

**2. Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der  
Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen.  
III.;  
von Reinhold Fürth.**

(Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

§ 1.

In zwei unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeiten<sup>1)</sup> habe ich mich mit der Frage beschäftigt, inwieweit man berechtigt ist, aus Messungen der Brownschen Bewegung an einem, in einer Flüssigkeit oder einem Gase suspendierten Einzelteilchen auf die Beweglichkeit dieses Teilchens zu schließen. Die Resultate der Untersuchung an Partikeln in Gasen ließen, infolge unserer derzeitigen Unkenntnis über die genaue Form des Widerstandsgesetzes keinen eindeutigen Schluß darüber zu, ob die nach der Einsteinschen Formel der Brownschen Bewegung aus dieser berechnete Beweglichkeit mit der gegenüber einer geradlinigen Bewegung identisch sei, insbesondere, ob sie daher zur Ladungsbestimmung an solchen Partikeln herangezogen werden könne.

Da nun die Ermittlung des Widerstandsgesetzes für sehr kleine Teilchen, wie es scheint, mit beträchtlichen experimentellen Schwierigkeiten verbunden ist, schien es mir zunächst vorteilhaft, zu untersuchen, ob die als Beweglichkeit bezeichnete Größe wirklich eine dem Partikel bzw. dem umgebenden Medium eigene, von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängige Größe darstelle oder mit anderen Worten, ob die Gleichung

$$(1) \quad v = B \cdot K$$

( $v$ : Geschwindigkeit,  $B$ : Beweglichkeit,  $K$ : Kraft) für einen genügend großen Bereich der Variablen  $v$  und  $K$  mit konstantem  $B$  erfüllt sei.

Dies wurde nun in mehrfacher Weise sicherzustellen getrachtet und zwar auf folgenden Wegen: 1. Durch Messung der Geschwindigkeit unter dem Einflusse verschiedener Kräfte

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59. S. 409. 1919; 60. S. 77. 1919.

an ein und demselben Partikel in möglichst großem Variabilitätsbereich; 2. durch Untersuchung der Bewegung unter dem Einfluß einer periodischen Kraft von großer Frequenz und gleichzeitiger Messung von Geschwindigkeiten nach der Methode 1 an einem und demselben Partikel, um zu erproben, ob auch gegenüber einer solchen, rasch oszillierenden Bewegung die Gleichung (1) mit derselben Konstanten gültig sei, wie gegenüber solchen mit konstantem  $K$ , und schließlich 3. durch Messung der Brownschen Bewegung nach der Methode der „mittleren doppelseitigen Erstdurchgangszeiten“ und Messungen nach Art der obigen 1 und 2 an einem und demselben Partikel.

Durch letztere Art der Beobachtung war es auch möglich, eine neuerliche Vergleichung der Beweglichkeitsbestimmungen, wie sie aus den verschiedenen Widerstandsgesetzen einerseits und aus der Theorie der Brownschen Bewegung andererseits sich ergeben, durchzuführen, sowie einen neuerlichen Beitrag zur Frage nach der Größe der an solchen Partikeln auftretenden Ladungen zu liefern.

## § 2.

Die experimentelle Anordnung war, was den optischen Teil betrifft, im Prinzip dieselbe, wie sie in Teil II, S. 79, beschrieben und abgebildet ist. Jedoch geschah diesmal die Konzentration des Bogenlichtes durch das Mikroskopobjektiv  $aa$  statt des  $AA$  von Zeiss. Die Beobachtungsoptik blieb dieselbe, nämlich Objektiv  $AA$ , Okular 4 von Zeiss, mit einer 90fachen Vergrößerung. Als Okularmikrometer fand entweder ein Okularnetz mit  $3 \cdot 4$  quadratischen Feldern von 0,25 mm Seitenlänge Verwendung, der bei der verwendeten Optik eine Objektgröße von 0,04 mm entsprach oder ein Okularmikrometer mit  $50 \cdot 50$  quadratischen Feldern von 0,1 mm Seitenlänge, denen die wahre Objektgröße 0,016 mm zugeordnet war, beide von Zeiss.

Der früher verwendete Kondensator war durch eine zweckmäßigere Konstruktion ersetzt worden. Die Distanz seiner Platten wurde mikroskopisch mittels einer schwachen Vergrößerung und eines Okularmikrometers zu  $d = 0,204$  cm bestimmt.

Als Teilchenmaterial diente diesmal ausschließlich im Gleichstromlichtbogen in gut getrockneter Luft zerstäubtes Feinsilber.

Die Registrierung der Beobachtungen geschah, wie früher vermittelt Metronom, Morsetaster und elektromagnetischem Doppelstiftschreiber.

Eine Änderung hatte jedoch die elektrische Anordnung erfahren, die dazu diente, dem Kondensator die zur Bewegung der Teilehen notwendige Spannung zuzuführen. Sie ist schematisch in der folgenden Figur wiedergegeben.

