# UNA QUESTIONE SUI NUMERI TRANSFINITI.

Nota di **C. Burali-Forti**, in Torino.

Adunanza del 28 marzo 1897.

Scopo principale di questa Nota è di dimostrare, che effettivamente esistono dei *numeri transfiniti* (*) (o *tipi d'ordine*) $a$, $b$ tali che, $a$ non è eguale, non è minore e non è maggiore di $b$.

Basandoci su resultati già noti, potremmo in poche parole dimostrare quanto ora abbiamo affermato; ma per togliere al lettore ogni dubbio sulla validità della nostra dimostrazione, abbiamo creduto necessario stabilire esattamente (nei §§ 1-8) il significato dei termini dei quali facciamo uso (**), ripetendo—sebbene sotto forma alquanto diversa—alcune cose già esposte in questi Rendiconti (***).

---

(*) G. Cantor. — Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Math. Ann., B. 47). — Traduzione italiana nella *Rivista di Matematica*, a. 1895. Per i lavori precedenti del sig. G. Cantor sullo stesso argomento, si consulti la *Lista bibliografica* del sig. Vivanti, unita alla parte VI del *Formulario* pubblicato dalla *Rivista di Matematica*.

(**) Per il significato dei termini, *classe, corrispondenza, classe finita,...* rimandiamo il lettore alla nostra Nota: « Le classi finite » pubblicata negli Atti dell'Accademia di Torino, a. 1896.

(***) Tomo VIII. — « Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti ».

§ 1. *Ordine degli elementi di una classe.* — Sia $u$ una classe. Diciamo che $h$ è un « ordine degli $u$ », quando (*):

(*a*) $h$ è una corrispondenza fra gli elementi di $u$ e classi formate con elementi di $u$.

(*b*) La corrispondenza $h$ è *transitiva;* cioè se $x$, $y$, $z$ sono elementi di $u$, se $x$ è un elemento della classe $hy$ e se $y$ è un $hz$, allora $x$ è un $hz$.

(*c*) Se $x$, $y$ sono elementi di $u$, non può, ad un tempo, essere $x$ un $hy$ e essere $y$ un $hx$.

(*d*) Se $x$, $y$ sono elementi qualunque di $u$, sempre si ha che: o $x$ è identico a $y$, o $x$ è un $hy$, o $y$ è un $hx$.

In simboli, scrivendo Ord $u$ al posto di « ordine degli $u$ », abbiamo

1. $u \varepsilon \mathrm{K} . \supset . \mathrm{Ord}\, u = (\mathrm{K}\, u) \mathrm{f} u \frown \overline{h \varepsilon} \{ x, y, z \varepsilon u . x \varepsilon hy . y \varepsilon hz . \supset_{x,y,z} . x \varepsilon hz .\because. x, y \varepsilon u . x \varepsilon hy . y \varepsilon hx . =_{x,y} \Lambda .\because. x, y \varepsilon u . \supset_{x,y} : x = y . \smile . x \varepsilon hy . \smile . y \varepsilon hx \}$ (Def).

Se, essendo $x$ un elemento di $u$, chiamiamo « seguenti di $x$ in $u$ rispetto all'ordine $h$ » gli elementi della classe $hx$, scorgiamo facilmente che le proprietà (*a*)—(*d*) attribuite ad $h$, sono quelle che ordinariamente si annettono all'idea di *ordine*.

Invertiamo la relazione $y \varepsilon hx$ ($y$ è uno dei seguenti di $x$) scrivendo $x \varepsilon h|y$, e quindi $h|y$ può stare al posto di « precedenti di $y$ in $u$ rispetto all'ordine $h$ ». Chiamiamo « *primo* degli $u$, rispetto all'ordine $h$ » l'elemento $x$ di $u$ che non ha precedenti ($h|x = \Lambda$), e chiamiamo « *ultimo* degli $u$ rispetto all'ordine $h$ » l'elemento $y$ di $u$ che non ha seguenti ($hy = \Lambda$). Se $x$ è un elemento di $u$, chiamiamo « *immediatamente seguente* di $x$ » l'elemento $y$ di $u$ che è uno dei seguenti $x$ ed è tale, che non esistono degli $u$ che sono, ad un tempo, seguenti di $x$ e precedenti di $y$ ($y \varepsilon hx . u \frown hx \frown h|y = \Lambda$). Il primo o l'ultimo degli $u$, o l'immediatamente seguente di un elemento qualunque di $u$, può non esistere; ma se esiste è univocamente determinato [ciò risulta facilmente dalle condizioni (*a*) — (*d*)].

