

## Entwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ in eine unendliche Reihe auf elementarem Wege.<sup>1)</sup>

Von K. Meusburger in Innsbruck.

Ein sehr wertvolles Ergebnis der Differentialrechnung ist die Entwicklung des  $\sin x$  und des  $\cos x$  in eine Reihe. Dasselbe Resultat lässt sich jedoch ziemlich einfach auch auf elementarem Wege erreichen. Im Anschlusse an eine Anmerkung im Werke von Dr. O. Stolz — Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I. Th. pag. 102 — will ich diese Entwicklung hier vorführen.

Eine eindeutige, für alle endlichen Werte stetige Funktion sei definiert durch die Gleichung:

$$(1) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y);$$

für  $y=0$  geht diese Gleichung in folgende über:

$$2f(x) = 2f(x)f(0),$$

wobei  $f(x) \geq 0$ , denn  $f(x) = 0$  hat keine Bedeutung.

Durch  $f(x)$  kann also dividiert werden, woraus sich ergibt:

$$(2) \quad f(0) = 1.$$

Setzen wir jetzt in (1)  $x=0$ , so erhalten wir:

$$(3) \quad \begin{aligned} f(y) + f(-y) &= 2f(y), \\ f(y) &= f(-y). \end{aligned}$$

Für den Fall, dass  $f(x)$  sich von unten herauf der Grenze 1 nähert, hat bereits Cauchy (Cours d'Anal. V. §. 2) nachgewiesen:

$$(4) \quad f(x) = \cos \lambda x,$$

wobei  $\lambda$  vorläufig noch unbestimmt ist.

Wir wollen nun annehmen,  $f(x)$  ließe sich in eine im Intervalle  $-R < x < R$  convergente Reihe entwickeln, deren Coefficienten sind:  $a_0, a_1, \dots$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

<sup>1)</sup> In dem vor einigen Wochen erschienenen Buche von Dr. O. Biermann „Elemente der höheren Mathematik“ pag. 336 findet sich eine ähnliche Ableitung mit Hilfe derselben Funktionalgleichung.

dann ist  $f(-x)$  offenbar gleich der folgenden Reihe:

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots$$

Da nach (3)  $f(x) = f(-x)$  erhalten wir durch Subtraction der beiden Reihen:

$$0 = 2a_1 x + 2a_3 x^3 + \dots$$

Falls also eine solche Reihe existiert, sind die Coefficienten der ungeraden Potenzen von  $x$  alle Null:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0.$$

Aus  $f(0) = 1$  folgt ferner:

$$a_0 = 1.$$

Wir haben also folgende Reihe:

$$(5) \quad f(x) = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

Um diese Coefficienten  $a_2, a_4, \dots$  zu bestimmen, nehmen wir  $y$  gehörig klein an, so dass wir in der folgenden Reihenentwicklung die Klammern fortlassen und die Glieder beliebig ordnen können. Es sei

$$|y| < R - |x|$$

dann erhalten wir folgende convergente Reihen:

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{1}{2!}f''(x)y^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)y^3 + \dots$$

$$f(x-y) = f(x) - f'(x)y + \frac{1}{2!}f''(x)y^2 - \frac{1}{3!}f'''(x)y^3 + \dots$$

$$2f(x)f(y) = 2f(x) + 2\frac{f''(x)}{2!}y^2 + 2\frac{f''''(x)}{4!}y^4 + \dots$$

Wenn wir für  $f(y)$  nach (5) den Wert einsetzen, erhalten wir:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x) \{1 + a_2 y^2 + a_4 y^4 + \dots\}.$$

Da diese Beziehung aber für unendlich viele Werte von  $y$  im angegebenen Intervalle gilt, müssen die Coefficienten einander gleich sein:

$$f(x) \cdot a_2 = \frac{f''(x)}{2!}$$

$$f(x) \cdot a_4 = \frac{f''''(x)}{4!}$$

.....

Daraus ergibt sich:

$$(6) \quad 2a_2 f(x) = f''(x).$$

Bilden wir jetzt die zweite Ableitung von  $f(x)$ , so erhalten wir:

$$f'(x) = 2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 12a_4 x^2 + 30a_6 x^4 + \dots$$

Nach (6) haben wir also folgende zwei identische Reihen:

$$2a_2 + 2a_2^2 x^2 + 2a_2 a_4 x^4 + \dots + 2a_2 a_{2n} x^{2n} + \dots$$

$$2a_2 + 4.3a_4 x^2 + 6.5a_6 x^4 + \dots + (2n+2)(2n+1)a_{n+2} x^{2n} + \dots$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten erhalten wir:

$$2a_2^2 = 4.3a_4; \quad a_4 = \frac{(2a_2)^2}{4!}$$

$$2a_2 a_4 = 6.5a_6; \quad a_6 = \frac{2a_2}{6.5} \cdot \frac{(2a_2)^2}{4!} = \frac{(2a_2)^3}{6!}$$

.....

