Hilbert als Analytiker.

Von R. Courant, Göttingen.

Die Bedeutung wissenschaftlicher Leistungen liegt oft nicht allein in dem Material an neuen Tatsachen, welches zu dem schon vorhandenen hingefügt wird; nicht minder wichtig für die Entwicklung der Wissenschaft kann eine Einsicht sein, wenn sie Ordnung, Einfachheit und Klarheit in ein vorhandenes aber schwer zugängliches Gebiet bringt und so die Übersicht, Erfassung und Beherrschung der Wissenschaft als einer Einheit erleichtert oder überhaupt erst ermöglicht.

Man darf bei den Hilbertschen Arbeiten auf dem Gebiete der mathematischen Analysis auch diesen Gesichtspunkt nicht vergessen, wenn man ihrer Bedeutung nach allen Seiten hin gerecht werden will. *Hilberts* Untersuchungen über Variationsrechnung und das Dirichletsche Prinzip sowie die Arbeiten über die Theorie der Integralgleichungen zeigen alle das bewußte Bestreben, an der Lösung neuer Probleme Methoden zu finden, welche das ehedem Schwere leicht machen, neue Zusammenhänge in vorhandenen Materien erschließen und den sich verästelnden Fluß von Einzeluntersuchungen in ein gemeinsames Bett zurückleiten.

Schon in den Anfangsstadien der modernen mathematischen Entwickelung haben Fragen der Variationsrechnung die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen. Die Natur selbst drängte zum Ausbau dieses Wissenszweiges. Frühzeitig bemerkte man, daß irgendwie bei den Gesetzen der Physik stets ein Minimumprinzip zu walten scheint. Ein Lichtstrahl läuft in einem unhomogenen Medium so, daß er in einem möglichst kleinen Zeitabschnitt von einem seiner Punkte zu einem späteren gelangt; diese Tatsache ist der einfachste Ausdruck des Brechungsgesetzes. Eine Membran aus Seifenlösung spannt sich unter der Wirkung der Kapillarität in den Rahmen einer gegebenen geschlossenen Raumkurve so ein, daß sie einen möglichst kleinen Flächeninhalt einnimmt; ein elektrischer Strom durchfließt bei gegebenen Spannungsverhältnissen an der Oberfläche einen leitenden Körper derart, daß dabei die entwickelte Wärmemenge ein Minimum wird. Man lernte bald, daß sich durch ähnliche Minimalforderungen die allgemeinsten Gesetze der Mechanik, ja der Physik überhaupt, auf die kürzeste und prägnanteste Form ausdrücken lassen. Unbeschadet der naturphilosophischen Frage, ob wir in diesem Faktum mehr zu sehen haben als eine sonderbare dankbar hinzunehmende Möglichkeit, verwickeltere Gesetze einfach und handlich zusammenzufassen, oder ob diese Minimalprinzipien der Physik uns auf tiefere Zusammenhänge hinweisen — der mathematischen Analysis als der Wissenschaft von den mathematischen Formen des Naturgeschehens erwächst daraus die Aufgabe, Minimumprobleme der geschilderten Art systematisch zu untersuchen; und diese Fragestellung bedeutet den Ausgangspunkt der Variationsrechnung. Es handelt sich dabei nicht um solche Maximum- oder Minimumprobleme, wie sie ursprünglich mit den Anstoß zur Ausbildung der Differentialrechnung gegeben haben und wie sie heute vielfach in den Schulunterricht übergegangen sind. Bei diesen elementaren Minimumsaufgaben soll, anschaulich gesprochen, auf einer gegebenen Kurve oder Fläche ein höchster oder tiefster Punkt gefunden werden. (Der Mathematiker darf dabei vor einem „Raum mit vier und mehr Dimensionen" und darin liegenden Gebilden nicht zurückscheuen.) In der Variationsrechnung dagegen wird nicht ein einzelner Punkt auf einer Kurve oder Fläche gesucht, sondern der Gesamtverlauf einer solchen Kurve oder Fläche ist das unbekannte, aufzusuchende Objekt. So z. B., wenn auf einer gegebenen Fläche, etwa dem Erdellipsoid, zwischen zwei Punkten die kürzeste (geodätische) Verbindunglinie gezogen oder in eine geschlossene Raumkurve die Lamelle kleinsten Flächeninhaltes eingespannt werden soll. Wie die elementaren Minimumprobleme direkt auf den Prozeß der Differentiation hinführen, so erhält man aus den Variationsaufgaben Differentialgleichungen, und es ist daher kein Wunder, wenn die wichtigsten Theorien über die Differentialgleichungen, soweit sie in der Physik von Bedeutung sind, eng mit der Variationsrechnung zusammenhängen. Trotzdem hiernach die Variationsrechnung eine so zentrale Stellung innerhalb der mathematischen Analysis einzunehmen berufen scheint, trotzdem fast alle großen Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts an ihrem Aufbau mitgewirkt haben und noch in der vorigen Generation durch die Untersuchungen von *Weierstraß* neue bedeutende Fortschritte erzielt und mannigfache Anregungen hinausgetragen wurden, ist diese Disziplin bis in die jüngste Zeit hinein in den Augen vieler Fachgenossen und noch zahlreicherer Physiker nur ein Spezialgebiet, und nicht einmal ein besonders zugängliches, gewesen. Wenn diese Auffassung sich in den letzten Jahrzehnten gründlich geändert hat, wenn allmählich die überall klärend und vereinfachend wirkenden Gesichtspunkte der Variationsrechnung Gemeingut der mathematischen Kreise geworden sind, so ist das nicht zuletzt dem Impuls zu danken, welcher von den Hilbertschen hierhergehörigen Arbeiten und seinen persönlichen Anregungen ausgeht. Mag er nun für alte Theoreme neue strenge und durchsichtige Beweise geben, oder wie im Falle der — heute im Anschluß an die Quantentheorie auch bei den Physikern so aktuellen