---

(*) Per maggiori schiarimenti sulle cose contenute nei §§ 1-8 si consulti: C. Burali-Forti. — *Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti*, loc. cit.

§ 2. *Classe ordinata* (*). — Sieno $u$, $v$ classi qualunque; sia $h$ un ordine degli $u$, e $k$ un ordine dei $v$. Scriviamo $(u, h)$ al posto di « classe $u$ i cui elementi sono disposti nell'ordine $h$ », o al posto di « classe $u$ ordinata col criterio $h$ ».

Non sembra attualmente possibile definire $(u, h)$ ponendo $(u, h)$ eguale (*identico*) a un complesso di segni avente significato noto. Noi definiamo $(u, h)$ come *ente astratto*, stabilendo in qual caso due classi ordinate debbano ritenersi identiche. Poniamo

2. $u, v \varepsilon \mathrm{K} \,.\, h \varepsilon \mathrm{Ord}\, u \,.\, k \varepsilon \mathrm{Ord}\, v \,.\, \supset .\!\cdot.\, (u, h) = (v, k) \,.\, = : u = v \,.\, h = k$ (Def)

cioè ammettiamo che $(u, h)$ è identica a $(v, k)$ quando, $u$ è identica a $v$ e la corrispondenza $h$ è identica alla corrispondenza $k$.

Se $u$ è una classe contenente un solo elemento $x$, $(u \varepsilon \mathrm{Un})$, allora ogni ordine $h$ degli $u$ è tale che $hx = \Lambda$. Possiamo quindi convenire di indicare col segno $\Lambda$ ogni ordine di $u$, e in conseguenza $(u, \Lambda)$ rappresenterà la classe $u$ ordinata.

Scrivendo Ko al posto di « classe ordinata » poniamo

3. $\mathrm{Ko} = \overline{(u, h) \varepsilon} \{ u \varepsilon \mathrm{K} \,.\, h \varepsilon \mathrm{Ord}\, u \}$ (Def)

cioè diciamo che $(u, h)$ è una classe ordinata quando $u$ è una classe e $h$ è un ordine degli $u$.

§ 3. *Classe perfettamente ordinata.*—Sia $u$ una classe non nulla (contenente effettivamente degli elementi) e sia $h$ un ordine degli $u$.

Diciamo che $(u, h)$ è una « classe *perfettamente ordinata* », quando:

(*a*) Esiste un elemento di $u$ che, rispetto all'ordine $h$, occupa il primo posto.

(*b*) Ogni elemento di $u$ che ha dei seguenti, ha l'immediatamente seguente.

---

(*) G. Cantor, loc. cit « Chiamiamo semplicemente ordinato un insieme $M$, quando fra i suoi elementi sussiste un determinato ordine di posto (Rangndung) per cui considerando due elementi qualunque $m_1$, $m_2$ l'uno prende il posto *inferiore* e l'altro prende il posto *superiore* e ciò in tal guisa che, se di tre elementi $m_1$, $m_2$ e $m_3$ è, per il posto, $m_1$ inferiore ad $m_2$ ed $m_2$ inferiore ad $m_3$, anche $m_1$ è, per il posto, inferiore ad $m_3$ ».

($c$) Qualunque sia l'elemento $x$ di $u$ si ha che: o $x$ non ha l'immediatamente precedente; o esiste un precedente $y$ di $x$, non avente l'immediatamente precedente, tale che gli $u$ che sono, ad un tempo, seguenti di $y$ e precedenti di $x$, formano una *classe finita*.

In simboli, scrivendo Kpo al posto di « classe perfettamente ordinata », si ha

4. $\mathrm{Kpo} = \mathrm{Ko} \frown \overline{(u,\, h)\,\varepsilon}\,\{u -\!= \Lambda :\cdot: x\,\varepsilon\,u\,.\,h|x = \Lambda -\!=_x \Lambda :\cdot:$
$x\,\varepsilon\,u\,.\,hx -\!= \Lambda\,.\supset_x : y\,\varepsilon\,hx\,.\,u \frown hx \frown h|y = \Lambda\,. -\!=_y \Lambda :\cdot: x\,\varepsilon\,u\,.\supset_x ::$
$y\,\varepsilon\,h|x\,.\,u \frown hy \frown h|x = \Lambda\,. =_y \Lambda\,.\cdot.\cup.\cdot.\,y\,\varepsilon\,h|x : m\,\varepsilon\,h|y\,.\,u \frown hm \frown h|y = \Lambda\,.$
$=_m \Lambda : (u \frown hy \frown h|x)\,\varepsilon\,\mathrm{Kfin} : -\!=_y \Lambda\}$ (*) (Def).

