Ueber die Darstellung der ternären quadratischen Formen durch Quadrate

(*von Dr.* B. IGEL, *in Wien*).

Die Ueberführung algebraischer Formen in einfache, sogenannte kanonische Formen ist seit langer Zeit ein wichtiges Hülfsmittel zur Auffindung algebraischer und geometrischer Eigenschaften. Hierbei war die Darstellung durch Potenzen ganz besonders bevorzugt. Das Problem der Darstellung der Formen zweiten Grades durch Quadrate, namentlich zweier Formen zweiten Grades von n Variabeln als Summen von n Quadraten hat bekanntlich die grössten Mathematiker lange beschäftigt. Allein erst in der neuesten Zeit ist von Herrn ROSANES (*) das allgemein zu Grunde liegende Princip ausgesprochen und durch eine merkwürdige Darstellung von Formen beliebigen Grades beleuchtet worden. Es ist aber desshalb vielleicht nicht ohne Interesse, gewisse in älteren Arbeiten auftretende Identitäten von dem neuerdings gewonnenen Gesichtspunkte aus aufzufassen.

In der berühmten Abhandlung von ARONHOLD über die ternären cubischen Formen (*Crelle's Journal,* Bd. 55) welche der Grundstein der neueren algebraischen Untersuchungen bildet, findet sich die folgende Identität abgeleitet (Nr. 7, pag. 111):

$$\left.\begin{aligned} &-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)r_x^2 \\ =&-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)\gamma_x\delta_x(r\alpha\beta)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)\beta_x\delta_x(r\alpha\gamma)^2 \\ &-(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)\alpha_x\delta_x(r\beta\gamma)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)\beta_x\gamma_x(r\alpha\delta)^2 \\ &+(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)\alpha_x\gamma_x(r\beta\delta)^2-(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)\alpha_x\beta_x(r\gamma\delta)^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir haben hier die in der genannten Abhandlung benutzten Buchstaben u, v, w, p, d durch resp. α, β, γ, δ, r ersetzt und ausserdem die jetzt übli-

(*) *Crelle's Journal,* Bd. 76, pag. 313.

chen Bezeichnungen

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma), \quad r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 = r_x$$

in Anwendung gebracht. Die in dieser identischen Gleichung auftretenden 18 Grössen sind vollkommen willkürliche. Bei Aronhold hat sie zum Zweck das Quadrat r^2_x durch die 6 Producte $\alpha_x\beta_x$, $\alpha_x\gamma_x$, $\alpha_x\delta_x$, $\beta_x\gamma_x$, $\beta_x\delta_x$, $\gamma_x\delta_x$, auszudrücken. Wir wollen die Formel in anderem Sinne auffassen. Da die linke Seite in Bezug auf die Grössen γ und x symmetrisch ist, so wird sie bei Vertauschung dieser Grössen nicht geändert. Dadurch erhält man somit aus (1)

$$\left.\begin{aligned} &-(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\gamma\delta)(\beta\gamma\delta)r_x^2 \\ =&-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)r_\gamma r_\delta(\alpha\beta x)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)r_\beta r_\delta(\alpha\gamma x)^2 \\ &-(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)r_\alpha r_\delta(\beta\gamma x)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)r_\beta r_\gamma(\alpha\delta x)^2 \\ &+(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)r_\alpha r_\gamma(\beta\delta x)^2-(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)r_\alpha r_\beta(\gamma\delta x)^2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es sei nun

$$f(x) = \sum a_{k\lambda} x_k x_\lambda \quad (k=1,\ 2,\ 3;\ \lambda=1,\ 2,\ 3)$$

irgend eine ternäre quadratische Form und $a_{k\lambda} = a_{\lambda k}$. Dann können wir symbolisch setzen:

$$a_{k\lambda} = r_k r_\lambda,$$

so dass alsdann wird:

$$f(x) = r_x^2.$$

Die Gleichung (2) bleibt offenbar erhalten, wenn wir die Grössen r als Symbole einer Form f ansehen. Ersetzt man aber wieder $r_k r_\lambda$ durch $a_{k\lambda}$ so wird links $f(x)$ auftreten. Rechts ist z. B.