— Hamilton-Jacobischen Theorie schlagende Formulierungen finden, welche die vielfachen scheinbar vereinzelt und zusammenhanglos nebeneinanderstehenden Tatsachen mit einem Griff zusammenfassen und in ein gemeinsames Licht stellen, so daß nunmehr der Weg für weitgehende Verallgemeinerungen frei wird, oder mag er schließlich, wie in den Arbeiten über das absolute Minimum der wissenschaftlichen Fragestellung eine ganz neuartige und höchst fruchtbare Wendung geben — stets ist mit dem Ergebnis der Arbeit zugleich etwas für die Einfachheit und Einheit der mathematischen Wissenschaft überhaupt gewonnen. Unter allen hierhergehörigen Hilbertschen Abhandlungen hat wohl die über das „Dirichletsche Prinzip" den größten Einfluß ausgeübt und ist für die Hilbertsche Denkart am meisten charakteristisch.

Um diese Leistung dem Verständnis näher zu bringen, ist es nötig, mit einigen Worten auf den Entwicklungsgang unserer Wissenschaft in der neueren Zeit einzugehen. Mit der Ausbildung der Differential- und Integralrechnung im 17. Jahrhundert setzte eine glänzende Epoche mathematischen Lebens ein; in raschem Fluß bis tief hinein ins 19. Jahrhundert folgten sich die wichtigsten Entdeckungen; ein gigantischer, fast unübersehbarer Wissensstoff türmte sich zu einem Gebirge, das auch heute noch keineswegs eingeebnet ist. Aber bei dieser stürmischen Entwicklung gingen die Maßstäbe mathematischer Strenge und Klarheit vielfach verloren, welche von den Griechen überkommen waren. Die „höhere Mathematik" wurde wirklich eine Art Geheimwissenschaft, wo man sich auf einen guten wissenschaftlichen Instinkt ebenso verlassen mußte wie auf klar präzisierbare Einsicht, wenn man bei der Handhabung der neuen Methoden nicht vom richtigen Wege abirren wollte. „Allez en avant, et la foi vous viendra", dieses Motto ist recht bezeichnend für den unkritischen Geist dieser, wie eine Naturkraft hervorbrechenden, mathematischen Produktivität. Die Reaktion in Gestalt kritischer Selbstbesinnung konnte nicht ausbleiben; ein großer Teil der mathematischen Arbeit im 19. Jahrhundert ist der Aufgabe gewidmet, für das früher Geschaffene die tragfähigen Fundamente zu finden und die Mathematik wieder zu derselben Höhe von Strenge und Sicherheit zu führen, die sie im Altertum erreicht hatte. Eine der ersten charakteristischen Leistungen in dieser Hinsicht war die Doktordissertation von *Carl Friedrich Gauß*, dem princeps mathematicorum, wie man später mit vollem Recht diesen gewaltigen Geist genannt hat. In dieser Arbeit wird zum ersten Male in bewußter strenger Form ein Existenzbeweis geführt, und zwar der Beweis des Satzes, daß jede algebraische Gleichung $n$ten Grades auch wirklich n Wurzeln besitzt. Während man sich früher einfach naiv das Problem stellte, „die" Wurzeln einer Gleichung zu finden, wird hier sachgemäß die Vorfrage aufgeworfen und in positivem Sinne entschieden, ob überhaupt eine Lösung des Problemes notwendig existieren muß. Von da ab sind zahlreiche mathematische Untersuchungen solchen Existenzbeweisen gewidmet; das geheimnisvolle Wörtchen „es gibt" spielt in der Mathematik des 19. Jahrhunderts eine große Rolle (eine Rolle übrigens, welche ihrerseits auch wieder neue kritische Betrachtungen herausgefordert hat). Das mathematische Bedürfnis, solche Existenzbeweise für die Lösungen zu finden, dehnt sich auch auf solche Probleme aus, welche aus der Physik oder Mechanik entspringen.