Il sig. G. Cantor chiama « classe *ben ordinata* », quella classe ordinata che sodisfa alle condizioni ($a$), ($b$). Avvi notevole differenza tra la classe ben ordinata e la classe perfettamente ordinata: sieno, p. es., $a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots,$ gli elementi di due classi numerabili; se consideriamo la classe ordinata

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ b_3,\ b_2,\ b_1$$

si vede facilmente che essa è classe ben ordinata ma non perfettamente ordinata, mentre

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

è classe perfettamente ordinata e, in conseguenza, anche bene ordinata.

§ 4. *Relazioni tra classi ordinate.* — Sieno ($u$, $h$), ($v$, $k$) classi ordinate. Scriviamo $(v, k)\,\mathrm{f}(u, h)$ al posto di « corrispondenza ordinata tra gli $u$ e i $v$ ordinati con i criteri $h$, $k$ ». Diciamo che $f$ è una di tali corrispondenze quando: $f$ è una corrispondenza *univoca*

(*) La definizione che ora abbiamo data, si presenta sotto una forma simbolica alquanto complicata perchè non abbiamo voluto introdurre dei segni per indicare, *immediatamente precedente* o *seguente* di $x$, *primo* o *ultimo* degli $u$, ecc. Tali segni sarà conveniente introdurre volendo trattare completamente la teoria delle classi ordinate.

*e reciproca* tra gli $u$ e i $v$; ed è tale che se $x$, $y$ sono elementi di $u$ e $x$ è uno dei seguenti rispetto ad $h$ di $y$, allora anche $fx$ è uno dei seguenti rispetto a $k$ di $fy$. In simboli si ha:

5. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\supset.\, (v, k)\, \mathrm{f}(u, h) = (v \,\mathrm{f}\, u)\, \mathrm{rcp} \frown \overline{f\varepsilon} \{x, y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon h y \,.\supset_{x,y}.\, fx \varepsilon k(fy)\}$. (Def).

Diciamo che $(u, h)$ è *equivalente* (*) a $(v, k)$ e scriviamo $(u, h) \backsim (v, k)$ quando tra $(u, h)$ e $(v, k)$ si può stabilire una corrispondenza ordinata. Diciamo che $(u, h)$ è *minore* di $(v, k)$, e scriviamo $(u, h) < (v, k)$, quando esiste una classe $w$ contenuta in $v$ e tale che $(u, h) \backsim (w, k)$ (**). In simboli abbiamo:

6. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} .\supset: (u, h) \backsim (v, k) .=. (v, k)\mathrm{f}(u, h) -= \Lambda$. (Def)

7. . . . . . $.\supset\therefore (u,h) < (v,k) .=: w \varepsilon \mathrm{K}v .(u,h) \backsim (w,k) . -=_w \Lambda$ (Def).

Dalle prop. 6, 7 si deducono facilmente le seguenti

$$(u, h), (v, k), (w, l) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\supset\therefore$$

8. $(u, h) \backsim (u, h)$
9. $(u, h) \backsim (v, k) \,.=.\, (v, k) \backsim (u, h)$
10. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\, (v, k) \backsim (w, l) \,.\supset.\, (u, h) \backsim (w, l)$
11. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\supset.\, (u, h) < (v, k)$
12. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\, (v, k) < (w, l) \,.\supset.\, (u, h) < (w, l)$
13. $(u, h) < (v, k) \,.\, (v, k) < (w, l) \,.\supset.\, (u, h) < (w, l)$
14. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\supset.\, u \backsim v$
15. $(u, h) < (v, k) \,.\supset.\, u < v$ (***).