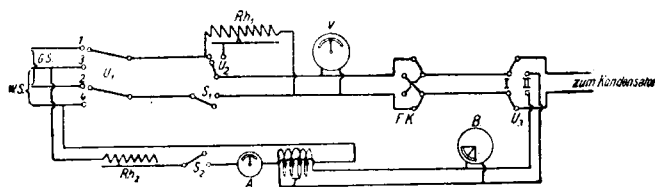


Fig. 1.

Durch Umlegen des zweipoligen Umschalters  $U_1$  auf das Klemmenpaar 1, 2 bzw. 3, 4 kann zunächst dem Kondensator entweder die konstante Spannung einer Akkumulatorenbatterie von 120 Volt oder die Wechselspannung des Prager Lichtleitungsnetzes von etwa 125 Volt zugeführt werden. Vermittelt des Ruhstrat-Regulierwiderstandes  $Rh_1$  kann man nun durch Schließen des Schlüssels  $S_1$  bis zum oben bezeichneten Höchstausmaße beliebige Gleich- oder Wechselspannungen an die Kondensatorplatten anlegen, wenn der Wippenumschalter  $U_3$  in der Stellung I steht. Vermittelt des Umschalters  $U_2$  kann man nach Bedarf mit einem Griff entweder die variable oder die volle zur Verfügung stehende Spannung anlegen, die mittels des Voltmeters  $V$  (Hitzdrahtvoltmeter für Gleich- und Wechselstrom von Hartmann und Braun) zur Messung gelangt.<sup>1)</sup> Der durch ein Pedal betätigbare Hg-Kommutator  $F \cdot K$  dient, wie üblich, zum raschen Verändern der Feldrichtung.

Um auch mit Wechselstrom höherer Spannung arbeiten zu können, diente der aus den Spulen eines Rumkorffinduktors bestehende Wechselstromtransformator  $T$ , in dessen Primärspule der Wechselstrom durch einen Regulierwiderstand  $Rh_2$

1) Durch einen in der Figur nicht gezeichneten Umschalter konnte dabei nach Bedarf jeder der beiden verschiedenen Meßbereiche des Instrumentes zur Anwendung kommen.

und den Schlüssel  $S_2$  eingeleitet wird; zu seiner Messung dient das Weicheisenamperemeter  $A$ . Von der Sekundärwicklung von  $T$  führen zwei Drähte zu dem Umschalter  $U_3$ , der somit in der Stellung II den Kondensator mit der Hochspannung verbindet. Ihre Messung erfolgt mittels eines Braunschen Elektrometers  $B$ . Auf diese Weise wurde es ermöglicht, mit Wechselspannungen bis zu 2500 Volt arbeiten zu können.

Da mir die empirisch geeichte Skala des Braunschen Elektrometers nicht völlig verläßlich schien, wurde eine Eichung des Instrumentes auf folgende Methoden vorgenommen. 1. Durch Vergleich mit den Angaben eines statischen Voltmeters nach dem Prinzip von Thomson, mit zwei Empfindlichkeitsstufen. 2. Durch gleichzeitige Messung von effektiven Wechselspannungen mittels des Braunschen Elektrometers und eines Hitzdrahtvoltmeters von Hartmann und Braun mit vorgeschaltetem hohen Widerstande, um es für einen höheren Meßbereich gebrauchen zu können. Durch Messung des vorgeschalteten Widerstandes einerseits und des inneren Widerstandes des Voltmeters anderseits; mit Berücksichtigung der Impedanzwirkung konnten so die Angaben des Voltmeters auf den höheren Meßbereich umgerechnet werden. Die Messung wurde mit zwei verschiedenen Vorschaltwiderständen ausgeführt. 3. wurden zwei Zeigerstellungen des Braunschen Elektrometers verglichen mit den Angaben eines absoluten Elektrometers nach Thomson (mit Schutzring). Die Resultate wurden graphisch ausgeglichen und zur Herstellung einer Korrekturtabelle für das Braunsche Elektrometer benützt. Da die Übereinstimmung der Eichergebnisse nach diesen Methoden einigermaßen zu wünschen übrig ließ, muß den Spannungsangaben für die Hochspannung eine gewisse Ungenauigkeit zugute gehalten werden.

In Ermangelung eines Frequenzmessers wurde ferner die Frequenz des verwendeten Wechselstromes vermittelt eines Telephones bestimmt, dessen Ton dann vermittelt eines Monochordes und einer Normalstimmgabel auf Schwingungen pro Sek. reduziert wurde. Es ergab sich für die Frequenz

$$\nu = 50 \text{ per/sec.}$$

Die Ladung der Partikel erfolgte, wenn sie nicht an und für sich geladen erschienen, mit einem Radiumpräparat.