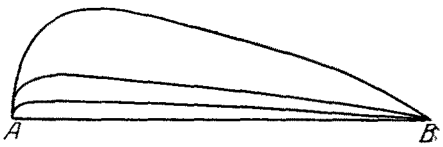
Hier ist es nötig, etwas über die Einwendungen zu sagen, welche von physikalischer Seite gelegentlich gegen die mathematischen Existenzbeweise als etwas Überflüssiges und Wertloses erhoben worden sind; unter bestimmten physikalischen Bedingungen — so argumentiert man — muß ein physikalischer Vorgang in ganz bestimmter Weise ablaufen, und daher müssen die entsprechenden mathematischen Probleme, mögen sie sich auf Differentialgleichungen beziehen oder sonstwie geartet sein, notwendig eine bestimmte Lösung besitzen, für die einen darüber hinausgehenden mathematischen Existenzbeweis zu führen, mehr oder weniger Spitzfindigkeit sei. Dieses Argument scheint mir am Ziele völlig vorbei zu gehen. Abgesehen davon, daß mathematische Theorien ihre Wahrheit in sich tragen müssen und sie nicht aus den Gesetzen der physikalischen Natur entlehnen können, ist gerade die Führung des mathematischen Existenzbeweises auch von prinzipiellem Interesse für die Frage der mathematischen Darstellung physikalischer Phänomene; gewiß kann deren Existenz und Realität nicht durch mathematische Betrachtungen bewiesen werden (gegen eine solche Behauptung würde sich der Physiker mit Recht wenden), wohl aber bestätigt der mathematische Existenzbeweis, daß der mathematische Ansatz dem wirklichen realen Vorgang adäquat ist; und schließlich ist vom Standpunkt der Praxis noch zu sagen, daß in vielen Fällen der Existenzbeweis zugleich auch ein Mittel liefert, um die Lösung in praktisch brauchbarer Form wirklich herzustellen.

Wie dem auch sei, unter den mathematischen Existenzbeweisen, welche für die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert von Bedeutung sind, spielen gerade diejenigen eine hervorragende Rolle, die sich im Anschluß an physikalische Vorstellungen auf Betrachtungen der Variationsrechnung stützen. Insbesondere gilt dies für den grandiosen funktionentheoretischen Gedankenkreis, welcher um die Mitte des Jahrhunderts von *Bernhard Riemann*, dem unvergleichlich tiefsinnigen Forscher, geschaffen wurde. Der gewaltige Bau seiner Theorie der „Abelschen Funktionen" ruht auf solchen Existenzbeweisen, die mit Gedanken der Variationsrechnung arbeiten. Worum es sich dabei handelt, läßt sich im Anschluß an die physikalische Vorstellung etwa so verständlich machen: Man denke sich irgendeine Fläche im

Raume, möge sie nun das Aussehen einer Kugel oder eines Ellipsoides, oder z. B. einer diesen Flächen innerlich ganz wesensfremden Ringfläche oder noch kompliziertere Gestalt haben, möge sie geschlossen sein oder Ränder besitzen. Stellen wir uns nun diese Fläche mit einer elektrisch leitenden Schicht bedeckt vor und denken wir in zwei beliebigen ihrer Punkte den positiven und negativen Pol einer elektrischen Stromquelle eingesetzt, so wird gewiß, das sagt die physikalische Anschauung, ein ganz bestimmtes stationäres Strömungsbild auf der Fläche das Ergebnis sein, im einzelnen noch abhängig von der Natur der Fläche, ihrer Berandung, der Lage der Pole usw. Ganz analoge Probleme ergeben sich bei der Wärmeleitung, der Strömung von Flüssigkeiten usw. Mathematisch gesprochen handelt es sich dabei um gewisse, sogenannte Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen, und zwar gerade um solche Probleme, wie sie sich aus der Variationsrechnung ergeben; die entsprechenden Variationsprobleme verlangen nämlich in der Hauptsache, daß beim wirklichen Strömungsvorgang die entwickelte Joulesche Wärme geringer wird als bei anderen denkbaren Strömungen. Wenn man es als selbstverständlich hinnimmt, daß eine solche Minimumforderung durch geeignete Funktionen erfüllt werden kann, dann ist hiermit der Existenzbeweis für die Randwertaufgaben der Funktionentheorie ohne weiteres gegeben; *Riemann* verfuhr so und gab dieser Schlußweise den historisch gewordenen Namen „Dirichletsches Prinzip“; sein ganzes stolzes und im höchsten Sinne geniales Gebäude, vielleicht im 19. Jahrhundert die großartigste Schöpfung mathematischer Spekulation, ruhte auf der vermeintlichen Selbstverständlichkeit dieser Annahme.

