Über die Zerlegung der ganzen Zahlen in sieben Kuben.

Von

W. S. Baer in Göttingen.

Einleitung: Herr Wieferich*) hat bewiesen, daß sich jede ganze positive Zahl als Summe von höchstens neun Kuben ganzer positiver Zahlen darstellen läßt; diese Anzahl läßt sich nicht weiter verkleinern, da z. B. die Zahl 23 mindestens neun Kuben erfordert. Dieses Verhalten zeigen aber, wie Herr Landau**) nachwies, jedenfalls nur endlich viele Zahlen: von einer gewissen Stelle an genügen für jede Zahl bereits acht Kuben. Insbesondere besitzt also die Anzahl***) $C_8(x)$ der ganzen positiven Zahlen $\leqq x$, die in acht oder weniger Kuben zerlegbar sind, gewiß die Größenordnung x in dem Sinne, daß der Quotient $\frac{C_8(x)}{x}$ von einem gewissen x an unterhalb einer endlichen und oberhalb einer positiven Schranke verbleibt. Bisher war nicht bekannt, ob das entsprechende auch für die Anzahl $C_7(x)$ richtig ist; ich weise nun in meiner demnächst erscheinenden Dissertation†) im Kapitel über Kuben unter anderem die Größenordnung x von $C_7(x)$ nach, und ich will hier in dieser kleinen Arbeit, um eine Probe der Beweismethoden und Resultate meiner Dissertation zu geben, einen in dieser Formulierung dort nicht enthaltenen Satz — der übrigens noch etwas mehr als diese Größenordnung x besagt — (für einen Leser, der jene größere Arbeit nicht zu kennen braucht, direkt) beweisen.

Satz: *Die Zahlen* $4096 \cdot u$, *wo* $u > 0$ *ungerade ist, lassen sich in sieben Kuben zerlegen, deren sämtliche sieben Basen eine beliebig vorgegebene positive Zahl* g *von einer Stelle an, d. h. für alle* $u > u_0 = u_0(g)$, *übersteigen.*††)

*) Math. Ann. 66 (1909), S. 95—101.

**) Math. Ann. 66 (1909), S. 102—105.

***) Allgemein bezeichne $C_\nu(x)$ die Anzahl der ganzen positiven Zahlen $\leqq x$, die in ν oder weniger Kuben zerlegbar sind.

†) Beiträge zum Waringschen Problem, Diss. Göttingen, 1913.

††) Der Satz gilt natürlich auch für alle Zahlen $4096 \cdot c^3 \cdot u$, wo $c \geqq 1$ ganz ist.

Beweis: Sei zunächst

$$u \geqq (6 \cdot 2^{15} + 2^6) \cdot 2^3 = 1\,573\,376, \tag{1}$$

so gibt es zu jeder solchen ungeraden Zahl u eine ganze Zahl $\nu \geqq 1$, sodaß

$$(6 \cdot 2^{15} + 2^6) \cdot 2^{3\nu} \leqq u < (6 \cdot 2^{15} + 2^6) \cdot 2^{3(\nu+1)}$$

ist; wird

$$u - 6 \cdot 2^{15} \cdot 2^{3\nu} = t \tag{2}$$

gesetzt, so genügt diese ungerade Zahl t den Ungleichungen

$$2^{3\nu+6} \leqq t < (7 \cdot 6 \cdot 2^{15} + 8 \cdot 2^6) \cdot 2^{3\nu} < 43 \cdot 2^{15} \cdot 2^{3\nu} = 43 \cdot 2^{3\nu+15}.$$