## § 3.

Es wurde zunächst versucht, ob die an einem und demselben Partikel durch Verwendung verschiedener Gleichspannungen hervorgerufenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten zu dem gleichen Wert für die Beweglichkeit  $B$  führen, eine Untersuchung, die meines Wissens explizit für Teilchen dieser Größenordnung noch nicht durchgeführt wurde. Zu diesem Zwecke wurde ein geladenes Ag-Teilchen nach Einstellen einer bestimmten Gleichspannung durch abwechselndes Umliegen des Kommutators F. K. einigemal auf- und abgeführt und die Durchgänge durch zwei Horizontalstriche des Mikrometers 1 vermittelt des Morseapparates registriert, sowie die Spannung am Voltmeter abgelesen. Dann wurde der Vorgang für eine zweite Spannung wiederholt usw.

Aus Gleichung (6) in Teil II dieser Arbeit S. 83 geht hervor, daß man aus den gemessenen Fall- bzw. Steiggeschwindigkeiten das Produkt  $e B$ , das für ein und dasselbe Partikel eine Konstante sein soll, berechnen kann nach der Formel

$$(2) \quad e B = \frac{v_f + v_s}{2 E}$$

( $E$ : elektrische Feldstärke im Kondensator), während sich aus Gleichung (5) a. a. O. die ebenfalls konstante Größe

$$(3) \quad B m g = \frac{v_f - v_s}{2}$$

bestimmen lassen muß.

Da es sich uns zunächst nur um relative Vergleichen handelt, sind unter den Angaben der folgenden Tabelle die Geschwindigkeiten als Mikrometerteile pro Sekunde und die Feldstärken als die am Voltmeter abgelesenen Spannungen in Volt eingesetzt.

Die Tab. 1 enthält die Meßergebnisse für sämtliche beobachtete Teilchen. Man ersieht aus ihr, daß in der Tat mit ziemlicher Genauigkeit das Produkt  $e B$  für jedes Teilchen eine Konstante ist, während die analogen Produkte  $B m g$  zwar keinen systematischen Gang mit der verwendeten Spannung, wohl aber eine große Streuung bezüglich der Fehler aufweisen, was sich darauf zurückführen läßt, daß die erstere Größe durch Summation, die letztere hingegen durch Differenzbildung zweier mit Fehlern behafteter Größen hervorgeht,

wodurch sich, wie man unmittelbar sieht, im letzteren Falle die relativen Fehler vergrößern.

Tabelle 1.<sup>1)</sup>

Nr.	$v_f$	$v_s$	$E$	$e B$	$Bmg$	$\overline{e B}$ (Mittel)	$\overline{Bmg}$ (Mittel)
1	0,588	0,214	12,02	0,0334	0,374	0,0314	0,239
	0,658	0,483	19,0	0,0300	0,175		
	0,926	0,758	27,4	0,0307	0,168		
2	0,233	0,110	7,8	0,0220	0,123	0,0234	0,145
	0,357	0,265	14,0	0,0222	0,092		
	0,714	0,493	23,2	0,0261	0,219		
3	0,690	0,588	22,4	0,0285	0,102	0,0288	0,125
	0,455	0,286	12,2	0,0304	0,169		
	0,280	0,137	7,0	0,0298	0,143		
4	0,156	0,068	4,2	0,0266	0,088	0,0091	0,195
	0,272	0,108	23,4	0,0081	0,164		
	0,405	0,179	28,8	0,0101	0,226		
5	0,361	0,226	11,2	0,0261	0,135	0,0272	0,117
	0,274	0,138	7,2	0,0286	0,136		
	0,211	0,0725	4,8	0,0295	0,138		
6	0,667	0,505	23,8	0,0246	0,162	0,0110	0,188
	0,704	0,617	25,6	0,0257	0,087		
	0,541	0,488	19,4	0,0265	0,053		
7	0,476	0,323	14,0	0,0284	0,154	0,0388	0,056
	0,341	0,270	10,8	0,0283	0,071		
	0,448	0,165	27,2	0,0112	0,283		
8	0,382	0,116	19,6	0,0127	0,266	0,0110	0,188
	0,260	0,082	14,2	0,0120	0,178		
	0,0967 (fr. Fall)						
9	(Schwebespann.)		10,4	0,0093	0,097	0,0388	0,056
	0,377	0,225	27,8	0,0108	0,152		
	0,281	0,126	20,2	0,0101	0,155		
10	0,549	0,500	13,8	0,0380	0,049	0,0388	0,056
	0,459	0,407	10,8	0,0400	0,052		
	0,294	0,294	7,2	0,0407	0,000		
11	0,206	0,137	4,4	0,0390	0,069	0,0388	0,056
	0,633	0,676	17,0	0,0385	0,043		
	0,990	0,909	24,9	0,0380	0,081		
12	0,546	0,450	13,4	0,0371	0,096		

Dieser Umstand muß berücksichtigt werden, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, aus  $Bmg$  durch Vermittelung eines Widerstandsgesetzes die Beweglichkeit  $B$  und damit die Ladung  $e$  des Teilchens ermittelt, insbesondere, wenn es sich um die Entscheidung der Frage handelt, ob diese Ladung ihrer Konstitution nach atomistisch oder kontinuierlich teil-

1) Die angegebenen Werte für  $v_f$  und  $v_s$  sind Mittelwerte aus je 9—15 Einzelmessungen.

bar ist. Wie die Spalte 6 der Tab. 1 zeigt und wie auch aus den Resultaten von Teil II dieser Arbeit hervorgeht, erscheint es kaum möglich, aus Messungen dieser Art irgend etwas Positives zur Entscheidung der Frage beizutragen.