Da kam die berühmte Kritik von *Weierstraß*, dem Manne, der wie kein anderer als Exponent des kritischen Geistes in der Mathematik des 19. Jahrhunderts gelten kann: *Weierstraß* wies daraufhin und zeigte an ganz einfachen Beispielen, daß ein Minimumproblem der Variationsrechnung überhaupt unter Umständen keine Lösung zu haben braucht, daß also auch für die Riemannschen Variationsprobleme die Existenz der Lösungen keineswegs eine Selbstverständlichkeit war, sondern eines Beweises bedurfte. Weit und breit in der mathematischen Rüstkammer war aber kein Mittel zu finden, das diesen fehlenden Existenzbeweis liefern konnte; das ganze stolze Riemannsche Gebäude stand plötzlich scheinbar ohne Fundament.

Ein solches fatales Beispiel eines sehr vernünftig anmutenden Variationsproblemes, welches keine Lösung besitzt, ist folgendes: Man soll zwei Punkte A, B durch eine möglichst kurze Kurve ohne Ecken verbinden, welche im Punkte A senkrecht auf der Geraden AB steht. Wie die Figur lehrt, kann man die Verbindungskurve so eng wie man will, an die Gerade AB anschmiegen, ihre Länge so nahe, wie man will, an die Länge der Strecke AB heranbringen, und doch kann offenbar diese Länge nicht genau gleich der Länge AB der kürzesten, geraden, Verbindung sein, sondern muß immer etwas größer bleiben, weil die Bedingung des Senkrechtstehens in A verbietet, daß die Verbindungslinie ganz in die Gerade AB hineinfällt. Das Minimumproblem hat also keine Lösung. Denn es gibt unter den zugelassenen Wegen keinen kürzesten.



Die Folge der Weierstraßschen Kritik war, daß man ratlos und bedauernd den Riemannschen Gedankengängen den Rücken kehrte und erst auf außerordentlich mühsamen, ganz anderen Wegen allmählich so weit kam, die wichtigsten Teile der Riemannschen Resultate doch zu sichern, wobei allerdings die wunderbare Architektonik des Baues sehr gelitten hat. Nur wenige Mathematiker hegten die Hoffnung, daß vielleicht in späteren Zeiten einmal die Wiederbelebung der ursprünglichen Riemannschen Ideen gelingen würde. Aber wie, das blieb ein Rätsel.

Es gehörte die ganze Unbefangenheit und Freiheit von dem Druck der Tradition dazu, welche nur den wirklich großen Forschern eigen ist, um das scheinbar vollständig unzugängliche Problem der Rettung des Dirichletschen Prinzipes anzugreifen. *Hilbert* besaß den Mut, er versuchte es, und es glückte. Ganz neuartige, viel bewunderte Überlegungen von höchstem Scharfsinn mußten angewandt werden, und mühsam mußte der Leser der Hilbertschen Arbeit um das Verständnis ringen, aber das große entscheidende Ziel war erreicht: es war für die Analysis ein neues Hilfsmittel geschaffen, welches die Möglichkeit gab, aus dem Dirichletschen Prinzip eine wirkliche Beweismethode zu gestalten. Von diesen Hilbertschen Untersuchungen sind viele andere Forscher angeregt worden, und das Ergebnis aller dieser Bestrebungen ist, daß man heute die alten Riemannschen Schlußweisen bei völliger Strenge mit einer Einfachheit und Durchsichtigkeit handhaben kann, welche der inneren Einfachheit des zugrunde liegenden physikalischen Bildes entspricht.

Über die weiteren Fortschritte zu berichten, welche die Hilbertschen Ideen im Gebiete der Variationsrechnung mit sich brachten, dazu fehlt hier der Raum. Wir müssen noch einen Blick auf ein anderes Arbeitsgebiet der Analysis werfen, dem *Hilbert* ein gut Teil seiner Kraft gewidmet hat, die Theorie der Integralgleichungen.

