruch bedeutet, eine pos. ganze Zahl N so bestimmen, dass $s_{n,\varrho} < \varepsilon$ wird für $n \geqq N$ und jeden Werth von ϱ. Alsdann ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1\right| &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\varrho} \\ &+ a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+3} + \cdots + a_{n+\varrho-1}a_{n+\varrho} \\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+\varrho} \\ &< s_{n,\varrho} + s_{n,\varrho}^2 + \cdots + s_{n,\varrho}^n \\ &< \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad\qquad (n \geqq N)\end{aligned}$$

und es wird daher, wenn δ beliebig klein vorgelegt wird:

$$\left|\frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1\right| < \delta,$$

sobald

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < \delta \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon \leqq \frac{\delta}{1+\delta}$$

genommen wird, was bei der Convergenz der Reihe Σa_ν stets möglich ist: die letztere erscheint also auch als *hinreichende* Bedingung für die Convergenz des betrachteten Productes.

Man hat nun ferner:

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1, \\
A_1 &= 1+a_1 &&= A_0 + a_1 A_0, \\
A_2 &= (1+a_2) A_1 &&= A_1 + a_2 A_1, \\
&\cdots \\
A_n &= (1+a_n) A_{n-1} &&= A_{n-1} + a_n A_{n-1}
\end{aligned}$$

und hieraus durch Addition dieser Gleichungen:

$$A_n = 1 + \sum_1^n {}_\nu\, a_\nu A_{\nu-1}$$

folglich:

$$\prod_1^\infty {}_\nu (1+a_\nu) = A_\infty = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu A_{\nu-1}. \tag{4}$$

Dass die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe $1 + \sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu A_{\nu-1}$ absolut und unbedingt convergirt, folgt ohne weiteres aus der vorausgesetzten Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu$ und der bewiesenen Endlichkeit der Grössen A_ν. Da aber:

$$a_\nu A_{\nu-1} = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{\nu-1})\, a_\nu$$

nach Ausführung der angedeuteten Multiplication wiederum aus lauter *positiven* Bestandtheilen und zwar solchen von der Form $a_\varkappa$, $a_\varkappa a_\lambda$, $a_\varkappa a_\lambda a_\mu, \ldots$ besteht, so bleibt die obige Reihe auch noch *unbedingt* convergent, wenn man jedes Glied in diese einzelnen Bestandtheile zerlegt und nun diese selbst als die Glieder der Reihe auffasst.

Setzt man etwa zur Abkürzung:

$$\sum_1^\infty {}_\varkappa\, a_\varkappa = \sum_\varkappa a_\varkappa,$$

$$\sum_2^\infty {}_\lambda \sum_1^\lambda {}_\varkappa\, a_\varkappa a_\lambda = \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda \qquad (\varkappa < \lambda),$$

$$\sum_3^\infty {}_\mu \sum_2^\mu {}_\lambda \sum_1^\lambda {}_\varkappa\, a_\varkappa a_\lambda a_\mu = \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu \qquad (\varkappa < \lambda < \mu)$$

u. s. f.

so hat man insbesondere:

$$(5)\quad \prod_1^\infty {}^{\nu}(1+a_\nu) = 1 + \sum_\varkappa a_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu + \cdots\text{*)}$$

oder auch als Doppelreihe geschrieben

$$(6)\quad \prod_1^\infty {}^{\nu}(1+a_\nu) = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
$$+ a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + \cdots$$
$$+ a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo dann, nach dem gesagten, diese Doppelreihe in *jeder* beliebigen Anordnung convergiren muss.

Hieraus folgt nun aber ohne weiteres, dass das betrachtete unendliche Product *unabhängig von der Anordnung der Factoren* gegen denselben Werth convergirt. Denn, denkt man sich die Factoren in irgend einer Weise umgeordnet, so können — gleichgültig ob bei dieser Umordnung nur Factoren mit endlichem Index ihre Stellen vertauschen oder ob auch solche mit unendlich grossem Index *vor* andere mit endlichem Index treten (durch Herausheben von unendlichen Partialproducten und nachherige Vereinigung derselben) — schliesslich doch immer nur die Glieder der unbedingt convergirenden Doppelreihe (6) in irgend einer willkürlichen Anordnung zum Vorschein kommen,

---

*) Die Convergenz dieser Reihe kann auch unabhängig von den angestellten Betrachtungen folgendermassen eingesehen werden. Bezeichnet man die Summe der als convergent vorausgesetzten Reihe $\sum_1^\infty {}^{\varkappa} a_\varkappa$ mit s, so ist:

$$s^2 = \sum a_\varkappa^2 + 2\sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda > 2\sum a_\varkappa a_\lambda$$

folglich:

$$s^3 > 2\sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda \cdot \sum a_\mu > 2\cdot 3\cdot \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu$$

und allgemein:

$$s^n > n!\sum_{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_n} a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_2} \cdots a_{\varkappa_n}$$

Es ist daher die Summe der Reihe

$$1 + \sum_\varkappa a_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} a_\varkappa a_\lambda a_\mu + \cdots$$

kleiner als diejenige von:

$$1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots$$

und die fragliche Reihe somit convergent.

sodass also das unendliche Product durch die gedachte Operation in der That keine Werthveränderung erleidet.

Hiermit ist aber der ausgesprochene Satz in allen seinen Theilen bewiesen. —

Zusatz. Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ divergent, so muss das Product $\prod_1^\infty{}^\nu (1+a_\nu)$ nach dem obigen *divergiren* (wie sich auch unmittelbar aus der Ungleichung $\prod_1^n{}^\nu (1+a_\nu) > 1 + \sum_1^n a_\nu$ ergiebt) und zwar beständig zunehmend gegen $+\infty$.

Definition. Ein unendliches Product, welches unabhängig von der Anordnung der Factoren convergirt, heisst *unbedingt* convergent. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Ein unendliches Product, dessen Factoren reell und $\geqq 1$ sind, ist, wenn überhaupt, stets unbedingt convergent.

§ 3.

Absolute Convergenz eines reellen oder complexen Productes als hinreichende Bedingung der unbedingten Convergenz.

Lehrsatz: *Sind die Grössen u_ν beliebig reell oder complex und $|u_\nu| = a_\nu$, so convergirt mit dem Producte $\prod_1^\infty{}^\nu (1+a_\nu)$ auch stets das Product $\prod_1^\infty{}^\nu (1+u_\nu)$ und zwar unbedingt gegen den nämlichen Werth wie die — auch in ihren einfachsten Bestandtheilen unbedingt convergirende Reihe*

$$1 + \sum_1^\infty u_\nu U_{\nu-1}$$

(wo

$$U_0 = 1 \quad \text{und für} \quad n \geqq 1 \quad U_n = \prod_1^n{}^\nu (1+u_\nu)$$

zu setzen ist).

Beweis: Sei wiederum $A_n = \prod_1^n{}^\nu (1+a_\nu)$, so folgt aus der Convergenz von A_∞, dass bei beliebig klein gegebenem δ durch Wahl von $n \geqq N$

$$\frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1 < \delta \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

gemacht werden kann. Andererseits hat man:

$$\begin{aligned}\frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1 &= (1+u_{n+1})(1+u_{n+2}) \cdots (1+u_{n+\varrho}) - 1 \\ &= u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+1}u_{n+2} + \cdots\end{aligned}$$

also:

$$\left|\frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1\right| \leqq a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+2} + \cdots$$

d. h.

$$\leqq \frac{A_{n+\varrho}}{A_n} - 1,$$

sodass auch:

$$\left|\frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1\right| < \delta$$

wird (für ($n \geqq N$, $0, 1, 2, \cdots$), und somit

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} (1+u_\nu)$$

convergirt.