#### § 4.

Wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, schien es erwünscht, zu erproben, ob das Gesetz (1) auch dann noch erfüllt sei, wenn es sich nicht um die relativ kleinen und gleichförmigen Geschwindigkeiten des vorigen Paragraphen handelt, sondern um eine rasch oszillierende Bewegung, wie sie hervorgerufen werden kann, wenn man das geladene Teilchen einem elektrischen Wechselfelde hoher effektiver Spannung aussetzt.

Solche Messungen sind bereits früher von Frl. A. Snethlage<sup>1)</sup> auf einem, dem meinigen ganz analogen Wege angestellt worden und führten zu dem von der Verfasserin selbst allerdings als ziemlich roh bezeichneten Resultat, daß die Beweglichkeit gegenüber einer solchen schwingenden Bewegung für ein und dasselbe Teilchen größer sei, als gegenüber einer gleichförmigen Bewegung. Es erschien mir wünschenswert, diese Messungen unter Variierung der Versuchsbedingungen und im Zusammenhang mit den anderweitigen hier durchgeführten Untersuchungen nochmals zu wiederholen.

Die Theorie dieser Art der Beobachtung ist die folgende: Die Teilchen führen unter dem Einflusse der periodischen Kraft des Feldes, die wir als einfache Sinusfunktion annehmen wollen, eine erzwungene Bewegung, ohne Richtkraft aus, mit einem Widerstande, der aus Gleichung (1) entnommen, zu folgender Bewegungsgleichung führt

$$(4) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{1}{B} \frac{dx}{dt} + A \sin 2 \pi \nu t,$$

worin  $m$  die Masse des Teilchens,  $\nu$  die Frequenz des verwendeten Wechselstromes und  $A$  die Amplitude der elektrischen Feldkraft bedeutet.<sup>2)</sup> Die Integration dieser Differentialgleichung

1) A. Snethlage. Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amst. 25. S. 1173. 1917.

2) Hierbei ist zu berücksichtigen, daß eigentlich infolge des Umstandes, daß es sich hier um eine periodische Bewegung in einer zähen Flüssigkeit handelt, unter  $m$  die sog. „hydrodynamische Masse“ und unter  $B$  die Beweglichkeit gegenüber periodischer Bewegungen zu verstehen wären, die sich von den Werten gegenüber gleichförmiger Bewe-

führt zu folgendem Wert für die Amplitude  $H$  der Teilchenschwingung

$$(5) \quad H = \frac{A}{2\pi \nu m \sqrt{(2\pi \nu)^2 + \frac{1}{m^2 B^2}}}.$$

In dem für die Praxis allein wichtigen Fall ist nun  $(2\pi \nu)^2$  gegen  $\frac{1}{m^2 B^2}$  völlig zu vernachlässigen, so daß also Gleichung (5) die einfache Gestalt annimmt

$$(6) \quad H = \frac{A B}{2\pi \nu}.$$

Führen wir nun statt  $A$  die am Elektrometer ablesbare effektive Spannung  $V$  ein, die mit  $A$  durch die Beziehung zusammenhängt

$$(7) \quad A = \frac{V \cdot \sqrt{2} \cdot e}{d}$$

( $d$ : Plattendistanz im Kondensator), so erhalten wir schließlich für die Amplitude der Schwingung den Ausdruck

$$(8) \quad H = \frac{1}{\nu \pi d \sqrt{2}} \cdot V \cdot e B,$$

woraus sich bei Kenntnis der Größen  $V$  und  $H$  das Produkt  $e B$  berechnen und mit dem aus den Geschwindigkeiten  $v$ , und  $v_p$  erfließenden vergleichen läßt.

Die betreffenden Messungen wurden nun so durchgeführt, daß ein geeignetes Teilchen durch Anwendung von Gleichspannung zunächst im Gesichtsfelde einigemal hin und her geführt und seine Geschwindigkeit mittels des Okularrasters 2 und des Morseapparates gemessen wurde, worauf man durch Umlegen des Umschalters  $U_3$  eine Wechselspannung an den Kondensator anlegte, die den leuchtenden Punkt des Teilchens in eine vertikale Lichtlinie von der Länge  $2H$  auseinanderzog. Die Länge dieser Linie wurde mittels des Okularrasters gemessen, was jedoch, da das Teilchen im Gesichtsfelde nicht ruhig bleibt, sondern langsam nach aufwärts wandert, nur mit einer Genauigkeit von  $\pm 1$  Teilstrich des Mikrometers zu erzielen ist.