Diese Theorie ist in ihrer jetzigen Form ein Kind des 20. Jahrhunderts. Der schwedische

Mathematiker *Ivar Fredholm* entdeckte mit scharfem Blick, daß gewisse wichtige Funktionalgleichungen, die zur Bestimmung von Funktionen bei Problemen der mathematischen Physik dienen, eine Form besitzen, welche eine starke Analogie mit viel elementareren mathematischen Aufgaben, nämlich den Aufgaben aus der Lehre von den linearen Gleichungen, zeigt; diese Funktionalgleichungen, deren Form nachträglich in nuce schon bei zahlreichen früheren Untersuchungen erkennbar wurde, erhielten später den Namen Integralgleichungen; *Fredholm* gab in seiner klassischen Arbeit eine sehr elegante Auflösungstheorie, und die neuen Ansätze fesselten bald das Interesse vieler Mathematiker. Aber man kann wohl sagen, daß erst durch das Eingreifen der Hilbertschen Untersuchungen die wahre Bedeutung der Integralgleichungstheorie herausgestellt worden ist; ihre mannigfachen Beziehungen zu den verschiedensten Gebieten der Mathematik, ihre vielseitige Anwendungsfähigkeit und die innere Harmonie und Einfachheit ihrer Struktur, ihre zusammenfassende Tendenz gegenüber zahlreichen Einzeluntersuchungen wurden den Fachgenossen erst richtig offenbar aus der Folge von großen Abhandlungen, welche *Hilbert* hintereinander seit dem Jahre 1904 veröffentlicht hat, und welche nun als Buch zusammengefaßt vorliegen. Wir wollen versuchen, die gedankliche Tendenz dieser Arbeiten etwas näher zu schildern und damit einen Einblick in die erstaunliche Mannigfaltigkeit des Inhaltes zu geben. Die erste Abhandlung enthält zunächst eine neue Ableitung der allgemeinen Fredholmschen Theorie, welche den einfachen Grundgedanken dieser Theorie bloßlegt; aber schon hier geht *Hilbert* einen entscheidenden Schritt weiter, indem er die tiefe innere Verwandtschaft des Integralgleichungsproblems mit dem elementaren Problem der Ablösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten konsequent verfolgt. Er erkennt die besonders wichtige Sonderstellung, welche vor allem eine bestimmte Klasse von Integralgleichungen, die sogenannten symmetrischen Integralgleichungen, einnimmt; ein symmetrisches lineares Gleichungssystem steht nämlich in engster Beziehung zur geometrischen Theorie der Flächen zweiter Ordnung (der Ellipsoide usw.), wobei man natürlich bei größerer Variabelnzahl in einen „Raum von mehr Dimensionen" hineinsteigen muß. Genau so, wie es nun bei diesen Flächen zweiter Ordnung Hauptachsen oder Fundamentalrichtungen gibt, erhält man bei den symmetrischen Integralgleichungen entsprechende Lösungsfunktionen, Fundamentallösungen oder Eigenfunktionen genannt, welche im allgemeinen in unendlicher Anzahl vorhanden sind und sofort einen Platz im Brennpunkt des Interesses einnehmen. Es zeigt sich nämlich, daß diese Theorie der Eigenfunktionen in unmittelbarem Zusammenhange steht mit der physikalischen Theorie der Eigenschwingungen. Jedes schwingungsfähige physikalische System vermag bekanntlich gewisse rein periodische Eigenschwingungen auszuführen deren Anzahl je nach der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems endlich oder unendlich ist; so z. B. kann eine Saite die unendliche, als Grundton und Obertöne bekannte Folge von Eigenschwingungen ausführen, welche sich mathematisch bekanntlich als reine Sinusbewegungen ausdrücken lassen. Seit den Zeiten von *Bernoulli* hat man gelernt, eine beliebige freie Schwingung eines solchen Systems aufzufassen als einen Superpositionsvorgang aus einer nötigenfalls unbegrenzt fortschreitenden Reihe solcher mit verschiedener Stärke vertretenen Eigenschwingungen. (Man denke etwa an die Helmholtzsche Theorie der Klangfarbe.) Das Gebiet der harmonischen Analyse ist nichts als eine Ausführung dieses Gedankens. Mathematisch gesprochen handelt es sich um die Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche nach Sinusfunktionen fortschreitende Reihen, sogenannte Fouriersche Reihen. Jedes andere Schwingungsproblem, so z. B. das der schwingenden Membran oder Platte, führt auf andere solche Eigenfunktionensysteme und entsprechende Reihenentwicklungen. Die Theorie der symmetrischen Integralgleichungen faßt nun alle diese bisher getrennt nebeneinanderstehenden Dinge unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammen; sie lehrt, wie man willkürliche Funktionen nach den Eigenfunktionen einer symmetrischen Integralgleichung entwickeln kann, und da sich andererseits alle die genannten Schwingungsprobleme als Integralgleichungsprobleme umschreiben lassen, so hatte man hier einen einheitlichen Zugang zu diesem wichtigen Gebiet der Reihenentwicklungen gefunden und konnte auf dem betretenen Wege viel weitergehende mathematische Resultate erzielen, als das vorher gelungen war. Zahlreiche frühere Untersuchungen über diese Fragen — ich nenne hier nur die treffend erschauten, aber mathematisch nicht genügend begründeten Gedankenbildungen von Lord *Rayleigh* in seiner „Theorie of sound" — erhielten so eine gemeinsame Basis. Diesen Untersuchungen ist ein großer Teil der zweiten Hilbertschen Abhandlung gewidmet: doch ist in ihr noch mehr enthalten: die Anwendung der Integralgleichungstheorie auf die Randwertaufgaben der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Auch dieses, mit dem vorgenannten in engem Zusammenhange stehende Gebiet erfährt hier entscheidende Förderung.