Ferner ergiebt sich — genau wie im vorigen Paragraphen — die Identität:

$$U_n = 1 + \sum_1^n {}^{\nu} u_\nu U_{\nu-1}$$

und es ist leicht zu sehen, dass die rechte Seite für $n = \infty$ in eine unbedingt convergirende Reihe übergeht: denn die Grössen $U_{\nu-1}$ sind für jedes ν endlich, und die Reihe $\sum_1^\infty {}^{\nu} u_\nu$ convergirt absolut und unbedingt, da die vorausgesetzte Convergenz des Productes $\prod_1^\infty {}^{\nu} (1+a_\nu)$ diejenige der Reihe $\sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu = \sum_1^\infty {}^{\nu} |u_\nu|$ mit sich bringt.

Hiernach wird nun wiederum:

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} (1+u_\nu) = 1 + \sum_1^\infty {}^{\nu} u_\nu U_{\nu-1} \tag{7}$$

und zwar bleibt die rechts stehende Reihe auch absolut und unbedingt convergent, wenn man die einzelnen Bestandtheile jedes Gliedes, nämlich

$$u_\nu U_{\nu-1} = u_\nu + u_1 u_\nu + u_2 u_\nu + u_1 u_2 u_\nu + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_\nu$$

als Glieder der Reihe auffasst. Denn die absoluten Beträge dieser Bestandtheile stimmen genau überein mit den einzelnen Termen der im vorigen Paragraphen angeführten Doppelreihe (6), welche — wegen der vorausgesetzten Convergenz des Productes $\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+a_\nu)$ — wiederum unbedingt convergirt. Man kann daher — unter Einführung der analogen Abkürzungen wie in § 2 — die Reihe (7) auch folgendermassen:

$$(8) \qquad \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+u_\nu) = 1 + \sum_{\varkappa} u_\varkappa + \sum_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda + \sum_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \cdots$$

oder in Form der absolut und unbedingt convergirenden Doppelreihe schreiben:

$$(9) \qquad \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+u_\nu) = \begin{array}{llll} 1 + u_1 & + u_2 & + u_3 & + \cdots \\ + u_1 u_2 & + u_1 u_3 & + u_2 u_3 & + \cdots \\ + u_1 u_2 u_3 & + u_1 u_2 u_4 & + u_1 u_3 u_4 & + \cdots \\ + \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \end{array}$$

woraus dann — durch wörtlich dieselben Schlüsse, wie im vorigen Paragraphen — folgt, dass das vorliegende Product *unbedingt* convergirt. —

Definition. Das unendliche Product $\Pi(1+u_\nu)$ soll *absolut* convergent heissen, wenn $\Pi(1+|u_\nu|)$ convergirt: dass das erstere Product in diesem Falle stets *überhaupt convergirt*, und die gegebene Definition demgemäss wirklich einen Sinn hat, folgt aus dem eben bewiesenen Satze.

Man kann nunmehr das Hauptresultat der beiden letzten Paragraphen auch folgendermassen aussprechen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Convergenz des unendlichen Productes $\Pi(1+u_\nu)$ besteht in der absoluten Convergenz der unendlichen Reihe Σu_ν.

Das absolut convergente Product convergirt auch stets unbedingt. (Die Umkehrbarkeit dieser letzten Aussage bleibt noch zu beweisen).

Zusatz. Ist die Reihe Σu_ν absolut convergent, so gilt das Gleiche von der Reihe $\Sigma u_\nu x$ für jedes endliche x; folglich ist das unendliche Product

$$f(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}(1+u_\nu x)$$

absolut und unbedingt convergent und kann daher in die Form der beständig convergirenden Potenzreihe:

$$f(x) = 1 + \Big(\sum_{\varkappa} u_\varkappa\Big) x + \Big(\sum_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda\Big) x^2 + \cdots$$

gesetzt werden, d. h. $f(x)$ ist eine transcendente ganze Function. (Ueber die Erweiterung dieses Satzes und den Begriff der *gleichmässigen* Convergenz eines unendlichen Productes vgl. Stolz, a. a. O. p. 243—245; Mittag-Leffler, Acta Math. T. IV, p. 31).

§ 4.

Besondere Producte, welche überhaupt nicht anders als absolut und unbedingt convergiren.

Die in § 2 betrachteten unendlichen Producte von der Form $\Pi(1+a_\nu)$, wo $a_\nu \geq 0$, convergiren und divergiren gleichzeitig mit der Reihe Σa_ν; sie convergiren also entweder absolut und unbedingt oder gar nicht. Es ist nun für das folgende wichtig, nachzuweisen, dass die analoge Eigenschaft allen unendlichen Producten von der Form $\Pi(1+p_\nu+q_\nu i)$ zukommt, wo die reellen Grössen p_ν unter sich und die q_ν unter sich — aber nicht nothwendig die p_ν mit den q_ν — gleiches Vorzeichen besitzen. Und da nach § 3 ein solches Product stets absolut und unbedingt convergirt, wenn die Reihe $\Sigma|p_\nu+q_\nu i|$ convergirt, so wird nur zu zeigen sein, dass dasselbe auch gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma|p_\nu+q_\nu i|$ — oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, mit der Reihe $\Sigma(p_\nu+q_\nu i)$ — divergirt. Hierzu betrachte ich zunächst unendliche Producte von der specielleren Form: $\Pi(1-a_\nu)$, $\Pi(1+a_\nu i)$, $\Pi(1-a_\nu i)$, wo $a_\nu \geq 0$, $\lim a_\nu = 0$, unter der Voraussetzung das Σa_ν divergirt: aus den Ergebnissen dieser Special-Untersuchungen wird sich dann das gewünschte Resultat leicht zusammensetzen lassen.

I. Es sei

$$A_n = (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n).$$

Man hat dann — da man die positiven Grössen a_ν wegen $\lim a_\nu = 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit < 1 annehmen kann —

$$0 < 1 - a_\nu^2 \leq 1$$

also auch:

$$0 < 1 - a_\nu \leq \frac{1}{1+a_\nu}$$

und somit

$$A_n < \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)} < \frac{1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

sodass, im Falle der Divergenz von Σa_ν, sich ergiebt:

$$A_\infty = 0$$

d. h. das obige Product *divergirt* in diesem Falle nach Null

II. Sei jetzt

$$A_n = \prod_1^n {}^{\nu} (1 + \varepsilon . a_\nu i)$$

wo ε beständig die positive oder beständig die negative Einheit bedeuten soll. Der absolute Betrag von A_n genügt alsdann der Gleichung

$$|A_n|^2 = \prod_1^n {}^{\nu} (1 + a_\nu^2)$$

und nimmt somit mit wachsendem n beständig zu. Daraus folgt aber, dass der absolute Betrag von A_∞ entweder bestimmt endlich und von Null verschieden (nämlich > 1) oder positiv unendlich sein muss. Insbesondere wird $|A_\infty|^2$ und daher auch A_∞ bestimmt und endlich — und zwar unabhängig von der Anordnung der Factoren — sobald Σa_ν^2 convergirt, mag dabei auch Σa_ν divergent sein. Dass hieraus noch nicht die Convergenz des unendlichen Productes A_∞ folgt, ist klar, indem hierzu ausser der Endlichkeit des absoluten Betrages von A_∞ auch die Bestimmtheit der Charakteristik erforderlich ist. Ich behaupte nun, dass diese Charakteristik, welche für

$$A_n = B_n + C_n i$$

dargestellt wird durch den Ausdruck:

$$\frac{B_n}{\sqrt{B_n^2 + C_n^2}} + \frac{C_n i}{\sqrt{B_n^2 + C_n^2}}$$

bei unendlich wachsendem n stets *unbestimmt* wird, wenn Σa_ν divergirt, mag nun Σa_ν^2 zu gleicher Zeit convergiren oder divergiren.*)

Sollte nämlich der obige Ausdruck für $n \overset{\prime}{=} \infty$ einen *bestimmten* Werth haben, so müsste zum mindesten *eine* der Grössen B_∞, C_∞, welche wegen $B_\infty^2 + C_\infty^2 = |A_\infty|^2 > 1$ niemals gleichzeitig verschwinden können, entweder einen festen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth haben oder in bestimmter Weise unendlich werden; es müsste sich demnach eine positive ganze Zahl N fixiren lassen, sodass für $n \geq N$ mindestens *eine* der Grössen B_n, C_n absolut genommen *über* einer festen endlichen Zahl g liegt und beständig dasselbe Vorzeichen besitzt. Um die Hinfälligkeit dieser Annahme zu beweisen, bilde ich:

$$A_{n+1} = B_{n+1} + C_{n+1} i = (B_n + C_n i)\,(1 + \varepsilon\, a_{n+1} i)$$

woraus:

(10a) $$B_{n+1} = B_n - \varepsilon\, a_{n+1} C_n,$$

(10b) $$C_{n+1} = C_n + \varepsilon\, a_{n+1} B_n$$

*) Die *blosse Divergenz* des betrachteten Productes für den Fall der Divergenz von Σa_ν liesse sich bei weitem kürzer beweisen; des folgenden wegen kommt es aber wesentlich auf die *besondere Art* dieser Divergenz an.

folgt, und weiter, wenn man hier für n der Reihe nach

$$n+1,\ n+2, \ldots n+\varrho-1$$

setzt und die resultirenden Gleichungen addirt:

$$\text{(11a)}\quad B_{n+\varrho} = B_n - \varepsilon(a_{n+1} C_n + a_{n+2} C_{n+1} + \cdots + a_{n+\varrho} C_{n+\varrho-1}),$$

$$\text{(11b)}\quad C_{n+\varrho} = C_n + \varepsilon(a_{n+1} B_n + a_{n+2} B_{n+1} + \cdots + a_{n+\varrho} B_{n+\varrho-1}).$$

Angenommen nun, es wäre für $n \geqq N$ B_n beständig positiv oder beständig negativ und läge, absolut genommen, stets oberhalb einer gewissen endlichen Zahl g. Dann will ich — um die beiden möglichen Fälle eines positiven und eines negativen B_n gemeinsam behandeln zu können — unter ε' die Einheit mit dem Vorzeichen von B_n verstehen, sodass also $\varepsilon' B_n$ für $n \geqq N$ wesentlich positiv und zwar

$$\varepsilon' B_n > g \quad (n \geqq N)$$

ist. Mit Berücksichtigung dieser Ungleichung würde die mit $\varepsilon\varepsilon'$ multiplicirte Ungleichung (11b), nämlich:

$$\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} = \varepsilon\varepsilon' C_n + \{a_{n+1}\varepsilon' B_n + a_{n+2}\varepsilon' B_{n+1} + \cdots + a_{n+\varrho}\varepsilon' B_{n+\varrho-1}\}$$

ergeben:

$$\text{(12)}\qquad \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} > \varepsilon\varepsilon' C_n + g \cdot s_{n+\varrho}$$

sofern, wie früher,

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\varrho} = s_{n,\varrho}$$

gesetzt wird.

Da aber die positive Grösse $s_{n,\varrho}$ — wie auch n fixirt sein mag — wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe Σa_ν durch Wahl von ϱ beliebig gross gemacht werden kann, so lässt sich ϱ so bestimmen, dass die Ungleichung (12) übergehen würde in:

$$\text{(13)}\qquad \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} > g'$$

wo g' eine beliebig grosse, endliche, positive Zahl bedeutet.

Da ferner nach Gleichung (10b) — wenn man daselbst $n+\varrho$ statt n schreibt —

$$\begin{aligned}\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho+1} &= \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} + a_{n+\varrho+1}\varepsilon' B_{n+\varrho} \\ &> \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho}\end{aligned}$$

so folgt daraus in Verbindung mit Ungleichung (13), dass allgemein:

$$\text{(14)}\qquad \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho+\varkappa} > \varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} > g' \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Schreibt man jetzt in Gleichung (11a) $n+\varrho$ statt n und σ statt ϱ, so nimmt dieselbe, wenn man noch mit ε' multiplicirt, die Form an:

$$\varepsilon' B_{n+\varrho+\sigma} = \varepsilon' B_{n+\varrho} - \{a_{n+\varrho+1}\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho} + \cdots + a_{n+\varrho+\sigma}\varepsilon\varepsilon' C_{n+\varrho+\sigma-1}\}$$

und folglich nach (14):

$$\varepsilon' B_{n+\varrho+\sigma} < \varepsilon' B_{n+\varrho} - g' \cdot s_{n+\varrho,\sigma}.$$

Nun kann man aber wieder $s_{n+\varrho,\sigma}$ durch Wahl von σ beliebig gross machen, jedenfalls also so gross, dass der absolute Betrag von $g'.s_{n+\varrho,\sigma}$ die positive Grösse $\varepsilon' B_{n+\varrho}$ beliebig viel übersteigt, und daher

$$\varepsilon' B_{n+\varrho+\sigma} < 0$$

wird. Das hiesse aber, dass $B_{n+\varrho+\sigma}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie B_n besitzen müsste — die Annahme, dass B_n für $n \geqq N$ das Zeichen nicht mehr wechselt, war somit unzulässig.

Durch die nämlichen Schlüsse lässt sich zeigen, dass die analoge Annahme für C_n auf den gleichen Widerspruch führen würde. Hierdurch erscheint dann zugleich auch *die* Möglichkeit ausgeschlossen, dass etwa die *eine* der beiden Grössen B_n, C_n für $n = \infty$ gegen Null convergiren könnte (in welchem Falle sie ja für $n \geqq N$ das Zeichen beliebig oft wechseln dürfte): denn alsdann müsste ja, nach dem gesagten, die *andere* für $n = \infty$ bestimmt endlich oder unendlich sein, was unmöglich ist.

Als Resultat dieser Betrachtung ergiebt sich somit der Satz:

Das unendliche Product $\Pi(1 + \varepsilon a_\nu i)$ — *wo* $a_\nu \geqq 0$, $\varepsilon = +1$ *oder* $= -1$ — *divergirt stets mit der Reihe* Σa_ν, *und zwar in der Weise, dass die Charakteristik unbestimmt wird* (gleichgültig ob der absolute Betrag endlich oder unendlich gross wird, was von der Convergenz, bezw. Divergenz der Reihe Σa_ν^2 abhängt).

III. Sei jetzt endlich

$$P_n = \prod_1^n{}_\nu (1 + \varepsilon a_\nu + \varepsilon' b_\nu i)$$

wo ε, ε' die positive oder die negative Einheit bedeuten sollen (sodass $\varepsilon' = \pm \varepsilon$), und die wesentlich positiven, für $\nu = \infty$ verschwindenden Grössen a_ν, b_ν wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit durchweg < 1 angenommen werden dürfen. Zerlegt man alsdann jeden Factor in folgender Weise:

$$1 + \varepsilon a_\nu + \varepsilon' b_\nu i = (1 + \varepsilon a_\nu)\left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right),$$

so wird die Charakteristik dieses Ausdruckes, weil $1 + \varepsilon a_\nu > 0$, nur von dem Theilfactor

$$\left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right)$$

abhängen, und es wird daher auch die Charakteristik des unendlichen Productes P_∞ ausschliesslich durch die Gesammtheit jener Theilfactoren bestimmt werden. Daraus folgt aber — nach II — dass die Charakteristik von P_∞ *unbestimmt* werden müsste, falls das Product

$$B_\infty = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu} i\right)$$

divergirte — d. h. die *Convergenz* dieses Productes ist sicherlich eine *nothwendige* Bedingung für diejenige von P_∞. Angenommen nun es convergire B_∞, so ergiebt sich, wenn gesetzt wird:

$$P_n = A_n \cdot B_n,$$

wo

$$A_n = \prod_1^n (1 + \varepsilon a_\nu), \qquad B_n = \prod_1^n \left(1 + \frac{\varepsilon' b_\nu}{1 + \varepsilon a_\nu}\, i\right)$$

als weitere *nothwendige* (und, wie man sofort sieht, dann auch hinreichende) Bedingung für die Convergenz von P_∞, dass auch noch A_∞ convergiren muss. Die Convergenz von A_∞, B_∞ erfordert aber (da die εa_ν unter sich und ebenso die $\frac{\varepsilon' b_\nu}{1+\varepsilon a_\nu}$ unter sich gleiches Zeichen haben, stets die Convergenz der beiden unendlichen Reihen Σa_ν, $\sum \frac{b_\nu}{1+\varepsilon a_\nu}$. Da aber die letztere Reihe wegen $\lim a_\nu = 0$ stets gleichzeitig mit Σb_ν convergirt und divergirt, so lässt sich die obige Bedingung auch ersetzen durch die Convergenz der Reihe $\Sigma(a_\nu + b_\nu i)$ oder auch $\Sigma(\varepsilon a_\nu + \varepsilon' b_\nu i)$, sodass man den folgenden Satz erhält:

Die nothwendige (und hinreichende) Bedingung für die Convergenz des Productes $\prod_1^\infty (1 + p_\nu + q_\nu i)$ — *wo die* p_ν *unter sich, desgl. die* q_ν *unter sich gleiches Vorzeichen besitzen, besteht in der Convergenz der Reihe* $\sum_1^\infty (p_\nu + q_\nu i)$ $\left(\textit{oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Reihen } \sum_1^\infty p_\nu,\ \sum_1^\infty q_\nu\right)$.