Um zunächst die Proportionalität von  $H$  mit der Größe der effektiven Wechselspannung zu erweisen, wurden einige Messungen in der Weise angestellt, daß ein und dasselbe Teilchen

ung unterschieden (vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamik, 1907, S. 726, Formel 26). Wie jedoch eine Überschlagsrechnung zeigt, sind die dadurch verursachten Abweichungen in unserem Falle ohne Belang.



verschiedenen Wechsellspannungen ausgesetzt und die jeweilige Amplitude gemessen wurde. Die Tab. 2 enthält in der ersten Spalte die Protokollnummer, in der zweiten die Amplitude in Mikrometerpartes, in der dritten die effektiven Spannungen in Volt und in der vierten den Quotienten beider Größen, der nach der Theorie konstant sein soll, was, wie man sieht, innerhalb der Fehlergrenzen in der Tat zutrifft.

Tabelle 2.

Nr.	$2H$	$V$	$V/2H$
8	9	2100	233
	7	1630	232
	6	1420	235
9	5	2150	431
	4	1890	472
	3.5	1630	465
10	2	580	288
	3	1000	332
11	1.5	630	420
	2.5	1000	398
25	2	630	314
	3	970	323
	5—6	1450	286—238
	8	2290	286

Die in der folgenden Tab. 3 enthaltenen Messungen wurden auf die oben beschriebene Weise angestellt und enthalten in der ersten Spalte die Protokollnummer, in der zweiten und dritten die Fall- und Steiggeschwindigkeiten in Mikrometerteilen pro Sekunde, sowie in der vierten die Spannungen in Volt bei der Bewegung im Gleichfelde, in der fünften Kolonne die Amplituden und in der sechsten die Spannungen bei der Bewegung im Wechselfelde, schließlich in der siebenten und achten Kolonne die aus diesen beiden Arten der Bewegung erfließenden Werte für  $eB$ , bezeichnet als  $(eB)_g$  bzw.  $(eB)_w$  in absolutem Maße.

Man sieht, daß in den meisten Fällen die Differenz zwischen den so gewonnenen Werten von  $(eB)_g$  und  $(eB)_w$  in der Größenordnung der durch die Angaben des Elektrometers und der Ablesung der Amplituden bedingten Fehler liegt. Auffallend ist jedoch immerhin die Tatsache, daß sämtliche beobachteten  $(eB)_w$  größer als  $(eB)_g$  sind, in Übereinstimmung mit den a. a. O. erwähnten Beobachtungen von Snethlage.

Tabelle 3.1)

Nr.	$v_f$	$v_s$	$V_g$	$2H$	$V_w$	$(eB)_g \cdot 10^3$	$(eB)_w \cdot 10^3$
12	2,51	1,12	10,8	2,5	1575	16,45	17,2
13	1,69	1,02	7,0	3	1575	19,02	20,8
14	3,41	1,61	11,2	3—4	1575	22,0	20,8—27,6
15	5,30	3,70	10,6	3	1575	41,5	41,5
16	4,59	2,24	8,8	6—7	1520	38,0	43,0—50,0
17	3,83	1,15	8,8	5	1575	27,8	34,5
18	4,55	2,17	8,8	6	1575	37,5	41,5
19	4,57	3,46	12,8	7—8	2150	30,6	35,3—40,4
20	4,52	3,70	15,0	7	2625	26,9	29,0
21	1,95	1,69	5,4	7—8	2150	33,0	35,3—40,5
22	2,66	2,14	18,6	1,5	735	12,65	22,0
23	2,70	1,00	20,6	1	755	8,80	14,41
24	3,70	1,81	9,8	2,5	775	27,6	34,6
25	3,70	1,93	28,7	$V/H$ (mittel)		296 <sup>2)</sup>	33,7—45,8
26	4,27	2,91	18,3	2	745	19,21	28,8

Fraglich muß es jedoch erscheinen, ob man berechtigt ist, aus dieser Tatsache einen Schluß auf die nicht strenge Gültigkeit der Gleichung (1) bei so raschen Bewegungen zu ziehen, da ja die Annahme, daß die Wechsellspannung eine reine Sinusfunktion sei, in unserem Falle sicher nicht gerechtfertigt ist, vielmehr streng genommen auch noch die überlagerten Oberschwingungen berücksichtigt werden müßten. Es ist möglich, daß die beobachteten Abweichungen auf diese Vernachlässigung zurückzuführen sind.

Auf jeden Fall ist die systematische Abweichung, wenn es sich ja um eine solche handeln sollte, so klein, daß man mit großer Näherung das Gesetz (1) auf jeden Fall auch bei solchen rasch oszillierenden Bewegungen als gültig ansehen kann. Der Geschwindigkeitsbereich, in dem also die Anwendbarkeit der Formel erprobt erscheint, erstreckt sich etwa von der Größenordnung  $5 \cdot 10^{-3}$  cm/sec für die Bewegungen im Gleichfeld bis zu einer mittleren Geschwindigkeit von der Größenordnung 1 cm/sec bei der Bewegung im Wechselfelde, wobei

1) Die angegebenen Werte für  $v_f$  und  $v_s$  sind Mittelwerte aus je 50—150 Einzelmessungen.