In ein ganz anderes Anwendungsgebiet führt uns die dritte Abhandlung: hier wird ein außerordentlich schwieriges, bis dahin ganz unzugängliches Fundamentalproblem aus der funktionentheoretischen Theorie der linearen Differentialgleichungen angepackt und mit kräftigen Fäusten bezwungen, und ebenso zeigen die weiteren Abhandlungen in den verschiedensten Anwendungen auf Geometrie, Funktionentheorie, mathematische

Physik usw., wie mannigfach die neuen Ideen sich verwenden lassen.

Von der größten prinzipiellen Bedeutung ist jedoch ein allgemeiner Gedanke, der sich bei *Hilbert* aus der Integralgleichungstheorie herausschält; das ist die Idee der Lehre von Funktionen unendlich vieler Veränderlicher. Man kann die Analogie der Integralgleichung mit einem gewöhnlichen linearen Gleichungssystem am einfachsten dadurch kennzeichnen, daß man an Stelle eines Gleichungssystems mit 100 oder 1000 oder n Unbekannten durch einen kühnen Grenzübergang ein solches von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten setzt. Welche großen mathematischen Schwierigkeiten hinter einer solchen Theorie unendlicher Gleichungssysteme stecken, läßt sich dem Außenstehenden nicht so leicht begreiflich machen; genug, daß es *Hilbert* gelang, diese Schwierigkeiten zu überwinden und eine Theorie der unendlichen linearen Gleichungssysteme sowie der quadratischen Funktionen von unendlich vielen veränderlichen Größen zu schaffen, welche an Einfachheit und Durchsichtigkeit der Ergebnisse und Methoden den elementaren Theorien nicht nachsteht. Aus dieser allgemeinen Theorie ergeben sich dann die Sätze über Integralgleichungen und die Methoden ihrer Behandlung als fast selbstverständliche Forderungen. Aber diese neuen Gedanken weisen über das hiermit erreichte Ziel hinaus. Schon bei der Lehre von den quadratischen Funktionen von unendlich vielen Variabeln ergeben sich, wenn man die Voraussetzungen nicht zu eng faßt und den Dingen tiefer auf den Grund geht, Resultate von ganz neuartigem Charakter, wie sie bei der gewöhnlichen Theorie und ihrem geometrischen Bilde, der Lehre von den Flächen zweiter Ordnung im Raume, keineswegs auftreten; neue Ergebnisse, welche auch zu alten, schwer zugänglichen Theorien, z. B. der berühmten Kettenbruchtheorie des holländischen Mathematikers *Stieltjes* in engem Zusammenhange stehen und diese Dinge neu beleuchten. Aber wir erheben uns erst dann zu der ganzen Höhe der prinzipiellen Auffassung vom Wesen der großen Fragen aus der mathematischen Analysis, wenn wir der allgemeinen Hilbertschen Idee von den Funktionen unendlich vieler Variabeler folgen. Für den Physiker scheint diese Idee etwas durchaus nicht Fernliegendes zu sein. Ihm ist es als eine Selbstverständlichkeit bewußt, daß es neben den Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden viele physikalische Systeme gibt, welche nicht endlich viele Freiheitsgrade besitzen, d. h. deren Lage in einem Zeitmoment sich nicht durch Angabe einer bestimmten Anzahl von Größen, der „Koordinaten" oder unabhängigen Variabeln des Systems charakterisieren läßt, sondern weitergehende Festlegungen erfordert; so z. B. ist die Lage eines starren Körpers durch die Angabe seiner Schwerpunktskoordinaten im Raume und der Richtungen seiner Trägheitsachsen festgelegt, also durch endlich viele Koordinaten, während die Lage einer schwingenden Membran oder Saite nie durch endlich viele Zahlen eindeutig charakterisiert werden kann, sondern stets erst durch den Verlauf einer ganzen, von ihr eingenommenen Fläche oder Linie, also einer Funktion bestimmt ist. Wir haben es hier eben mit Systemen von unendlich vielen Freiheitsgraden zu tun. In der Tat kann man den Verlauf einer Funktion, gleichviel ob diese nun durch eine Kurve oder Fläche repräsentiert wird, durch Angabe einer unendlichen Folge von „Koordinaten" festlegen, etwa indem man die Funktion in Fouriersche Reihen oder verwandte Reihen entwickelt denkt und dann die Koeffizienten der Entwicklung als die unabhängigen Bestimmungsstücke ansieht. Die Energie und alle sonst mit dem System zusammenhängenden physikalischen Größen erscheinen dann als Funktionen dieser unendlich vielen Bestimmungsstücke, d. h. eben als Funktionen von unendlich vielen Variabeln. Mathematisch stoßen wir ebenfalls auf Schritt und Tritt in der Analysis auf diesen Begriff. Überall, wo eine Größe von dem Verlauf einer Funktion abhängt, wie die Länge einer Kurve vom Verlaufe der Kurve oder die Höhe des Schwerpunktes einer Fläche vom Verlaufe dieser Fläche, z. B. überall in der Variationsrechnung, aber auch sonst in der Theorie der Differentialgleichungen, in der ganzen mathematischen Physik usw. haben wir es mit Funktionen von unendlich vielen Variabeln zu tun, oder wie *Volterra*, der bedeutende italienische, sich in ähnlichen Gedankengängen bewegende Mathematiker, sie nennt, mit „Linienfunktionen"; die meisten Theorien der mathematischen Analysis sind nichts als Spezialuntersuchungen über solche Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen.