Weiter sei der reelle Wert von

$$\sqrt[3]{t} = \varrho$$

gesetzt, so wird wegen $\varrho = \sqrt[3]{t} \geqq 2^{\nu+2}$

$$\begin{aligned} 0 = t - \varrho^3 &\leqq t - [\varrho]^3 < t - ([\varrho] - (3 \cdot 2^\nu - 1))^3 < t - (\varrho - 1 - 3 \cdot 2^\nu + 1)^3 \\ &= t - \varrho^3 + 3 \cdot 3 \cdot 2^\nu \cdot \varrho^2 - 3 \cdot 9 \cdot 2^{2\nu} \cdot \varrho + 27 \cdot 2^{3\nu} \\ &= 9 \cdot 2^\nu \cdot \sqrt[3]{t^2} - 27 \cdot 2^{2\nu} \cdot (\varrho - 2^\nu) < 9 \cdot 2^\nu \cdot \sqrt[3]{43^2} \cdot 2^{2\nu+10} < 147 \cdot 2^{3\nu+10}; \end{aligned}$$

für die wegen $\varrho \geqq 2^{\nu+2}$ sämtlich über 2^ν gelegenen, $3 \cdot 2^\nu$ konsekutiven ganzen Zahlen

$$n = [\varrho],\ [\varrho] - 1,\ \cdots,\ [\varrho] - (3 \cdot 2^\nu - 1)$$

gilt also

$$0 \leqq t - n^3 < 147 \cdot 2^{3\nu+10}. \tag{3}$$

Die Kongruenz

$$v = t - 3 \cdot 2^{\nu-1} \equiv \alpha^3 \pmod{3 \cdot 2^\nu} \tag{4}$$

besitzt mod. $3 \cdot 2^\nu$ mindestens eine Lösung α; denn jede Zahl ist kubischer Rest mod. 3 und sogar auch mod. 6, was dem Falle $\nu = 1$ entspricht; ferner ist für $\nu \geqq 2$ die mit t ungerade Zahl v kubischer Rest mod. 2^ν, da ja nach dem Fermatschen Satze $v \equiv v^{1+2^{\nu-1}} \equiv v^{1+2\cdot 2^{\nu-1}} \pmod{2^\nu}$ und einer der beiden letzten Exponenten von v durch 3 teilbar ist. Von den $3 \cdot 2^\nu$ konsekutiven ganzen Zahlen $n > 2^\nu$, die (3) befriedigen, genügt also mindestens eine, etwa $n = \alpha > 2^\nu$, auch (4); für dieses α ist mithin wegen (4)

$$t - \alpha^3 = 3 \cdot 2^{\nu-1} \cdot (2 \cdot t' + 1) = 3 \cdot 2^{\nu-2} \cdot M, \tag{5}$$

wobei

$$M = 2 \cdot (2 \cdot t' + 1) \equiv 2 \pmod{4} \tag{6}$$

gesetzt ist und M wegen (3) und (5) den Ungleichungen genügt

$$0 \leqq M < 49 \cdot 2^{2\nu+12}. \tag{7}$$

Wegen (6) läßt sich bekanntlich M in drei Quadrate ganzer Zahlen zerlegen

$$M = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

wobei wegen (7)

$$0 \leqq x_k \leqq \sqrt{M} < 7 \cdot 2^{\nu+6} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3$$

gilt. Durch Zusammenfassung von (2) und (5) ergibt sich nunmehr

$$\begin{aligned} 4096 \cdot u &= 2^{12} \cdot (6 \cdot 2^{15} \cdot 2^{3\nu} + t) = 2^{12} \cdot (6 \cdot 2^{15} \cdot 2^{3\nu} + \alpha^3 + 3 \cdot 2^{\nu-3} \cdot M) \\ &= (2^4 \cdot \alpha)^3 + 6 \cdot 2^{3\nu+27} + 6 \cdot 2^{\nu+9} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= (2^4 \cdot \alpha)^3 + (2^{\nu+9} + x_1)^3 + (2^{\nu+9} - x_1)^3 + (2^{\nu+9} + x_2)^3 + (2^{\nu+9} - x_2)^3 \\ &\quad + (2^{\nu+9} + x_3)^3 + (2^{\nu+9} - x_3)^3, \end{aligned}$$

wo sämtliche sieben Basen der rechts stehenden Kuben nach dem Vorangehenden ganze Zahlen $> 2^{\nu+4}$ sind. Da ν mit u unbegrenzt wächst, kann man also, wenn man u groß genug wählt, alle sieben Kuben größer als eine beliebig vorgegebene Zahl g machen. Mithin ist unser Satz zunächst für alle ungeraden $u \geqq 1\,573\,376$ bewiesen.