Da diese Reihen nicht anders als absolut und unbedingt convergiren können, und in Folge dessen nach § 3 das vorliegende Product ebenfalls absolut und unbedingt convergiren muss, so kann man hinzufügen:

Ein Product der betrachteten Art ist, wenn überhaupt, stets absolut und unbedingt convergent.

Anmerkung. Selbstverständlich lässt sich dieser Satz, auf welchem der Hauptschluss des folgenden Paragraphen beruht, etwas kürzer beweisen, sobald man von der trigonometrischen Form der complexen Grössen Gebrauch macht. Indessen wäre diese Abkürzung nur eine scheinbare, denn in Wahrheit würde hier an die Stelle der oben angestellten elementaren Betrachtung ein nicht unerhebliches Stück von der Theorie der trigonometrischen und cyklometrischen Functionen treten.

§ 5.

Die absolute Convergenz eines unendlichen Productes als **nothwendige** Bedingung für die unbedingte Convergenz.

Es sei

$$U = \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}(1+u_\nu)$$

ein *unbedingt* convergentes Product. Zerlegt man dann die unbegrenzte Reihe der Grössen u_ν in zwei derartige Reihen, deren Glieder resp. mit v_ν, w_ν bezeichnet werden mögen, und setzt

$$\prod_{1}^{n_1}{}^{\nu}(1+v_\nu) = V_{n_1}, \quad \prod_{1}^{n_2}{}^{\nu}(1+w_\nu) = W_{n_2},$$

so erheischt die *unbedingte* Convergenz des gegebenen Productes, dass

$$\lim V_{n_1} \cdot W_{n_2} = U$$

wird, wenn n_1 und n_2 *unabhängig von einander* ins Unendliche wachsen. Mit anderen Worten: es müssen sich dann zu jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ zwei ganze positive Zahlen N_1, N_2 fixiren lassen, dergestalt dass

$$|V_{n_1} W_{n_2} - U| < \delta$$

wenn:

$$n_1 \geqq N_1, \quad n_2 \geqq N_2$$

wird. In Folge dessen bestehen insbesondere auch die folgenden Ungleichungen:

$$|V_{N_1} W_\infty - U| < \delta,$$
$$|V_\infty W_{N_2} - U| < \delta$$

und es müssen somit, da V_{N_1}, W_{N_2} (als endliche Producte) und U (nach Voraussetzung) bestimmte endliche Grössen und von Null verschieden sind, V_∞, W_∞ ebenfalls bestimmte, von Null verschiedene Werthe besitzen, dergestalt, dass also die betreffenden unendlichen Producte *convergiren* müssen.

Da im übrigen auch die Convergenz eines solchen Productes, welches etwa durch Ausscheidung einer nur endlichen Anzahl von Factoren aus U_∞ gebildet werden kann, evident ist, so lässt sich jetzt zur näheren Charakterisirung der *unbedingten* Convergenz eines unendlichen Productes folgendes aussprechen:

Bei einem ***unbedingt*** *convergenten Producte convergirt auch jedes beliebig herausgehobene Partialproduct.**)

*) Es verhalten sich also in dieser Beziehung unbedingt convergirende Producte ganz analog, wie unbedingt convergirende Reihen. Diese Analogie wird

Halten wir jetzt die Annahme von der unbedingten Convergenz des Productes $\prod_{1}^{\infty}(1+u_{\nu})$ fest (wo die u_{ν} beliebige complexe Grössen bedeuten mögen), so lässt sich dasselbe im allgemeinsten Falle in vier Partialproducte von folgender Form zerlegen:

$$\prod_{1}^{\infty}(1+a_{\nu}^{(1)}+b_{\nu}^{(1)}i), \quad \prod_{1}^{\infty}(1-a_{\nu}^{(2)}+b_{\nu}^{(2)}i),$$

$$\prod_{1}^{\infty}(1+a_{\nu}^{(3)}-b_{\nu}^{(3)}i), \quad \prod_{1}^{\infty}(1-a_{\nu}^{(4)}-b_{\nu}^{(4)}i)$$

(wo die a_{ν}, b_{ν} wesentlich positiv sind, zum Theil auch Null sein können, und wo einzelne dieser Producte auch von endlicher Factorenzahl sein oder ganz fehlen können); jedes dieser Theilproducte muss dann nach dem eben gesagten convergiren. Hierzu ist aber nach § 4 *nothwendig* (und hinreichend), dass die Reihen

---

sofort hinfällig, sobald man auch solche Producte als *convergent* bezeichnet, welche den Grenzwerth Null haben, ohne dass ein Factor verschwindet.

Bedient man sich nämlich dieser Terminologie, so müsste man zuvörderst ein unendliches Product der Form $\Pi(1-a_{\nu})$ — wo die Reihe der positiven Grössen Σa_{ν} als divergent, $\lim a_{\nu}=0$ vorausgesetzt wird — auch als „*unbedingt convergent*“ bezeichnen: denn wie man die Factoren auch anordnet, man wird stets den Betrag des Productes einer hinlänglich grossen Anzahl von Factoren beliebig klein machen können. Uebrigens würde dieses Product auch noch die fragliche Eigenschaft unbedingt convergenter Producte haben, dass jedes herausgegriffene Theilproduct „convergirt“ — in diesem Falle natürlich gegen einen endlichen Werth oder gegen Null.

Sei nun aber ferner Σb_{ν} eine divergente Reihe positiver Grössen von der Beschaffenheit, dass Σb_{ν}^{2} convergirt, so divergirt nach § 4, II das unendliche Product $\Pi(1+b_{\nu}i)$ in der Weise, dass sein absoluter Betrag *unabhängig von der Anordnung der Factoren* endlich und bestimmt, die Charakteristik dagegen unbestimmt wird. Vereinigt man daher die beiden unendlichen Producte $\Pi(1-a_{\nu})$, $\Pi(1+b_{\nu}i)$ zu einem einzigen, so würde dieses *unabhängig von der Anordnung der Factoren* den Werth Null besitzen, also wiederum als „*unbedingt convergent*“ zu bezeichnen sein, *ohne* dass hier jedes Partialproduct convergirt, da ja, wie bemerkt, $\Pi(1+b_{\nu}i)$ innerhalb endlicher Grenzen oscillirt, also divergirt.

In der That, wenn:

$$\lim V_{n_1} W_{n_2} = 0$$

sein soll, wenn n_1, n_2 unabhängig von einander ins Unendliche wachsen, so braucht nur *einer* der beiden Grenzwerthe V_{∞}, W_{∞} zu verschwinden, während der andere überhaupt gar nicht bestimmt zu sein braucht, sondern innerhalb endlicher Grenzen oscilliren darf.

Diese Betrachtung lehrt, dass bei der Zulassung des Werthes Null für ein *convergentes* Product, der *wahre* Charakter der *unbedingten* Convergenz ganz verloren ginge.

$$\sum_1^\infty a_\nu^{(\varkappa)}, \quad \sum_1^\infty b_\nu^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

convergiren, und da deren Convergenz diejenige von $\sum_1^\infty |u_\nu|$ nach sich zieht, so ergiebt sich schliesslich:

Die nothwendige (und nach § 3 auch hinreichende) Bedingung für die unbedingte Convergenz des Productes $\prod_1^\infty {}_\nu (1+u_\nu)$ besteht in der Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty |u_\nu|$.