Lassen sich nun alle diese Spezialuntersuchungen in einer einheitlichen Theorie der Funktionen unendlich vieler Variabler zusammenfassen? Im Falle der Integralgleichungen hat sich der Gedanke aufs beste bewährt: aber ist das allgemeine Ziel nicht allzuweit, allzuumfassend gesteckt, um auch nur einige Aussicht auf Erfolg zu bieten? Die Frage scheint nicht richtig gestellt. Zwar ist es wunderbar genug, daß in der allgemeinen Theorie der Funktionen unendlich vieler Veränderlicher, wie *Hilbert* in einer Arbeit gezeigt hat, sich überhaupt mathematische Sätze aussprechen und beweisen lassen, welche nicht trivial sind; aber für den Moment liegt hierin nicht das Schwergewicht der allgemeinen Auffassung; ausschlaggebend bleibt vor allem die ordnende und klärende Wirkung, welche von der Idee einer solchen allgemeinen Funktionentheorie auf die ganze Methodik und Ideenbildung analytischer Untersuchungen ausstrahlt; mit einem Kantischen Ausdruck möchte man sagen, daß vorläufig die Theorie der unendlich vielen Veränderlichen kein konstitutives, sondern ein regulatives Prinzip der Analysis bedeutet, ein Wegweiser zur Orientierung der Gedankenbildungen mehr als ein Forschungsmittel. Gerade in dieser Hinsicht hat die Hilbertsche Idee schon starke Wirkung ausgeübt und scheint dazu berufen, noch reiche Früchte zu zeugen.

Wenn es auch in dem Rahmen dieses Aufsatzes nicht möglich ist, im einzelnen ein Bild von der Tiefe und Kraft des Analytikers *Hilbert* zu geben, dessen wahrhaft radioaktives wissenschaftliches Temperament mittelbar oder unmittelbar die meisten Mathematiker der letzten Generationen angeregt hat, so hoffe ich doch, einen Eindruck vermittelt zu haben, von dem aufs Ganze, auf die Einheit der Wissenschaft gerichteten Eros, welcher der wissenschaftlichen Persönlichkeit den Stempel aufdrückt und dem Träger in einer Epoche der Einzelleistung, Zersplitterung und Zerfaserung in der Wissenschaft einen ganz besonderen Platz anweist.

Hilbert und die Physik.

Von M. Born, Göttingen.