§ 5. *Operazione* S. — Sieno $(u, h)$, $(v, k)$ classi ordinate tali che $u$, $v$ non abbiano elementi a comune. Col simbolo $(u, h) \mathrm{S} (v, k)$, che leggeremo « classe ordinata $(u, h)$ *seguìta* dalla classe ordinata $(v, k)$ » indicheremo la classe $u \smile v$ (somma logica di $u$ con $v$)

---

(*) Il sig. Cantor chiama *simili* (ähnlich) le due classi. Noi conserviamo il termine equivalenti, poichè essendo questo stato definito per due classi (Cfr: « Classi finite », l. c.) è attualmente privo di significato per due classi ordinate. Lo stesso dicasi per il segno $<$ da noi introdotte sulle « Classi finite ».

(**) Si osservi che ogni ordine dei $v$ è pure un ordine di ogni classe contenuta in $v$, (§ 1); quindi, se $w$ è una parte di $v$ si ha che $(w, k)$ è pure una classe ordinata.

(***) Cfr. « Classi finite », l. c.

ordinata con un criterio $l$ tale che, essendo $x$, $y$ elementi di $u \cup v$, l'affermazione $x \varepsilon l y$ equivalga a dire che: o $x$, $y$ sono elementi di $u$ e $x \varepsilon h y$, o $x$, $y$ sono elementi di $v$ e $x \varepsilon k y$, o $x$ è un $v$ e $y$ è un $u$. In simboli si ha

16. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, \supset .\, (u, h) \mathrm{S} (v, k) = \overline{\iota} [\overline{(u \cup v, l)} \varepsilon \{ l \varepsilon \mathrm{Ord}(u \cup v) :\cdot: x, y \varepsilon (u \cup v) \,.\, \supset_{x,y} :: x \varepsilon l y \,.=.\cdot\, x, y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon h y : \cup : x, y \varepsilon v \,.\, x \varepsilon k y : \cup : x \varepsilon v \,.\, y \varepsilon u \}]$ (Def).

Si dimostra assai facilmente che $(u, h) \mathrm{S} (v, k)$ è una classe ordinata univocamente determinata. Analogamente si ha che

17. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Kpo} \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, \supset .\, (u, h) \mathrm{S} (v, k) \varepsilon \mathrm{Kpo}$.

§ 6. *Tipo d'ordine.*—Se $(u, h)$ è una classe ordinata, scriviamo $\mathrm{T}'(u, h)$ al posto di «tipo d'ordine degli $u$ ordinati col criterio $h$». Consideriamo il $\mathrm{T}'(u, h)$ come un *ente astratto* funzione di $(u, h)$, che $(u, h)$ ha a comune con tutte le classi ordinate ad essa equivalenti; vale a dire poniamo

18. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . \supset : \mathrm{T}'(u, h) = \mathrm{T}'(v, k) .=. (u, h) \backsim (v, k)$ (Def).

Scrivendo T al posto di «tipo d'ordine», poniamo:

19. $\mathrm{T} = \overline{x \varepsilon} \{ (u, h) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\, x = \mathrm{T}'(u, h) . - =_{(u,h)} \Lambda \}$ (Def).

Dalle proposizioni 8, 9, 10 risulta subito che per i tipi d'ordine, l'eguaglianza definita dalla prop. 18, gode delle proprietà, *riflessiva, simmetrica* e *transitiva;* che cioè, se $a$, $b$ sono tipi d'ordine qualunque, si ha

$$a = a; \quad a = b \,.=.\, b = a; \quad a = b \,.\, b = c \,.\supset.\, a = c.$$

§ 7. *Maggiori e minori.* — Sieno $(u, h)$, $(v, k)$ classi ordinate. Diciamo che il $\mathrm{T}'(u, h)$ è *minore* del $\mathrm{T}'(v, k)$, o che il $\mathrm{T}'(v, k)$ è *maggiore* del $\mathrm{T}'(u, h)$, e scriviamo

$$\mathrm{T}'(u, h) < \mathrm{T}'(v, k), \quad \text{o,} \quad \mathrm{T}'(v, k) > \mathrm{T}'(u, h)$$

quando: esiste una parte $v_1$ di $v$ tale che $(u, h) \backsim (v_1, k)$; ma non esiste una parte $u_1$ di $u$ tale che $(u_1, h) \backsim (v, k)$. In virtù della prop. 7 si ha che

20. $(u, h), (v, k)\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,.\supset\therefore \mathrm{T}'(u, h) < \mathrm{T}'(v, k) :=: \mathrm{T}'(v, k) > \mathrm{T}'(u, h) :=: (u, h) < (v, k)\,.\,(v, k) -\!< (u, h).$ (Def)

Si hanno le prop. seguenti :