Oder auch, da nach § 3 die Convergenz von $\Sigma|u_\nu|$ die *absolute* Convergenz des gegebenen Productes zur Folge hat:

Jedes unbedingt convergente Product muss auch absolut convergiren.

Hiermit ist — in Verbindung mit dem Resultate des § 3 — die vollständige Identität zwischen *absoluter* und *unbedingter* Convergenz eines unendlichen Productes erwiesen: es findet also in dieser Hinsicht vollständige Analogie mit den unendlichen Reihen statt.

Zusatz. Wurde vorhin erkannt, dass die Convergenz *jedes* herausgegriffenen Partialproductes eine *nothwendige* Bedingung für die *unbedingte* Convergenz eines unendlichen Productes bildet, so zeigt die zuletzt angestellte Betrachtung nebenbei auch noch, dass diese Bedingung sich stets auch als *hinreichend* erweist.

§ 6.

Hülfssätze über gewisse endliche Producte.

Es seien $a_1, a_2, \ldots a_m$ beliebige positive Grössen, so ist:

$$\prod_1^m {}_\nu (1+a_\nu) = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(m)}$$

wenn $S^{(\varkappa)}$ die Summe aller Combinationen von $a_1, a_2, \ldots a_m$ zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Classe bezeichnet. Setzt man:

$$\sum_1^m a_\nu = s_m$$

sodass also: $s_m = S^{(1)}$, so hat man für $\varkappa \geqq 2$ offenbar:

$$s_m^\varkappa > \varkappa!\, S^{(\varkappa)}$$

da $s_m^\varkappa$ jedes Glied von $S^{(\varkappa)}$ $\varkappa!$ mal ausser anderen positiven Gliedern enthält. In Folge dessen hat man:

$$(15) \qquad \prod_1^m {}_\nu (1+a_\nu) < 1 + \frac{1}{1!} s_m + \frac{1}{2!} s_m^2 + \cdots + \frac{1}{m!} s_m^m.$$

Ferner ist, wenn b einen positiven echten Bruch, p eine beliebig grosse positive ganze Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-b} &= 1 + b + b^2 + \cdots + b^p + \frac{b^{p+1}}{1-b} \\ &> 1 + b + b^2 + \cdots + b^p \\ &> 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^p}{p!}.\end{aligned}$$

Seien nun $b_1, b_2, \ldots b_n$ lauter positive echte Brüche, so folgt zunächst, wenn man $\frac{1}{1-b_1}$ und $\frac{1}{1-b_2}$ unter Anwendung der letzten Ungleichung multiplicirt und die resultirende Ungleichung noch dadurch verstärkt, dass man die Glieder von höherer als der p^{ten} Dimension fortlässt:

$$\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)} > 1 + \frac{1}{1!}(b_1+b_2) + \frac{1}{2!}(b_1+b_2)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}(b_1+b_2)^p$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens:

$$\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)\ldots(1-b_n)} > 1 + \frac{1}{1!}t_n + \frac{1}{2!}t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!}t_n^p$$

wenn:

$$\sum_1^n b_\nu = t_n$$

gesetzt wird, sodass also:

$$\prod_1^n (1-b_\nu) < \frac{1}{1 + \frac{1}{1!}t_n + \frac{1}{2!}t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!}t_n^p} \tag{16}$$

(für jede beliebige positive ganze Zahl p). Durch Verbindung der Ungleichungen (15), (16) ergiebt sich nun:

$$\prod_1^m (1+a_\nu) \prod_1^n (1-b_\nu) < \frac{1 + s_m + \frac{1}{2!}s_m^2 + \cdots + \frac{1}{m!}s_m^m}{1 + t_n + \frac{1}{2!}t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!}t_n^p}. \tag{17}$$

Ist nun $s_m \leq t_n$ d. h.

$$\sum_1^m a_\nu - \sum_1^n b_\nu \leq 0$$

so folgt, da man ja $p > m$ nehmen kann, dass:

$$\prod_1^m (1+a_\nu) \prod_1^n (1-b_\nu) < 1. \tag{18}$$

Da ferner:

$$\frac{1}{1+a_\nu} = 1 - \frac{a_\nu}{1+a_\nu}, \qquad \frac{1}{1-b_\nu} = 1 + \frac{b_\nu}{1-b_\nu}$$

so ergiebt sich mit Benutzung von (18), dass:

$$\frac{1}{\prod_1^m{}_\nu (1+a_\nu) \prod_1^n{}_\nu (1-b_\nu)} < 1$$

wenn:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{b_\nu}{1-b_\nu} - \sum_1^m{}_\nu \frac{a_\nu}{1-a_\nu} \leqq 0$$

d. h. man hat:

$$\prod_1^m{}_\nu (1+a_\nu) \prod_1^n{}_\nu (1-b_\nu) > 1$$

wenn:

$$\sum_1^m{}_\nu \frac{a_\nu}{1+a_\nu} - \sum_1^n{}_\nu \frac{b_\nu}{1-b_\nu} \geqq 0.$$

und man erhält somit den folgenden Satz:

(I) *Sind* $c_1, c_2 \ldots c_m$ *positive und negative Grössen von der Beschaffenheit, dass* $1 + c_\nu > 0$ *ist, so wird:*

$$\prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu) \begin{cases} < 1, & \textit{wenn:} \sum_1^n{}_\nu c_\nu \leqq 0, \\ > 1, & \textit{wenn:} \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \geqq 0.\text{*)} \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man $\sum_1^n{}_\nu c_\nu = s_n$, so ergiebt sich — wegen $\sum_1^n{}_\nu c_\nu - s_n = 0$ — sobald $1 - s_n > 0$ d. h. sobald s_n *beliebig negativ* oder ein *positiver echter Bruch* ist:

$$\prod_1^n{}_\nu (1+c_\nu)(1-s_n) < 1.$$

Es gilt mithin die Beziehung:

*) Setzt man $1 + c_\nu = p_\nu$, so nimmt dieser Satz die folgende Form an: Sind die positiven Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$ nicht sämmtlich $= 1$, so hat man stets

$$p_1 p_2 \ldots p_n \begin{cases} < 1, & \text{wenn: } \sum_1^n{}_\nu p_\nu \leqq n, \\ > 1, & \text{wenn: } \sum_1^n{}_\nu p_\nu^{-1} \leqq n. \end{cases}$$

$$(19)\qquad \prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{1-s_n} \quad \text{falls:} \quad -\infty < s_n = \sum_1^n c_\nu < 1.$$

(Diese Beziehung stellt eine nicht unerhebliche Erweiterung der beiden bekannten Specialfälle dar:

$$\prod_1^n{}^{\nu}(1-a_\nu) < \frac{1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} \quad \prod_1^n{}^{\nu}(1+a_\nu) < \frac{1}{1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)},$$

wo die a_ν positive echte Brüche bedeuten und im zweiten Falle auch $\sum_1^n a_\nu$ ein echter Bruch sein muss).