2) Mittelwert aus den in Tab. 2, Spalte 4 angegebenen Werten.

aber in der Nähe der Mitte der Schwingungsbahn des Teilchens die Geschwindigkeit noch größer anzusetzen ist.<sup>1)</sup>

Aus dem Gleichverteilungssatz kann man nun für Partikel der verwendeten Größenordnung die mittlere Geschwindigkeit bei ihrer Brownschen Bewegung ausrechnen und erhält dafür der Größenordnung nach etwa 3 cm/sec, was also mit der Bewegung im Wechselfelde um so eher vergleichbar erscheint, als es sich ja auch hier um eine rasch zitternde Bewegung handelt.

Es erscheint mir daher berechtigt, aus dem Vorhergehenden den Schluß zu ziehen, daß für die geradlinige Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluß einer konstanten Kraft dasselbe Widerstandsgesetz Gültigkeit habe, wie für die Brownsche Molekularbewegung, eine Annahme, die ja übrigens bis jetzt allgemein gemacht worden ist, aber ohne eine genügende Stütze keineswegs von vornherein als plausibel angesehen werden kann.

Es ist also gestattet, bei Teilchen dieser Größenordnung aus Messungen der Brownschen Bewegung, vorausgesetzt, daß man zu ihrer Auswertung ein einwandfreies Rechenverfahren benützt, die Beweglichkeit der Teilchen zu bestimmen.

### § 5.

Nach dem im vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten können wir also daran gehen, die aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen berechneten Beweglichkeitswerte mit jenen zu vergleichen, die sich aus den an demselben Teilchen gemessenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten bei Zugrundelegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes ergeben, ohne befürchten zu müssen, daß den ersteren Werten ein

---

1) Die genuae Gültigkeit von Gleichung (7) ist inzwischen durch Versuche von N. A. Shewhart (Phys. Rev. (2) 9. S. 425. 1917) und R. B. Albott (Phys. Rev. (2) 12. S. 381. 1918), die mir aber im Originale nicht zugänglich waren, für noch größere Geschwindigkeiten von  $v = 10$  bis  $75$  cm/sec an Öl- und Wassertropfen, sowie Lykopodiumteilchen erwiesen worden, indem die Partikel zwischen parallelen, vertikalen Kondensatorplatten gleichzeitig der Wirkung der Schwerkraft und der eines horizontalen Wechselfeldes von 28000 Volt und 60 per/sec ausgesetzt wurden. Es zeigte sich, daß die so beschriebene Bahn rein sinusförmig war und daß ihre Amplitude der Feldstärke proportional war. Diese Resultate sprechen für die Richtigkeit der obigen Überlegungen.

wesentlicher, verfälschender Einfluß zugesellt sei. Eine solche Vergleichung ist ja bereits in Teil II dieser Arbeit, S. 89, durchgeführt worden und hatte das Ergebnis, daß für Metallpartikel die Brownsche durchwegs unterhalb derjenigen Beweglichkeit lag, die sich aus dem Stokesschen oder dem Cunninghamschen Gesetz ergab, bei Ölpartikeln hingegen meist oberhalb. Während die Beobachtungen an letzterem Material durch allmähliches Verdampfen der Öltropfen sicher verfälscht sind, läßt sich ein Grund für die Abweichung an den Metallpartikeln darin finden, daß bei der Berechnung der Brownschen Beweglichkeit aus den Abweichungen von den konstanten Steig- und Fallzeiten ein systematischer Fehler stets zu kleine Resultate vortäuscht.<sup>1)</sup>

Um diesen Fehler zu entgehen, wurde diesmal die Brownsche Beweglichkeit nach der vom Verfasser mit dem Namen der Messung von „mittleren, doppelseitigen Erstdurchgangszeiten“ bezeichnete Methode<sup>2)</sup> verwendet, indem vermittelt des Morseapparates jeder Durchgang eines Teilchens durch einen Vertikalstrich des Okularrasters registriert und aus allen, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen liegenden Zeiten das Mittel genommen wurde. Aus diesen doppelseitigen horizontalen Erstdurchgangszeiten  $\vartheta$  ergibt sich nach der a. a. O., S. 183 mitgeteilten Formel die Beweglichkeit aus

$$(9) \quad 2D = \frac{b^2}{\vartheta}, \quad D = \frac{R}{N} T \cdot B$$

( $D$ : Diffusionskoeffizient;  $b$ : Rasterintervall;  $R$ : absolute Gaskonstante;  $N$ : Loschmidtsche Zahl;  $T$ : absolute Temperatur).

Die Stokessche bzw. Cunninghamsche Beweglichkeit folgt aus den Formeln Teil II, S. 88 Formel (4) bzw. (4').