$a, b, c\,\varepsilon\,\mathrm{T}\,.\supset:$

21. $a = b\,.\,a < b\,.=.\,\Lambda$

22. $a < b\,.\,a > b\,.=.\,\Lambda$

23. $a = b\,.\,b < c\,.\supset.\,a < c$

24. $a < b\,.\,b < c\,.\supset.\,a < c.$

Le prop. 21, 22 esprimono che dei tre casi $a = b$, $a > b$, $a < b$ non possono verificarsene due ad un tempo; esse sono immediate conseguenze delle prop. del § 4. Delle stesse prop. è pure immediata conseguenza la prop. 23. Dimostriamo ora la prop. 24.—Sieno $(u, h)$, $(v, k)$, $(w, l)$ classi ordinate. Dalla prop. 13 abbiamo che

$(u, h) < (v, k).(v, k) < (w, l).(w, l) < (u, h).\supset:(v, k) < (u, h).\smile.$ $(w, l) < (v, k)$ (*);

trasportando nell'ipotesi i due termini della tesi e trasportando nella tesi il terzo fattore dell'ipotesi si ha,

$(u, h) < (v, k)\,.\,(v, k) -\!< (u, h)\,.\,(v, k) < (w, l)\,.\,(w, l) -\!< (v, k).$ $\supset.\,(w, l) -\!< (u, h);$

unendo alla tesi il fattore $(u, h) < (w, l)$, che è conseguenza dell'ipotesi, e ricordando la prop. 20, si ha la prop. 24.

Non ci è però possibile dimostrare che :

*A*. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{T}\,.\supset: a = b\,.\smile.\,a < b\,.\smile.\,a > b,$

che cioè, per due tipi d'ordine qualunque debba sempre verificarsi uno dei tre casi $a = b$, $a < b$, $a > b$. Operando come nella nostra Nota « Sopra un teorema del sig. G. Cantor » (**), riduciamo la prop. *A* al prodotto logico delle due seguenti :

I. $(u, h), (v, k)\varepsilon\,\mathrm{Ko}\,.\supset:(u, h) < (v, k)\,.\smile.\,(v, k) < (u, h)$

II. $(u, h), (v, k)\varepsilon\mathrm{Ko}.(u, h) < (v, k).(v, k) < (u, h).\supset.(u, h) \backsim (v, k).$

Se per un momento ammettiamo vera la prop. *A*, o almeno la II, dalla prop. 20 si deduce dopo semplici trasformazioni logiche che :

---

(*) Perchè se $a$, $b$, $c$ sono proposizioni si ha che $b\,.\supset.\,b \smile c$ e quindi, $a \supset b\,.\supset: a\,.\supset.\,b \smile c.$

(**) Atti Acc. Scienze. Torino, a. 1896.

*B*. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . \supset .\because . \mathrm{T}'(u, h) < \mathrm{T}'(v, k). =:(u, h) < (v, k). (u, h) -\backsim (v, k)$;
cioè che: il $\mathrm{T}'(u, h)$ è minore del $T'(u, h)$, quando questi non sono eguali ed esiste una parte $v_1$ di $v$ tale che $(u, h) \backsim (v_1, k)$. È sotto questa forma che il sig. Cantor (*) dà la definizione della relazione contenente il segno $<$. La nostra prop. 20 e la *B* sono equivalenti quando sussista la *A*, o almeno la II. Assumendo la *B* per definizione non sapremmo, senza ammettere la II, come dimostrare la prop. 24.

Dalla prop. 20 e dalla *B* si deduce assai facilmente che

*C*. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . (u, h) < (v, k) . \supset . \mathrm{T}'(u, h) \leqq \mathrm{T}'(v, k)$.

§ 8. *Numeri ordinali e somma.*—Diciamo « numero ordinale » (**), e scriviamo No, al posto di « tipo d'ordine di classe perfettamente ordinata »;

25. $\mathrm{No} = \mathrm{T}' \mathrm{Kpo}$. (Def)

Poniamo

26. $1 = \overline{\iota} \mathrm{T}' \{\mathrm{Ko} \frown \overline{(u, h)} \varepsilon (u \varepsilon \mathrm{Un})\}$ (Def)

cioè diciamo *uno* il tipo d'ordine delle classi ordinate $(u, h)$ tali che $u$ contiene un solo elemento. Risulta subito che

27. $1 \varepsilon \mathrm{No}$.