Durch den Schluss von  $n$  auf  $n+1$  können wir die allgemeine Gültigkeit dieser Beziehung leicht nachweisen:

Angenommen es gelte für  $2n$

$$a_{2n} = \frac{(2a_2)^n}{(2n)!}.$$

so ergibt sich aus den beiden identischen Reihen:

$$2a_2 a_{2n} = (2n+2)(2n+1)a_{2n+2}$$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{2a_2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot a_{2n} = \frac{2a_2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(2a_2)^n}{(2n)!} = \\ &= \frac{(2a_2)^{n+1}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

Dieses Gesetz gilt also allgemein.

Unsere Reihe lautet jetzt:

$$(7) \quad f(x) = 1 + a_2 x^2 + \frac{(2a_2)^2}{4!} x^4 + \dots + \frac{(2a_2)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

Diese für  $\cos \lambda x$  angenommene Reihe ist eine convergente, ja sogar eine beständig convergente Reihe. Da aber  $\cos \lambda x$  nie größer werden kann als 1, muss  $a_2$  negativ sein. Setzen wir:

$$2a_2 = -\mu,$$

so erhalten wir folgende Reihe:

$$(8) \quad \begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{\mu}{2}x^2 + \frac{\mu^2 x^4}{4!} - \frac{\mu^3 x^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\mu}{2}x^2 \left(1 - \frac{\mu x^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{\mu^3 x^6}{6!} \left(1 - \frac{\mu x^2}{7 \cdot 8}\right) \dots \end{aligned}$$

Wenn wir diese Klammerausdrücke positiv machen, ist  $f(x)$  gewiss immer kleiner als 1; ist der erste Klammerausdruck positiv, so sind es die andern gewiss auch.

$$1 - \frac{\mu x^2}{12} > 0; \quad 1 > \frac{\mu x^2}{12}; \quad x < \sqrt{\frac{12}{\mu}}.$$

Setzen wir jetzt noch

$$\lambda x = y; \quad x = \frac{y}{\lambda},$$

so erhalten wir nach (4) und (8)

$$\cos y = 1 - \frac{\mu y^2}{2 \lambda^2} + \frac{\mu^2 y^4}{4! \lambda^4} \dots$$

Setzen wir ferner

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \rho,$$

so ergibt sich

$$(9) \quad \cos y = 1 - \frac{\rho}{2!} y^2 + \frac{\rho^2}{4!} y^4 \dots$$

Für  $y$  können wir, da es doch eine ganz beliebige Veränderliche ist, wieder  $x$  schreiben. Jetzt handelt es sich darum,  $\rho$  zu bestimmen. Die Formel (9) gilt für jeden Wert von  $x$ , um aber  $\rho$  bequem berechnen zu können, wollen wir annehmen

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

und unter dieser Voraussetzung wollen wir jetzt  $\rho$  berechnen.

Nach (9) haben wir für  $\cos^2 x$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - 2 \left\{ \frac{\rho x^2}{2!} - \frac{\rho^2 x^4}{4!} + \dots \right\} + \left\{ \frac{\rho x^2}{2!} - \dots \right\}^2 \\ &= 1 - \rho x^2 + \left( \frac{2\rho^2}{4!} + \frac{\rho^2}{4} \right) x^4 + \dots = 1 - \rho x^2 + \frac{\rho^2}{3} x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \sin x &= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\rho x^2 - \frac{\rho^2 x^4}{3} + \dots} \\ &= x \sqrt{\rho} \cdot \sqrt{1 - \frac{\rho x^2}{3} + \dots} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sqrt{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho x^2}{3} + \dots}$$

Da die Function  $f(x)$  aber für alle endlichen Werte von  $x$  stetig ist, können wir auch folgenden Grenzübergang machen

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x=0} V_{\rho} \cdot \sqrt{1 - \frac{\rho x^2}{3} + \dots} = V_{\rho};$$

daraus folgt also:

$$V_{\rho} = 1; \quad \rho = 1.$$

Für  $\cos x$  erhalten wir also die Reihe:

$$(11) \quad f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Dies gilt für alle Werte von  $x$ , denn die frühere beschränkende Annahme wurde lediglich dazu gemacht, den konstanten Factor  $\rho$  leichter berechnen zu können.

Jetzt bilden wir, um die Ableitung des  $\cos x$  zu erhalten,  $\cos(x + \xi)$ ; allerdings gilt dies nur für  $|\xi| < x$  (wobei  $x$  eine bestimmte Zahl bedeutet), was aber nichts schadet, da es sich nur um den Coefficienten handelt, den  $\xi$  in der Entwicklung  $\cos(x + \xi)$  hat.

Nach (10) haben wir folgende Beziehung

$$\sin x = \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots} = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots\right)^{\frac{1}{2}} = x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

wobei  $b_2, b_3 \dots$  nicht weiter berechnete Coefficienten sind.

$$\begin{aligned} \cos(x + \xi) &= \cos x \cos \xi - \sin x \sin \xi \\ &= \cos x \left(1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} \dots\right) - \sin x (\xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + \dots) \\ &= \cos x - \sin x \cdot \xi - \left(\frac{\cos x}{2!} + b_2\right) \xi^2 + \dots \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\begin{aligned} D_x \cos x &= -\sin x, \\ D_x \cos x &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots \end{aligned}$$

Für  $\sin x$  ergibt sich also folgende Reihe:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$