$$r_\gamma r_\delta = \sum r_k r_\lambda \gamma_k \delta_\lambda = \sum a_{k\lambda}\gamma_k\delta_\lambda = f(\gamma,\ \delta),$$

wenn — ebenfalls nach Aronhold —

$$\tfrac{1}{2}\sum_i \gamma_i \frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta_i} = f(\gamma,\ \delta) = f(\delta,\ \gamma)$$

gesetzt wird. Daher können wir statt (2) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &-(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\gamma\delta)(\beta\gamma\delta)\cdot f(x) \\ =&-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)f(\gamma,\ \delta)(\alpha\beta x)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)f(\beta,\ \delta)(\alpha\gamma x)^2 \\ &-(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)f(\alpha,\ \delta)(\beta\gamma x)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\beta,\ \gamma)(\alpha\delta x)^2 \\ &+(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\alpha,\ \gamma)(\beta\delta x)^2-(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\alpha,\ \beta)(\gamma\delta x)^2. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Formel (3) enthält die ausgeführte Darstellung der allgemeinen ternären quadratischen Form $f(x)$ durch die 6 Quadrate

$$(\alpha\beta x)^2, \quad (\alpha\gamma x)^2, \quad (\beta\gamma x)^2, \quad (\alpha\delta x)^2, \quad (\beta\delta x)^2, \quad (\gamma\delta x)^2.$$

Es ist bekannt, dass jede ternäre quadratische Form sich durch die Quadrate von irgend 6 linearen Ausdrücken darstellen lässt. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wo die durch die 6 linearen Ausdrücke repräsentirten Geraden einen und denselben Kegelschnitt tangiren. Die oben in (3) auftretenden 6 Geraden

$$(\alpha\beta x)=0, \quad (\alpha\gamma x)=0, \quad (\beta\gamma x)=0, \quad (\alpha\delta x)=0, \quad (\beta\delta x)=0, \quad (\gamma\delta x)=0$$

haben aber die besondere Lage, dass sie die vier Punkte α, β, γ, δ paarweise verbinden, d. h. sie bilden die sechs Seiten des aus den 4 Punkten α, β, γ, δ bestehenden Vierecks. Da dieselben jene oben ausgeschlossene specielle Lage nicht besitzen, so ist die Möglichkeit der Darstellung von vornherein einzusehen. Die Formel (3) giebt aber zugleich die Coefficienten der Darstellung und gestattet so interessante Schlüsse für besondere Beziehungen des Vierecks zum Kegelschmitt. So oft ein Coefficient verschwindet, also wenn z. B. $f(\gamma, \delta)=0$ wird, so sind zwei Punkte, hier γ und δ, in Bezug auf den Kegelschnitt $f(x)=0$ einander conjugirt.

Bemerkenswerth erscheint hauptsächlich der Fall, wo zwei Paare conjugirter Punkte auftreten, z. B. α und γ, β und δ. Alsdann finden die beiden Gleichungen

$$f(\alpha, \gamma)=0, \quad f(\beta, \delta)=0$$

Statt, und es bleibt:

$$\begin{aligned} &-(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\gamma\delta)(\beta\gamma\delta)\cdot f(x) \\ &= -(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)f(\gamma, \delta)(\alpha\beta x)^2 - (\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)f(\alpha, \delta)(\beta\gamma x)^2 \\ &\quad + (\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\beta, \gamma)(\alpha\delta x)^2 - (\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\alpha\beta)(\gamma\delta x)^2; \end{aligned}$$

d. h.: $f(x)$ stellt sich durch die Quadrate der wier Geraden

$$(\alpha\beta x)=0, \quad (\beta\gamma x)=0 \quad (\alpha\delta x)=0, \quad (\gamma\delta x)=0$$

dar, wie dies mit bekannten Sätzen übereinstimmt.

Wien, Januar 1874.