Definiamo la somma di due tipi d'ordine, e quindi anche di due numeri ordinali, ponendo

28. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . u \frown v = \Lambda . \supset . \mathrm{T}'(u, h) + \mathrm{T}'(v, k) = \mathrm{T}' \{(u, h) \mathrm{S} (v, k)\}$. (Def)

Osservando che due classi ordinate equivalenti seguite da una stessa classe, sono pure equivalenti, risulta che la somma ora definita è indipendente da $u, v, h, k$; di più dalla prop. 17 risulta

---

(*) *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* Zeitschr. für Phil., t. 91, 92.

(**) Il sig. Cantor dice veramente *numero ordinale* al posto di « tipo d'ordine di una classe ben ordinata ». La proprietà dei nostri numeri ordinali ci sembra concordino però con quelle dei numeri ordinali del sig. Cantor. Del resto ciò ha nessuna influenza sulle nostre conclusioni, per le quali basta sia provato che i nostri T sono precisamente i tipi d'ordine del sig. Cantor.

29. $a, b \varepsilon \mathrm{No} . \supset . a + b \varepsilon \mathrm{No}$

e la stessa prop. sussiste se al posto di No poniamo T (*).

§ 9. *Conseguenze della proposizione A.* — Ammettiamo ora vera la prop. $A$ e vediamo quali proposizioni si deducono logicamente da essa.

30. $a \varepsilon \mathrm{No} . \supset . a + 1 > a.$ $(A)$

*Dim.* Sia $(u,h)$ una classe perfettamente ordinata avente $a$ per numero ordinale e sia $v$ una classe contenente un solo elemento. Se poniamo

$$P = (u, h), \quad Q = (u, h) \mathrm{S} (v, \Lambda)$$

si ha che $P < Q$. La prop. 30 sarà dimostrata quando, in virtù della prop. $B$, riusciremo a dimostrare che $P - \backsim Q$. Se $P$ non ha un ultimo elemento, allora $P - \backsim Q$ perchè $Q$ ha un ultimo elemento che è $\bar{\iota} v$. Se $P$ ha un ultimo elemento $x$, allora esiste (§ 3) un elemento $y$ di $u$ che non ha l'immediatamente precedente e tale che, gli $(u \frown h y) \smile \iota y$ formano una classe finita di $n$ elementi; allora, se $P \backsim Q$, sono anche equivalenti le classi $P_1$, $Q_1$ che si ottengono da $P$, $Q$ sopprimendo gli ultimi $n$ elementi; ma ciò è assurdo perchè $P_1$ non ha ultimo elemento e $Q_1$ ha $y$ per ultimo elemento (**). Dunque $P - \backsim Q$ e, in conseguenza, sussiste la prop. 30. Si osservi che la prop. 30 non è vera in generale se, secondo il sig. Cantor, si chiama numero ordinale, il tipo d'ordine di una classe ben ordinata, come si deduce subito dall'esempio portato alla fine del § 3.

31. $a \varepsilon \mathrm{No} . \supset : x \varepsilon \mathrm{No} . a < x . x < a + 1 . =_x \Lambda$ $(A)$

Questa proposizione—che esprime non esistere un numero ordinale compreso fra $a$ e $a + 1$ — è facile conseguenza della prop. $C$.

Se $a$ è un numero ordinale, possiamo indicare con $\bar{\varepsilon} > a$ i numeri ordinali maggiori di $a$, perchè la relazione $x > a$ equivale alla

---

(*) Si intende che bisogna sia ammessa l'esistenza di almeno una classe infinita. (Cfr. Classi finite, l. c.). Del resto se non esistono classi infinite allora i *tipi d'ordine* sono i *numeri interi.*

(**) Si intende che qui facciamo uso del ***principio di induzione completa***, da noi dimostrato nella nostra Nota « Le classi finite ».

relazione $x \varepsilon (\overline{\varepsilon}>) a$. In conseguenza, se $\overline{\varepsilon}>$ è un criterio d'ordine per i numeri ordinali, allora (No, $\overline{\varepsilon}>$) indica la classe dei numeri ordinali ordinati in senso crescente.

Noi vogliamo ora dimostrare che

32. (No, $\overline{\varepsilon}>) \varepsilon$ Kpo (*A*).