Weiss man nur, dass s_n die positive Zahl g nicht überschreitet, sodass also $s_n \leqq g$, so hat man sicher

$$\sum_1^n c_\nu - g \leqq 0$$

oder auch, wenn m eine beliebige, oberhalb g gelegene ganze Zahl bedeutet:

$$\sum_1^n{}^{\nu} c_\nu - m \cdot \frac{g}{m} \leqq 0.$$

In Folge dessen ergiebt sich aber wiederum:

$$\prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu)\left(1-\frac{g}{m}\right)^m < 1$$

d. h. es wird:

$$(19\text{a})\qquad \prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu) < \left(\frac{m}{m-g}\right)^m \quad \text{falls:} \quad s_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu \leqq g < m,$$

und insbesondere, wenn g ein ächter Bruch oder Null ist, sodass $m = 1$ gesetzt werden kann:

$$(19\text{b})\qquad \prod_1^n{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{1-g} \quad \text{falls:} \quad s_n = \sum_1^n{}^{\nu} c_\nu \leqq g < 1.$$

Um auch die zweite Ungleichung des Satzes (I) in ähnlicher Weise zu verwerthen, setze man:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = S_n = -\frac{t_n}{1+t_n},$$

sodass also:

$$t_n = -\frac{S_n}{1+S_n}$$

alsdann *folgt* aus:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} + \frac{t_n}{1+t_n} = 0$$

dass:

$$\prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu)(1+t_n) > 1 \quad \text{falls:} \quad 1+t_n > 0\,.$$

Da aber $1 + t_n = \frac{1}{1+S_n} > 0$ wird, wenn $1 + S_n > 0$, so ergiebt sich schliesslich:

$$(20) \quad \prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu) > 1 + S_n, \quad \text{falls:} \quad -1 < S_n = \sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} < +\infty.$$

Weiss man nur soviel, dass S_n unter eine gewisse Zahl $(-G)$ nicht hinabsinkt (wo $G \geqq 0$), sodass also sicher:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} + G = \sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} + M \cdot \frac{\frac{G}{M-G}}{1+\frac{G}{M-G}} \geqq 0$$

(wo M eine ganze positive Zahl $> G$ bedeuten soll), so ergiebt sich:

$$\prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu)\left(1+\frac{G}{M-G}\right)^M > 1$$

d. h. so ist:

$$(20\text{a}) \quad \prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu) > \left(\frac{M-G}{M}\right)^M \quad \text{falls:} \quad \sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \geqq -G > -M$$

und speciell, wenn G ein echter Bruch oder Null ist:

$$(20\text{b}) \quad \prod_1^n{}^{\nu} (1+c_\nu) > 1 - G \qquad \text{falls:} \quad \sum_1^n{}^{\nu} \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \geqq -G > -1\,.$$

Für die im folgenden Paragraphen anzustellenden Convergenz-Untersuchungen reichen die soeben entwickelten Relationen, welche sämmtlich auf der Ungleichung (17) basiren, noch nicht vollständig aus. Vielmehr erscheint es zweckmässig, die obere Grenze, welche durch Ungleichung (17) für ein Product der betrachteten Art statuirt wird, noch in folgender Weise zu erniedrigen.

Aus der Identität:

$$(1+a)\left(1+\frac{a^2}{4}\right) = 1 + a + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{4}$$

folgt für $|a| < 1$:

$$(1+a)\left(1+\frac{a^2}{4}\right) < 1 + a + \frac{a^2}{2}$$

also:

$$1+a < \frac{1+a+\frac{a^2}{2}}{1+\frac{a^2}{4}}.$$

Sind jetzt $a_1, a_2, \ldots a_m$ positive echte Brüche, so ergiebt sich zunächst:

$$(1+a_1)(1+a_2) < \frac{1+(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)+\frac{1}{2}(a_1^2a_2+a_1a_2^2)+\frac{1}{4}a_1^2a_2^2}{1+\frac{1}{4}(a_1^2+a_2^2)+\frac{1}{16}a_1^2a_2^2}$$

und wenn jetzt $\sum_1^{\varkappa}{}_\nu a_\nu = s_\varkappa$, $\sum_1^{\varkappa}{}_\nu a_\nu^2 = \sigma_\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \cdots m)$ gesetzt wird — a fortiori:

$$(1+a_1)(1+a_2) < \frac{1+s_2+\frac{1}{2!}s_2^2+\frac{1}{3!}s_2^3+\frac{1}{4!}s_2^4}{1+\frac{1}{4}\sigma_2}.$$

Da nun allgemein

$$\left(1+s_\varkappa+\frac{1}{2!}s_\varkappa^2+\cdots+\frac{1}{p!}s_\varkappa^p\right)\left(1+a_{\varkappa+1}+\frac{1}{2}a_{\varkappa+1}^2\right)$$
$$< 1+s_{\varkappa+1}+\frac{1}{2!}s_{\varkappa+1}^2+\cdots+\frac{1}{(p+2)!}s_{\varkappa+1}^{p+2}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{4}\sigma_\varkappa\right)\left(1+\frac{1}{4}a_{\varkappa+1}^2\right)$$
$$= 1+\frac{1}{4}(\sigma_\varkappa+a_{\varkappa+1}^2)+\frac{1}{16}\sigma_\varkappa a_{\varkappa+1}^2 > 1+\frac{1}{4}\sigma_{\varkappa+1},$$

so ergiebt sich:

$$\prod_1^m{}_\nu (1+a_\nu) < \frac{1+s_m+\frac{1}{2!}s_m^2+\cdots+\frac{1}{(2m)!}s_m^{2m}}{1+\frac{1}{4}\sigma_m}. \tag{21}$$

Man hat ferner für jeden pos. ächten Bruch b, bei beliebigem, pos. ganzzahligem p:

$$\frac{1}{1-b} > 1+b+b^2+\cdots+b^{p+2}$$
$$> \left(1+b+\frac{b^2}{2!}+\cdots+\frac{b^p}{p!}\right)\left(1+\frac{b^2}{2}\right)$$

und daher:

$$\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n)}$$
$$> \left(1+t_n+\frac{1}{2!}t_n^2+\cdots+\frac{1}{p!}t_n^p\right)\left(1+\frac{\tau_n}{2}\right),$$

wenn $b_1, b_2, \ldots b_n$ pos. ächte Brüche bedeuten, und $\sum_1^n{}_\nu b_\nu = t_n$, $\sum_1^n{}_\nu b_\nu^2 = \tau_n$ gesetzt wird. Daraus ergiebt sich aber, dass

$$(22)\qquad \prod_1^n {}_\nu (1 - b_\nu) < \frac{1}{1 + t_n + \frac{1}{2!} t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!} t_n^p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \tau_n}$$

und in Verbindung mit Ungl. (21):

$$(23)\qquad \prod_1^m {}_\nu (1 + a_\nu) \cdot \prod_1^n {}_\nu (1 - b_\nu)$$

$$< \frac{1 + s_m + \frac{1}{2!} s_m^2 + \cdots + \frac{1}{(2m)!} s_m^{2m}}{1 + t_n + \frac{1}{2!} t_n^2 + \cdots + \frac{1}{p!} t_n^p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \sigma_m\right)\left(1 + \frac{1}{2} \tau_n\right)}.$$

Ist nun wiederum $s_m \leqq t_n$, so erhält man durch Wahl der beliebig gross anzunehmenden pos. ganzen Zahl $p > 2m$:

$$(24)\qquad \prod_1^m {}_\nu (1 + a_\nu) \prod_1^\nu {}_\nu (1 - b_\nu)$$

$$< \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \sigma_m\right)\left(1 + \frac{1}{2} \tau_n\right)} < \frac{1}{1 + \frac{1}{4} (\sigma_m + \tau_n)}$$

und man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

(II) *Sind* $c_1, c_2, \ldots c_n$ *positive und negative ächte Brüche und* $\sum_1^n {}_\nu c_\nu{}^2 = \sigma_n$, *so hat man stets:*

$$(25)\qquad \prod_1^n {}_\nu (1 + c_\nu) < \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \sigma_n} \quad \textit{wenn:} \quad \sum_1^n {}_\nu c_\nu \leqq 0.$$

Hieraus lässt sich wiederum noch schliessen — falls

$$\sum_1^n {}_\nu c_\nu \leqq g < m$$

(wo g positiv und m eine ganze Zahl) — dass:

$$\prod_1^n {}_\nu (1 + c_\nu) \left(1 - \frac{g}{m}\right)^m < \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\sigma_n + m \left(\frac{g}{m}\right)^2\right)} < \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \sigma_n}$$

also:

$$(25\text{a})\qquad \prod_1^n {}_\nu (1 + c_\nu) < \frac{1}{\left(1 - \frac{g}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{4} \sigma_n\right)}$$

und daher speciell, wenn g ein ächter Bruch ist:

$$(25\text{b})\qquad \prod_1^n {}_\nu (1 + c_\nu) < \frac{1}{(1 - g)\left(1 + \frac{1}{4} \sigma_n\right)} \quad \left(\left| \sum_1^n {}_\nu c_\nu \right| < g < 1\right).$$

§ 7.