Es wurden nun für eine Anzahl von Ag-Teilchen Beobachtungen dieser Art angestellt, deren Ergebnis die folgende Tabelle 4 enthält. Die Werte der zur Berechnung verwendeten Konstanten sind dieselben, wie früher, bis auf die Dichte des Ag:  $\sigma = 10,5$ .

Wie man sieht, fällt  $B_{Br}$  innerhalb der, wie bereits oben erwähnt, beträchtlichen Fehlergrenzen, durchwegs mit den  $B_{St}$  zu-

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59. S. 409ff. 1919.

2) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53. S. 177. 1917.

sammen, während die  $B_e$  meist eine ganze Größenordnung höher liegen als diese. Da nach dem Obigen kein Grund vorliegt, an der Richtigkeit der  $B_{Br}$  zu zweifeln, werden wir neuerlich, und diesmal schärfer, zu der bereits in Teil II am Schlusse dargelegten Meinung gedrängt, daß die Cunninghamsche Korrektur am Stokesschen Gesetz nicht den tatsächlichen Verhältnissen gerecht wird, sondern vielmehr das unkorrigierte Stokessche Gesetz zur Anwendung zu kommen hat.

Tabelle 4.

Nr.	$B_{Br} \cdot 10^{-8}$	$B_{St} \cdot 10^{-8}$	$B_e \cdot 10^{-8}$
14	0,326	0,256	0,740
17	0,286	0,210	0,500
20	0,318	0,380	1,220
21	0,257	0,393	9
22	0,287	0,368	3,22
27	0,236	0,271	0,81
28	0,222	0,331	1,26
29	0,329	0,325	1,20
30	0,348	0,250	0,698
31	0,165	0 250	0,710
32	0,239	0 256	0,740
33	0,367	0,246	0,68
34	0,240	0,311	1,14
35	0,311	0,342	1,35
36	0,260	0,339	1,28
37	0,249	0,285	0,92

Da seiner theoretischen Begründung nach das Stokessche Gesetz eine vollständige Mitnahme des umgebenden Mediums durch die bewegte Kugel verlangt, das Cunninghamsche Gesetz jedoch eine Mitnahme nur insofern, als sie durch die Stöße der Mediummoleküle auf die Kugeloberfläche bedingt werden, scheint es nach unseren obigen Überlegungen, als ob von dem Partikel in der Tat an seiner Oberfläche das umgebende Gas vollständig mitgeführt wird, was mir durchaus plausibel erscheint, da ja die Annahme einer an der Oberfläche fester Körper haftenden Gashaut, die auf gewisse Adhäsionskräfte zwischen Gas und festem Körper ungezwungen zurückgeführt werden kann, geläufig ist.

## § 6.

Mit der Frage der Gültigkeit eines bestimmten Widerstandsgesetzes hängt in der innigsten Weise auch die nach der

Größe der auf den Partikeln sitzenden Ladungen zusammen, da ja diese aus der bekannten Größe von  $e B$  einerseits und von  $B$  andererseits berechnet wird. Die bekannten Arbeiten über Ladungsbestimmungen an Einzelpartikeln der Ehrenhaftschen Schule verwenden ausschließlich die Cunninghamsche Korrektur des Stokesschen Gesetzes und es geht aus Tab. 4 hervor, daß im Falle dieses Gesetz in der Tat nicht richtig sein sollte, zu große Werte der Beweglichkeit, also zu kleine Werte der Ladung vorgetäuscht werden müssen. Und diese Differenz vergrößert sich um so mehr, zu je kleineren Partikeln man übergeht, da der Unterschied zwischen den beiden Widerstandsgesetzen immer größer wird, und schließlich mit fallendem Partikelradius rapide ansteigt.

Ohne hier die strittige Frage nach der Größe dieser Ladungen irgendwie beantworten zu können, gebe ich doch, wie in Teil II dieser Arbeit die Resultate der Ladungsbestimmungen an den von mir beobachteten Ag-Partikeln in der Tabelle V wieder, wobei jedesmal aus  $v_s$ ,  $v_f$  und  $v_g$  das Produkt  $e B$  und vermittelst Zugrundelegung eines der Widerstandsgesetze bzw. aus der Brownschen Bewegung das  $B$  und damit das  $e$  berechnet wurde.

Man ersieht aus der Tabelle 5, daß durchweg die Ladungen  $e_e$  kleiner sind, als die analogen  $e_{st}$  bzw.  $e_{Br}$ , während die beiden letzten dieselbe Größenordnung besitzen. Jedenfalls auffallend ist die Tatsache, daß diese letzteren Ladungswerte sämtlich in der Größenordnung des üblichen Elektrons liegen, wenn sie auch keineswegs als ganzzahlige Vielfache dieser Größe aufgefaßt werden können und auch öfters Unterschreitungen des Millikanschen Wertes  $4,77 \cdot 10^{-10}$  auftreten.

