Über eine Verallgemeinerung des Hadamardschen Determinantensatzes.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. M.

Herr E. J. Nanson hatte vor längerer Zeit meine Aufmerksamkeit auf eine Aufgabe gelenkt, die er vor einer Reihe von Jahren veröffentlichte[1]) und die a. a. O. folgenden Wortlaut hat:

„If all the coaxal minors of an axisymmetric determinant are positive, and P_r denotes the product of all the coaxals of order r, prove that

$$P_1^{p_1} > P_2^{p_2} > P_3^{p_3} > \cdots > P_n^{p_n},$$

where the indices $p_1, p_2, \ldots, p_n$ are positive and such that the statements are homogeneous."

Ich hatte seinerzeit eine Lösung dieser Aufgabe gefunden, die ich hier mitteilen möchte; dabei betrachte ich statt symmetrische allgemeiner Hermitesche Determinanten. Mein Resultat lautet:

Satz. Es sei

$$D = [a_{ik}]_1^n = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$$

eine Hermitesche Determinante (also[2]) $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$), deren sämtliche Hauptminoren positiv sind; es bezeichne ferner P_r das Produkt aller Hauptminoren r^{ter} Ordnung, dann ist

$$P_1 \geqq \sqrt[n-1]{P_2} \geqq \sqrt[\frac{(n-1)(n-2)}{2}]{P_3} \geqq \cdots \geqq \sqrt[\binom{n-1}{r-1}]{P_r} \geqq \cdots \geqq P_n. \tag{1}$$

Das erste und letzte Glied dieser Ungleichungen liefert:

$$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \geqq D \tag{2}$$

und dies deckt sich mit dem bekannten Hadamardschen Determinantensatz.[3])

1) The Educational Times, Vol. 55, p. 517, Question 15244. London 1902.

2) $\bar{a}$ bedeutet den konjugierten Wert von a.

3) Man vergleiche z. B. meine Arbeit: Ein elementarer Beweis des Hadamardschen Determinantensatzes (Mathematische u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. XXVII. 1909. Leipzig 1913, S. 172—180) und die dort angeführte

Es werden auch die Fälle bestimmt, in denen unter (1) an einer oder mehreren Stellen das Gleichheitszeichen gilt.

Es sei r eine positive ganze Zahl und

$$1 \leqq r \leqq n;$$

aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ lassen sich

$$\nu = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}$$

Kombinationen zu je r verschiedenen bilden; diese ν Kombinationen mögen irgendwie numeriert werden und in jeder sollen die r Zahlen ihrer Größe nach geordnet sein. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ die i^{te}, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ die k^{te} Kombination ist, so werde

$$B_{ik}^{(r)} = \Sigma \pm a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \ldots a_{\alpha_r \beta_r}$$

gesetzt. Es ist demnach

$$B_{ii}^{(r)} = \Sigma \pm a_{\alpha_1 \alpha_1} a_{\alpha_2 \alpha_2} \ldots a_{\alpha_r \alpha_r}$$

ein Hauptminor r^{ter} Ordnung und

$$P_r = B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} \ldots B_{\nu\nu}^{(r)} \qquad \left[\nu = \binom{n}{r}\right];$$

die Ungleichungen (1) lassen sich also in der Form schreiben:

$$\left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r}} B_{kk}^{(r)}\right)^{\frac{1}{\binom{n-1}{r-1}}} \geqq \left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r+1}} B_{kk}^{(r+1)}\right)^{\frac{1}{\binom{n-1}{r}}} \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1). \qquad (3)$$

Die Hermitesche Form von ν Variablen $G(x) = \sum_{i,k=1}^{\nu} B_{ik}^{(r)} x_i x_k$ ist — wie sich leicht zeigen läßt [4]) — positiv definit; wir können daher auf ihre Determinante die Hadamardsche Ungleichung (2) anwenden und erhalten

$$\left[B_{ik}^{(r)}\right]_1^{\nu} \leqq B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} \ldots B_{\nu\nu}^{(r)} \qquad \left[\nu = \binom{n}{r}\right].$$

Literatur, der ich die folgende neuere hinzufüge: T. Muir, An upper limit for the value of a determinant (South. Afr. R. Soc. Transactions. Bd. 1, 1910, p. 323—334). W. Blaschke, Ein Beweis für den Determinantensatz Hadamards [Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. XX. (1913), p. 277—279] und die daselbst angeführten Stellen. — Außerdem für den reellen Fall: T. Kubota, Hadamards Theorem on the Maximum Value of a Determinant (The Tôhoku Mathematical Journal. Vol. 2. 1912, p. 37—38), T. Hayashi, Giornale di Matematiche 48 (1910), p. 253—358.

[4]) Vgl. E. Fischer, Über den Hadamardschen Determinantensatz [Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe, 13. Bd. (1908), S. 32—40], S. 36—37.