Bedingte Convergenz reeller Producte.

Sind Σa_ν, Σb_ν zwei divergente unendliche Reihen, deren Glieder für $\nu = \infty$ der Null zustreben, so kann man nach einem bekannten Riemann'schen Satze aus den Grössen a_ν und den negativ genommenen Grössen b_ν unendlich viele *bedingt* convergirende Reihen mit beliebig vorgeschriebener Summe S bilden. Mit anderen Worten: man kann zwei Systeme von niemals abnehmenden, positiven, ganzen Zahlen m und m' einander so zuordnen, dass $\lim \left\{ \sum_1^m {}_\nu\, a_\nu - \sum_1^{m'} {}_\nu\, b_\nu \right\} = S$ für $m = \infty$, $m' = \infty$.

Da unter den bezüglich der Grössen a_ν, b_ν gemachten Voraussetzungen das Product $\prod_1^\infty {}_\nu\,(1 + a_\nu)$ nach ∞ und $\prod_1^\infty {}_\nu\,(1 - b_\nu)$ nach 0 divergirt, so lässt sich offenbar durch ein — dem Beweise des oben angeführten Riemann'schen Satze völlig analoges Verfahren zeigen, dass man durch passende Einschaltung von Factoren der Form $(1 - b_\nu)$ in ein Product von Factoren $(1 + a_\nu)$ ein *endliches* Product bilden kann, dessen Werth sich von einer beliebig vorgeschriebenen Zahl P beliebig wenig unterscheidet und zwar um so weniger, je weiter man den gedachten Process fortsetzt. Darnach kann man sagen, dass bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens ein aus Factoren der Form $(1 + a_\nu)$, $(1 - b_\nu)$ zusammengesetztes *unendliches* Product entsteht, welches *in dieser Anordnung*, also „*bedingt*" gegen den Werth P convergirt. Bezeichnet man also die Folge der Grössen a_ν, $- b_\nu$ in der betreffenden Anordnung mit c_1, c_2, c_3, ... und ist dann etwa:

$$\prod_1^n {}_\nu\,(1 + c_\nu) = \prod_1^m {}_\nu\,(1 + a_\nu) \cdot \prod_1^{m'} {}_\nu\,(1 - b_\nu), \quad \prod_1^\infty {}_\nu\,(1 + c_\nu) = P,$$

so kann man den Inhalt des eben Gesagten auch folgermassen formuliren: es lassen sich stets der unbegrenzten Reihe beständig abnehmender und schliesslich gegen Null convergirender positiver Zahlen $\delta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ zwei Reihen niemals abnehmender, mit $\varkappa$ über alle Grenzen wachsender, pos. ganzer Zahlen $m_\varkappa$, $m_\varkappa'$ zuordnen, dergestalt dass:

$$\left| \prod_1^{m_\varkappa} {}_\nu\,(1 + a_\nu) \prod_1^{m_\varkappa'} {}_\nu\,(1 - b_\nu) - P \right| < \delta_\varkappa$$

also

$$\lim_{\varkappa = \infty} \cdot \prod_1^{m_\varkappa} {}_\nu\,(1 + a_\nu) \prod_1^{m_\varkappa'} {}_\nu\,(1 - b_\nu) = P$$

wird.

Es entsteht nun die Frage: Entspricht hierbei einer solchen Anordnung der Grössen a_ν, $-b_\nu$, für welche die nach der oben eingeführten Bezeichnung durch $\sum_1^\infty{}_\nu\, c_\nu$ dargestellte Reihe *convergirt*, auch stets eine *convergente* Factorenanordnung $\prod_1^\infty{}_\nu\,(1+c_\nu)$? Die Antwort hierauf giebt der folgende — von Cauchy*) mit Hülfe der logarithmischen Reihe bewiesene — Satz, der an dieser Stelle mit Hülfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehungen rein elementar sich ergeben wird:

Convergirt die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu\, c_\nu$ bedingt in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung, so convergirt $\prod_1^\infty{}_\nu\,(1+c_\nu)$ oder divergirt nach Null, je nachdem $\sum_1^\infty{}_\nu\, c_\nu^2$ convergirt oder divergirt.

Beweis: Es werde zunächst angenommen, dass ausser der Reihe Σc_ν, auch die Reihe Σc_ν^2 — letztere eo ipso *unbedingt* — *convergire:* alsdann convergirt auch die Reihe $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$ und folglich auch:

$$\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum c_\nu - \sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$$

(letztere Reihe natürlich wieder nur bedingt). In Folge dessen lässt sich, wenn ε einen beliebig klein vorzuschreibenden, pos. ächten Bruch bezeichnet, eine Zahl N so bestimmen, dass für jede pos. ganze Zahl ϱ:

$$\left| \sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu\, c_\nu \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu\, \frac{c_\nu}{1+c_\nu} \right| < \varepsilon, \quad (n \geqq N)$$

und man findet daher mit Benützung der Ungleichungen (19b), (20b):

$$\frac{C_{n+\varrho}}{C_n} = \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}_\nu\,(1+c_\nu) \begin{cases} < \frac{1}{1-\varepsilon} \left(= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1 \right) \\ > 1 - \varepsilon \end{cases} \quad (n \geqq N)$$

sodass:

$$-\varepsilon < \frac{C_{n+\varrho}}{C_n} - 1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (n \geqq N)$$

wird, und somit das unendliche Product $C_\infty = \prod_1^\infty{}_\nu\,(1+c_\nu)$ *convergirt.*

---

*) Cours d'Anal. algébr. p. 563.

Sei zweitens Σc_ν^2 *divergent*, so wird jetzt auch $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ divergent, und es bleibt daher (in Folge der Convergenz von Σc_ν) nur die erste der eben benützten Ungleichungen bestehen, nämlich:

$$\frac{C_{n+\varrho}}{C_n} = \prod_{n+1}^{n+\varrho}{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (n \geqq N),$$

woraus sich nur so viel ersehen lässt, dass das betrachtete unendliche Product nicht ins Unendliche wachsen kann: es könnte dann immer noch convergiren, innerhalb endlicher Grenzen oscilliren oder nach Null divergiren. Zum Beweise, dass stets der letzte Fall eintritt, dient der Satz (II) des vorigen Paragraphen.

Hat man nämlich zunächst die Zahl N wie erforderlich bestimmt, so lässt sich jetzt noch eine Zahl R als untere Grenze für ϱ bestimmen, so dass:

$$\sum_{n+1}^{n+\varrho}{}^{\nu} c_\nu^2 > 4A \quad (\varrho \geqq R)$$

wird, wo A in Folge der Divergenz von Σc_ν^2 *beliebig gross* angenommen werden kann. Alsdann erhält man aber unter Anwendung der Ungleichung (25b):

$$\prod_{n+1}^{n+\varrho}{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{(1-\varepsilon)(1+A)}$$

und da die rechte Seite durch Wahl von A d. h. schliesslich durch Wahl von ϱ beliebig klein wird, so folgt dass $\prod_{1}^{\infty}{}^{\nu}(1+c_\nu)$ nach Null divergirt. —

Zusatz I. Die *Divergenz* des betrachteten Productes *nach Null* bleibt auch bestehen, wenn Σc_ν^2 *divergirt* und Σc_ν so *oscillirt*, dass die *obere* Unbestimmtheitsgrenze einen endlichen Werth hat (NB. die *untere* darf dagegen beliebig, auch negativ unendlich sein). Da man nämlich in diesem Falle für jedes endliche oder unendliche n setzen kann

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu} c_\nu \leqq g \qquad (g \geqq 0),$$

so ergiebt sich nach Ungl. (25a):

$$\prod_{1}^{n}{}^{\nu}(1+c_\nu) < \frac{1}{\left(1-\frac{g}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{4}\sigma\right)} \qquad \left(\sigma_n = \sum_{1}^{n}{}^{\nu} c_\nu^2\right),$$

wo m eine beliebige, pos. ganze Zahl $> g$ bedeutet: die rechte Seite dieser Ungleichung wird beliebig klein, wenn σ_n durch Wahl von n gross genug gemacht wird, mithin hat man wiederum:

$$\prod_1^\infty {}^\nu (1+c_\nu) = 0.$$

Wenn andererseits Σc_ν^2 *convergirt* und Σc_ν wieder so *oscillirt*, dass für jedes n

$$\sum_1^n {}^\nu c_\nu \leqq g$$

gesetzt werden kann, so lehrt die eben benützte Ungleichung (25a) im wesentlichen nichts anderes, als die einfachere Ungleichung (19a):

$$\prod_1^n {}^\nu (1+c_\nu) < \left(\frac{m-g}{m}\right)^m \qquad \text{(wo } m \text{ eine pos. ganze Zahl} > g)$$

nämlich, dass für dieses Product eine endliche *obere* Grenze existirt, während die *untere* Grenze offenbar auch Null sein kann.