*Dim.* Intanto (No, $\overline{\varepsilon}>$) è classe ordinata perchè le condizioni (*b*), (*c*) del § 1 sussistono in virtù delle prop. 24, 21 e 22; la condizione (*d*) equivale alla prop. *A*.—Le prop. 27, 30, 31 dimostrano che le condizioni (*a*), (*b*) del § 3 sono verificate per la classe ordinata (No, $\overline{\varepsilon}>$). Sia ora ($u$, $h$) una classe perfettamente ordinata il cui numero ordinale è $a$; sodisfacendo ($u$, $h$) alla condizione (*c*) del § 3 si ha che: o $a$ non ha l'immediatamente precedente (si intende nel criterio $\overline{\varepsilon}>$), o esiste un numero ordinale $x$ minore di $a$, non avente l'immediatamente precedente, e tale, che ripetendo su $x$ un numero finito di volte l'operazione $+1$ si trova $a$. Dunque (No, $\overline{\varepsilon}>$) sodisfa anche alla condizione (*c*) del § 3.

Essendo (No, $\overline{\varepsilon}>$) classe perfettamente ordinata, possiamo porre

33. $\Omega = \mathrm{T}'(\mathrm{No}, \overline{\varepsilon}>)$ (Def)

e si ha che

34. $\Omega \,\varepsilon\, \mathrm{No}$. (*A*)

Si può ora dimostrare che

35. $a \,\varepsilon\, \mathrm{No} \,.\supset.\, a \overline{\overline{<}}\, \Omega$ (*A*).

*Dim.* Sia ($u$, $h$) una classe perfettamente ordinata avente $a$ per numero ordinale. Sia ($v$, $k$) la classe ordinata ottenuta con le leggi seguenti: qualunque sia l'elemento $x$ di $u$, la classe $u \frown - hx$ sia un elemento di $v$, e $v$ non abbia che di tali elementi ($v$ risultà dunque, classe di classi); se $x$, $y$ sono elementi di $u$ e $x \varepsilon hy$ si abbia che $(u \frown - hx) \varepsilon k (u \frown - hy)$.

Risulta subito che $(u, h) \backsim (v, k)$ e quindi ($v$, $k$) è classe perfettamente ordinata il cui numero ordinale è $a$. Si ha pure facilmente, dalle proposizioni precedenti, che la classe dei numeri ordinali degli elementi di $v$, ordinata col criterio $k$, è una classe di numeri ordinali minori di $a$, perfettamente ordinata in senso crescente ed avente $a$ per numero ordinale; ma tale classe è minore di (No, $\overline{\varepsilon}>$) e quindi dalla prop. *C* risulta la prop. 35.

§ 10. *Conclusione.*—Se nella prop. 30 poniamo $\Omega$ al posto di $a$ e nella prop. 35 poniamo $\Omega + 1$ al posto di $a$, abbiamo, in virtù delle prop. 34, 26, 29,

$$\Omega + 1 > \Omega; \quad \Omega + 1 \,\overline{<}\, \Omega$$

che, per le prop. 21, 22, risultano contradittorie.

Ammettendo dunque la prop. *A*, siamo giunti ad un assurdo, e quindi risulta rigorosamente dimostrato, che esistono almeno due tipi d'ordine $a$, $b$ (e ne esistono certamente tra i numeri ordinali) tali che $a$ non è eguale, non è maggiore e non è minore di $b$.

Risulta dunque impossibile ordinare i tipi d'ordine in generale, e in particolare anche i numeri ordinali, in senso crescente: vale a dire; i tipi d'ordine non possono fornire per le classi ordinate una classe *campione*, come per le classi finite e numerabili la fornisce la classe dei numeri interi ordinata in senso crescente (*). Ci sembra che così uno dei più importanti scopi dei tipi d'ordine venga necessariamente a mancare.

Torino, febbrajo 1897.

C. Burali-Forti.

(*) Nemmeno la classe dei tipi d'ordine che non sono numeri ordinali, può fornire la classe ordinata campione per le classi ordinate non perfettamente ordinate. Si può infatti dimostrare assai facilmente che per i T − No, o non è vera la prop. *A*, o non è vera la proposizione seguente: « Data una Ko − Kpo esistono due T − No $x$, $y$ tali, che i tipi d'ordine non minori di $x$ e non maggiori di $y$ ordinati in senso crescente, formano una classe ordinata equivalente a quella data ». Si capisce che questa prop. è necessario sia verificata insieme alla *A*, affinchè la classe dei T − No possa essere una classe campione per le Ko − Kpo.