Im Jahre 1905 fanden in Göttingen Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars über Elektronentheorie statt, die *Minkowski* und *Hilbert* gemeinsam leiteten. Die Anregung zu diesem Unternehmen, das die beiden befreundeten Mathematiker von ihrem eigentlichen Arbeitsgebiet abzog und sie zu tiefem Eindringen in die Nachbarwissenschaft veranlaßte, mag damals von *Minkowski* ausgegangen sein, der von den Geheimnissen und Rätseln der Lorentzschen Elektrodynamik gelockt wurde und darin zugleich ein lohnendes Feld der Betätigung für seine geometrischen und algebraischen Kräfte erschaute. Der Schreiber dieser Zeilen, dem es vergönnt war, an diesem Seminar als Student teilzunehmen, erinnert sich an anregende und aufregende Stunden, die mit Diskussionen über die Fitz-Geraldsche Kontraktion, die Lorentzsche Ortszeit und andere, damals noch ganz phantastisch erscheinende Ansätze der Elektrodynamik erfüllt waren, und an denen sich auch *Hilbert* häufig klärend und auf Klarheit dringend beteiligte. Diese Übungsstunden sind bemerkenswert geworden, weil hier die beiden Mathematiker die Anregungen schöpften, die sie später, jeden zu seiner Zeit, zum Eingreifen in die Entwicklung der Relativitätstheorie führten.

Minkowskis Leistungen auf diesem Gebiete sind bekannt genug. Zu jener Zeit, als *Einsteins* erste, berühmte Arbeit erschien, die die Relativierung der Zeit enthielt, hatte *Minkowski* die mathematische Struktur der Feldgleichungen des Äthers und ihre Darstellung in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt schon entdeckt und die Bedeutung der Invarianz der Naturgesetze gegenüber der Lorentzschen Transformationsgruppe erkannt. Aber er trat erst 1908 mit seinen Gedanken an die Öffentlichkeit, als es ihm gelungen war, die Feldgleichungen für bewegte, ponderable Körper aus dem Relativitätsprinzip abzuleiten.

Hilbert verfolgte damals die Untersuchungen des Freundes mit einer Anteilnahme, die sich oft zur Begeisterung steigerte; denn in ihm wohnte jener Glaube an die Einfachheit und Begreifbarkeit der Natur, der zum Wesen des Naturforschers gehört, aber beim Mathematiker durchaus nicht immer zu finden ist, und er sah in *Einsteins* und *Minkowskis* Resultaten Erfüllung dieses Glaubens. Aber er selbst trat zunächst nicht mit eigenen Arbeiten physikalischer Richtung hervor, auch dann nicht, als *Minkowski* 1909 plötzlich starb und eine Fülle von Problemen ungelöst zurückließ. Es war die Periode, in der *Hilbert* seine Theorie der Integralgleichungen und der quadratischen Formen von unendlich vielen Variabeln zum Abschluß brachte. Wenn er auch durch diese Untersuchungen ganz erfüllt wurde und nicht zu produktiver Tätigkeit auf dem von *Minkowski* gewiesenen Wege kam, hat er doch seit jener Zeit nie mehr aufgehört, sich für physikalische Probleme zu interessieren. Auch die *Lehre von den Integralgleichungen* war ja mit den Methoden der klassischen theoretischen Physik aufs engste verknüpft, vor allem mit den Randwertaufgaben, die in der Theorie des Potentials und vieler Differentialgleichungen der Physik auftreten. Die theoretischen Physiker hatten hier zwei wesentlich verschiedene Lösungsmethoden entwickelt, die *Methode der Reihen* nach dem Vorbilde der Fourierschen Reihe und die *Methode der Greenschen Funktion*. Man kann diese Verfahren etwa an dem Beispiel der Wärmeleitung in einem dünnen Stabe so kennzeichnen: Entweder faßt man die Temperaturverteilung als Superposition von einfach harmonischen (sinusförmigen) Temperaturwellen auf (Reihenentwicklung nach *Fourier*), oder man denkt sich an jeder Stelle des Stabes eine unendlich kleine Wärmequelle und bestimmt diese so, daß ihr Zusammenwirken die tatsächliche Temperaturverteilung erzeugt (Integralgleichung mit der Greenschen Funktion als Kern). *Hilbert* stellte nun ganz allgemein die Beziehung dieser Ansätze zu den linearen Integralgleichungen zweiter Art her und es gelang ihm auf diesem Wege, nicht nur alle die mannigfaltigen Theorien der physikalischen Differentialgleichungen unter einen umfassenden Gesichtspunkt zusammenzufassen, sondern auch viele Lücken auszufüllen, die der Mathematiker in diesen Gebieten schmerzlich emp-