Nach den v. Sterneckschen*) Tabellen ist weiter für jede Zahl s des betreffenden Intervalles

(8) $\qquad s = K_7$**) $\quad$ für $\quad 455 \leqq s \leqq 40000,$

(9) $\qquad s = K_6 \quad$ für $\quad 8043 \leqq s \leqq 40000.$

Sei zunächst $1\,000\,000 \leqq u < 1\,573\,376$, so ist die ungerade Zahl u kubischer Rest mod. 2^6, also $u - a^3 = 64 \cdot m$, wo m ganz und a mod. 64 bestimmt ist; für $0 < a \leqq 64$ wird daher $737\,856 \leqq u - a^3 = 64 \cdot m < 1\,573\,376$, folglich $11000 < m < 25000$, also ergibt sich nach (9) $m = K_6$, und mithin erhält man $u = a^3 + 64 \cdot m = K_1 + 2^6 \cdot K_6 = K_1 + K_6 = K_7$. Sei nunmehr weiter $40\,000 < u < 1\,000\,000$, so wird für $z = \sqrt[3]{u - 8043} > 0$

$$\begin{aligned} 8043 = u - z^3 \leqq u - [z]^3 < u - (z-1)^3 &= u - z^3 + 3 \cdot z^2 - 3 \cdot z + 1 \\ &< 8044 + 3 \cdot \sqrt[3]{u^2} < 38044, \end{aligned}$$

also nach (9) $u - [z]^3 = K_6$, $u = [z]^3 + K_6 = K_7$. Daher sind wegen (8) alle ungeraden u im Intervalle $455 \leqq u < 1\,573\,376$ gewiß K_7, also sind es für diese u auch die Zahlen $4096 \cdot u = 16^3 \cdot u$. Für die Zahlen $8 \leqq u < 455$ gilt weiter $512 \leqq 64 \cdot u < 64 \cdot 455 < 30\,000$, also ist nach (8) für sie $4096 \cdot u = 2^6 \cdot 64 \cdot u = 2^6 \cdot K_7 = K_7$. Für die ungeraden Zahlen $u = 1, 3, 5, 7$ endlich folgt direkt $4096 \cdot u = K_7$, indem man $4096 \cdot u$ aus lauter gleichen Summanden $4096 = 16^3$ zusammensetzt.

Damit ist unser Satz allgemein bewiesen.

---

*) Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-Naturwissensch. Klasse, 112, Abt. 2a (1903), S. 1627—1666.

**) Allgemein bedeute $s = K_\nu$, daß sich die ganze Zahl s in ν oder weniger Kuben ganzer Zahlen > 0 zerlegen lasse.

Folgerung: *$C_7(x)$ hat die Größenordnung x.*

Denn nach dem vorangehenden Satze kann von $2 \cdot 4096 = 8192$ sukzessive aufeinander folgenden ganzen positiven Zahlen stets mindestens eine, nämlich die, die $\equiv 4096 \pmod{8192}$ ist, in sieben Kuben zerlegt werden; daraus folgt, da $C_7(x) \leqq [x]$ ist und 1 auch gewiß in sieben Kuben zerlegt werden kann,

$$\frac{1}{8192} < \frac{C_7(x)}{x} \leqq 1 \text{ für } x \geqq 1,$$

d. h. $C_7(x)$ besitzt die Größenordnung x oder, um es noch anders auszudrücken: Der prozentuale Anteil der durch sieben oder weniger Kuben darstellbaren Zahlen $\leqq x$ liegt für alle $x \geqq 1$ oberhalb einer positiven Schranke.

Übrigens hätte für diese Folgerung offenbar bereits der zuerst bewiesene Teil des vorangehenden Satzes genügt, daß nämlich alle großen Zahlen $4096 \cdot u$, wo u ungerade ist, K_7 sind.

Göttingen, den 24. Juni 1913.