Da uns dieses Ergebnis bereits in derselben Weise in Teil II an den Ladungen von Hg- und Ölteilchen entgegengetreten ist, scheint es in Anbetracht der prinzipiellen Wichtigkeit derartiger Messungen dringend notwendig, die wahre Gestalt des Widerstandsgesetzes in Gasen an kleinen Materiepartikeln einwandfrei zu ermitteln. Der Verfasser hofft, auf Grund bereits ins Werk gesetzter Versuche bald in der Lage sein zu können, die Frage im Sinne der Festlegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes in Gasen entscheiden zu können.

Tabelle 5.

Nr.	$e_c \cdot 10^{10}$	$e_{St} \cdot 10^{10}$	$e_{Br} \cdot 10^{10}$
1	3,12	8,97	
2	1,328	5,22	
3	1,45	5,96	
4	0,742	2,47	
5	1,266	5,44	
6	0,856	2,82	
7	0,684	5,35	
12	1,71	5,69	
13	0,858	4,54	
14	2,97	8,59	6,72
15	5,19	15,3	
16	6,66	16,9	
17	5,55	13,22	9,72
18	6,58	16,9	
19	2,55	9,42	
20	2,20	7,06	8,45
21	0,367	8,40	12,82
22	0,393	3,45	4,37
23	1,142	3,34	
24	3,96	11,05	
25	3,83	11,15	
26	2,025	6,68	
27	4,63	13,81	15,85
28	1,13	4,30	6,40
29	1,165	4,30	4,24
30	1,222	3,41	2,45
31	2,27	6,48	9,80
32	1,298	3,74	4,02
33	4,51	12,42	8,33
34	2,54	9,30	12,06
35	1,835	7,25	7,95
36	2,20	8,32	10,81
37	2,22	7,19	8,22

**Zusammenfassung.**

Es wird untersucht, ob die Beweglichkeit eines in einem Gase bewegten kleinen Metallpartikels von der Geschwindigkeit und dem Charakter dieser Bewegung innerhalb gewisser Grenzen unabhängig sei. Zu diesem Zwecke werden elektrisch geladene Ag-Kügelchen mittels der Ehrenhaftschen Versuchsanordnung beobachtet und konstatiert, daß

1. Das Produkt  $eB$ , für ein und dasselbe Partikel berechnet, aus verschiedenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten im elektrischen Felde unter dem Einfluß verschiedener Feldkräfte konstant ist.

2. Daß auch für rasch oszillierende Bewegungen im elektrischen Wechselfelde das Produkt  $eB$ , berechnet aus der Amplitude der Teilchenschwingung in derselben Größe herauskommt, als der nach Methode 1. Dabei wurde sowohl die effektive Spannung des Wechselfeldes als auch die Spannung des Gleichfeldes innerhalb weiter Grenzen verändert. Eine kleine systematische Vergrößerung der  $(eB)_w$  gegenüber den  $(eB)_g$  ist vielleicht auf Vernachlässigung der elektrischen Oberschwingungen zurückzuführen.

3. Da auch die Brownsche Bewegung den Charakter einer solchen oszillierenden Bewegung mit etwa derselben mittleren Geschwindigkeit besitzt, so kann man schließen, daß die Beweglichkeitsbestimmungen an Einzelteilchen aus der Brownschen Bewegung nach einer einwandfreien Rechenformel (mittlere doppel-seitige Erstdurchgangszeiten) zu richtigen Werten für  $B$  führen.

4. Berechnet man einerseits für ein und dasselbe Partikel die Beweglichkeit durch Messung der Brownschen Bewegung nach der Methode der „doppelseitigen horizontalen Erstdurchgangszeiten“ und andererseits aus Steig- und Fallbeobachtungen unter Zugrundelegung eines bestimmten Widerstandsgesetzes, so findet man innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler zwar Übereinstimmung zwischen der Brownschen und der nach dem Stokesschen Gesetz berechneten Beweglichkeiten, hingegen kommen die nach Cunningham berechneten durchwegs kleiner heraus. Es wird daher die Ansicht ausgesprochen, daß das letztere Gesetz den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht.

5. Berechnet man aus den gemessenen Steig- und Fallzeiten die Partikelladungen nach einer der drei Methoden  $e_{Br}$ ,  $e_{St}$ ,  $e_c$ , so findet man ungefähre Übereinstimmung zwischen  $e_{Br}$  und  $e_{St}$ , während  $e_c$  viel kleiner herauskommt. Die ersteren Ladungswerte liegen alle in der ungefähren Größenordnung des üblichen Elektrons, lassen sich aber nicht als ganzzahlige Vielfache eines Elementarquantums dieser Größenordnung auffassen.

Die endgültige Festlegung des Widerstandsgesetzes in Gasen für Kugeln der verwendeten Größenordnung erscheint als ein dringendes Desideratum, Versuche zur Klärung dieser Frage werden in Aussicht gestellt.

Prag, im Mai 1920.

(Eingegangen 22. Mai 1920.)