Nun ist nach dem Sylvester-Frankeschen Satz [5])

$$\left[B_{ik}^{(r)}\right]_1^{\nu} = D^{\binom{n-1}{r-1}},$$

also

$$D^{\binom{n-1}{r-1}} \leqq B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} \ldots B_{\nu\nu}^{(r)},$$

oder

$$P_n^{\binom{n-1}{r-1}} \leqq P_r \quad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{4}$$

Hier gilt offenbar dann und nur dann Gleichheit, wenn

$$B_{ik}^{(r)} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k,$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \beta_1} & a_{\alpha_1 \beta_2} & \ldots & a_{\alpha_1 \beta_r} \\ a_{\alpha_2 \beta_1} & a_{\alpha_2 \beta_2} & \ldots & a_{\alpha_2 \beta_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha_r \beta_1} & a_{\alpha_r \beta_2} & \ldots & a_{\alpha_r \beta_r} \end{vmatrix} = 0.$$

Dann ist aber identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$\begin{vmatrix} a_{\beta_1 \beta_1} & \ldots & a_{\beta_1 \beta_r} & x_1 \\ a_{\beta_2 \beta_1} & \ldots & a_{\beta_2 \beta_r} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\beta_r \beta_1} & \ldots & a_{\beta_r \beta_r} & x_r \\ a_{\alpha \beta_1} & \ldots & a_{\alpha \beta_r} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{für} \quad \alpha \neq \beta_i \ (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Für $x_k = a_{\beta_k \beta_1}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ erhält man hieraus durch Entwicklung nach den Elementen der letzten Zeile

$$a_{\alpha \beta_1} B_{kk}^{(r)} = 0,$$

und da nach Voraussetzung $B_{kk}^{(r)}$ positiv, also $\neq 0$ ist, so folgt

$$a_{\alpha \beta_1} = 0 \ (\text{für} \ \alpha \neq \beta_1).$$

Ähnlich erhält man allgemein

$$a_{\alpha \beta_k} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta_k \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

d. h.

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k.$$

[5]) Vgl. z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig 1909), S. 104.

Aus (4) folgt für $r = n - 1$:

$$P_n^{n-1} \leqq P_{n-1}$$

oder

$$D^{n-1} \leqq B_{11}^{(n-1)} B_{22}^{(n-1)} \dots B_{nn}^{(n-1)}; \tag{5}$$

damit ist auch (3) zunächst für $r = n - 1$ bewiesen.

Um nun (3) allgemein zu beweisen, schreiben wir es in der Form

$$\left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r}} B_{kk}^{(r)}\right)^{\binom{n-1}{r}} \geqq \left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r+1}} B_{kk}^{(r+1)}\right)^{\binom{n-1}{r-1}}; \tag{6}$$

nun ist

$$\binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1 \,.\, 2 \dots r}$$

und

$$\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \,.\, 2 \dots (r-1)}.$$

Man kann also (6) auf die Gestalt bringen:

$$\left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r}} B_{kk}^{(r)}\right)^{n-r} \geqq \left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r+1}} B_{kk}^{(r+1)}\right)^{r};$$

wir wenden jetzt auf $B_{kk}^{(r+1)}$ die Ungleichung (5) an; dann wird

$$\left(B_{kk}^{(r+1)}\right)^r \leqq C_1^{(k)} C_2^{(k)} \dots C_{r+1}^{(k)}, \quad \left(k = 1, 2, \dots, \binom{n}{r+1}\right), \tag{7}$$

wo $C_1, C_2, \dots, C_{r+1}$ die Hauptminoren r^{ter} Ordnung von $B_{kk}^{(r+1)}$ sind, also unter den $B_{kk}^{(r)}$ vorkommen. Aus (7) folgt nun

$$\left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r+1}} B_{kk}^{(r+1)}\right)^{r} \leqq \prod_{k=1}^{\binom{n}{r+1}} \left(C_1^{(k)} C_2^{(k)} \dots C_{r+1}^{(k)}\right) \quad (r = 1, 2, \dots, n-2);$$

wenn ich noch zeige, daß

$$\prod_{k=1}^{\binom{n}{r+1}} \left(C_1^{(k)} C_2^{(k)} \dots C_{r+1}^{(k)}\right) = \left(\prod_{k=1}^{\binom{n}{r}} B_{kk}^{(r)}\right)^{n-r}, \tag{8}$$

so wird unser Satz bewiesen sein. Offenbar kommt $B_{kk}^{(r)}$ so oft in dem linksseitigen Produkt vor, als die Kombination $\beta_1, \ldots, \beta_r$ in einer $r+1$-gliedrigen Kombination enthalten ist; solche gibt es — wie ersichtlich — $n-r$, also gilt die Gleichung (8) und somit auch unser Satz.

Damit in (6) die Gleichheit gelte, muß in (7) für jedes k die Gleichheit gelten, es muß also

$$a_{\beta_\nu \beta_\mu} = 0 \quad (\nu \neq \mu,\ \beta_\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sein.

Es gilt also der Zusatz:

Damit in (1) mindestens einmal die Gleichheit gelte, muß

$$a_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k$$

sein und es gilt dann durchweg das Gleichheitszeichen.

Die Beziehungen (1) gelten ersichtlich auch für den Fall $D = 0$; von einem gewissen ν an ist dann $P_\nu = 0$, $P_{\nu+1} = 0, \ldots$ $\ldots, P_n = 0$.

Die Voraussetzungen unseres Satzes lassen sich noch etwas erweitern. Es genügt nämlich, wenn sämtliche Hauptminoren der Determinante

$$D = [a_{ik}]_1^n$$

positiv sind und wenn es solche von Null verschiedene Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

gibt, daß

$$D' = \left[a_{ik} \frac{c_i}{c_k}\right]_1^n$$

eine Hermitesche Determinante wird. Denn die Hauptminoren dieser Determinante sind offenbar gleich den entsprechenden Hauptminoren der Determinante D; D' genügt also den Voraussetzungen unseres Satzes, woraus die Beziehungen (1) sofort folgen.