Besitzt jedoch $\sum_1^n {}^\nu c_\nu$ auch eine endliche *untere* Grenze, und beachtet man, dass dann auch:

$$\sum_1^n {}^\nu \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum_1^n {}^\nu c_\nu - \sum_1^n {}^\nu \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu} \geqq -G \quad (G \geqq 0)$$

gesetzt werden kann, so folgt aus Ungl. (20a), dass

$$\prod_1^n {}^\nu (1+c_\nu) > \left(\frac{M-G}{M}\right)^M \qquad \text{(wo } M \text{ eine pos. ganze Zahl} > G)$$

d. h. das Product besitzt in diesem Falle eine *von Null verschiedene untere* Grenze.

Zusatz II. Auch wenn die Reihe Σc_ν divergirt, lassen sich gewisse Criterien bezüglich des Verhaltens von $\Pi(1+c_\nu)$ angeben (natürlich immer unter der Voraussetzung dass $\lim c_\nu = 0$). Divergirt nämlich die Reihe Σc_ν nach $-\infty$, so kann man eine pos. ganze Zahl N so bestimmen, dass für ein beliebig gross gegebenes positives A:

$$s_n = \sum_1^n {}^\nu c_\nu < -A \quad (n \geqq N)$$

wird. Alsdann ergiebt sich aber nach Ungl. (19), dass:

$$\prod_1^n {}^\nu (1+c_\nu) < \frac{1}{1-s_n} < \frac{1}{1+A} \quad (n \geqq N)$$

durch Wahl von A bezw. von n beliebig klein gemacht werden kann. Das unendliche Product $\prod_1^\infty {}^\nu (1+c_\nu)$ *divergirt* also in diesem Fall *nach Null*.

Ist dagegen $\sum_1^\infty c_\nu = +\infty$, so betrachte man zunächst

$$\frac{1}{\prod_1^n (1+c_\nu)} = \prod_1^n \left(1 - \frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right).$$

Da hier das rechts stehende Product für $n = \infty$ nach dem eben Gesagten gegen Null divergiren wird, sobald

$$\sum_1^\infty \left(-\frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right) = -\infty,$$

so folgt, dass $\prod_1^\infty (1+c_\nu)$ *nach Unendlich divergirt*, sobald ausser der Reihe $\sum_1^\infty c_\nu$ auch noch die Reihe $\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ nach $+\infty$ divergirt. Hierzu ist vermöge der Beziehung:

$$\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum_1^\infty c_\nu - \sum_1^\infty \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$$

hinreichend (aber nicht nothwendig), dass die Reihe $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$, also schliesslich die Reihe Σc_ν^2 *convergirt.*

Ist hingegen Σc_ν^2, also auch $\sum \frac{c_\nu^2}{1+c_\nu}$ *divergent* (und zwar dann stets $= +\infty$), so *kann* die Reihe $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$, wie die obige Zerlegung lehrt, zwar ebenfalls noch *nach* $+\infty$ *divergiren*, sie kann aber auch *convergiren*, *oscilliren* und sogar *nach* $-\infty$ *divergiren*. Hierbei wird nun — im Falle der *Convergenz* und der *Oscillation* mit endlicher *unterer* Unbestimmtheitsgrenze — das betrachtete Product wieder *nach* $+\infty$ *divergiren* (der erste Theil dieser Behauptung folgt aus dem Hauptsatze dieses Paragraphen, der zweite aus Zusatz I, wenn man nur beachtet, dass die zunächst in Betracht kommende *obere* Unbestimmtheitsgrenze von $\sum\left(-\frac{c_\nu}{1+c_\nu}\right)$ identisch mit der *unteren* von $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ ist). Wenn jedoch $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ die *untere* Unbestimmtheitsgrenze $-\infty$ besitzt oder auch *nach* $-\infty$ *divergirt*, so lässt sich über den Werth von $\Pi(1+c_\nu)$ allgemein nichts bestimmtes aussagen: das Product kann dann noch jeden Werth, einschliesslich von 0 und ∞, annehmen, bezw. innerhalb der Grenzen 0 und ∞ oscilliren.

Es erscheint vielleicht nicht überflüssig, an einem Beispiele zu zeigen, dass, unter der Voraussetzung $\Sigma c_\nu = +\infty$, die Reihe $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu}$ wirklich auch *convergiren* oder *nach* $-\infty$ *divergiren* kann, und dass insbesondere in diesem letzten Falle der Werth des fraglichen Productes $\Pi(1+c_\nu)$ wiederum noch ∞, endlich oder 0 sein kann.

Ich setze

$$c_{2\nu-1} = \frac{1}{\sqrt{\nu}-x}, \quad c_{2\nu} = -\frac{1}{\sqrt{\nu}+x} \qquad (x>0)$$

und wähle, um im Falle eines ganzzahligen x den Werth $\nu = x^2$ (für welchen $c_{2\nu-1} = \infty$ werden würde) von vornherein auszuschliessen, als niedrigsten Summationsindex eine Zahl $m > x^2$. Alsdann hat man:

$$\sum_m^\infty c_\nu = \sum_m^\infty \left\{\frac{1}{\sqrt{\nu}-x} - \frac{1}{\sqrt{\nu}+x}\right\} = \sum_m^\infty \frac{2x}{\nu - x^2} = +\infty$$

und ferner:

$$\sum_m^\infty \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = \sum_m^\infty \left\{\frac{1}{\sqrt{\nu}-x+1} - \frac{1}{\sqrt{\nu}+x-1}\right\} = \sum_m^\infty \frac{2(x-1)}{\nu-(x-1)^2}.$$

Diese letztere Reihe divergirt nun, wie die Reihe Σc_ν nach $+\infty$, sobald $x > 1$; sie convergirt hingegen (nach Null) für $x = 1$, und sie divergirt nach $-\infty$ für $x < 1$. In den beiden ersten Fällen wird also das correspondirende unendliche Product

$$P = \prod_m^\infty \left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{\nu}-x}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\nu}+x}\right)\right\}$$

nach $+\infty$ divergiren, und man hat somit zunächst:

$$P = \infty \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

Um nun auch den Werth dieses Productes für den dritten Fall ($x<1$, $\sum \frac{c_\nu}{1+c_\nu} = -\infty$) zu bestimmen, bringe man dasselbe auf die Form:

$$P = \prod_m^\infty \frac{\nu-(1-x)^2}{\nu-x^2} = \prod_m^\infty \left(1+\frac{2x-1}{\nu-x^2}\right)$$

und man erkennt sofort, dass gerade wie früher:

$$P = \infty \quad \text{für} \quad x > \tfrac{1}{2}$$

wird, dass dagegen:

$$P = 1 \quad \text{für} \quad x = \tfrac{1}{2}$$

(d. h. das Product *convergirt* in diesem Falle, obschon die entsprechende Reihe *divergirt*) und schliesslich:

$$P = 0 \quad \text{für} \quad x < \tfrac{1}{2}$$

sich ergiebt. —

Berlin, im April 1888.