Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie (*).

(*del prof.* E. B. CHRISTOFFEL, *in Zurigo.*)

Il presente lavoro si occupa del problema delle temperature stazionarie sopra superficie piane, coll'intento di esporre i punti di vista generali che devono mettersi a fondamento nella trattazione di questa quistione.

Ho giudicato conveniente di ritenere per la presente ricerca le condizioni essenziali del problema nella stessa semplicità che è propria della quistione fisica. Se si pone il problema nella sua forma più generale, allora il suo interesse invade un nuovo campo, onde per questo caso è giustificata una speciale ricerca che riservo ad un'altra occasione.

L'unico cangiamento che mi sono permesso per questa volta, concerne l'equazione differenziale del problema, che ho completata col mezzo di un termine indipendente, in guisa che l'espressione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ non vien posta eguale a zero, ma ad una funzione arbitraria ϕ di x, y. Fatta astrazione da ragioni più riposte, questa aggiunta ha l'evidente vantaggio che vengono d'ora in avanti esclusi diversi sussidi non adatti a ricerche generali, per es. trasformazioni e soluzioni particolari.

Il principale interesse che si annoda a questo problema, dipende dalla sua conosciuta relazione colle proprietà generali di una funzione di una variabile complessa $x+iy$. Le ricerche fatte finora, per quanto qui potranno occorrere, non mirano però tanto ad approfondire e spiegare completamente

(*) Traduzione del Dott. CARLO FORMENTI, in Pavia.

questo legame, quanto piuttosto a rendere utile questo legame per gli scopi dell'integrazione.

Se si introducono nell'equazione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$, in luogo delle coordinate ortogonali x, y, le parti reali θ, ω di una funzione di $x+iy$ come variabili indipendenti, in virtù di quella relazione non vien cangiata la forma dell'equazione differenziale. Da ciò si ha subito il principio adoperato dal sig. Lamé nelle sue pregevoli *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* che la soluzione del problema per la superficie circolare $x^2+y^2<c^2$ basta per derivarne, sotto certe supposizioni fatte intorno alla funzione $\theta+i\omega$ ed alla grandezza di c, la soluzione per la superficie $\theta^2+\omega^2<c^2$.

La stessa trasformazione serve anche di fondamento alla bella memoria del sig. Neumann (Giornale di Borchardt, t. 59, pag. 348). La quale, oltre ad una diligente ricerca sulle curve (dapprima trattate da Cauchy) $\theta^2+\omega^2=c^2$, che il signor Neumann chiama *linee di livello*, presenta eziandio un importante progresso nella trattazione dell'attuale problema, facendo dipendere, per mezzo di considerazioni che sono analoghe alla teoria di Green sul potenziale, la determinazione della funzione primitivamente cercata da un'altra $\left[\eta_a^{(p)} d\omega_a \text{ in quanto al valore} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \xi}{\partial p}\, ds \text{ art. 1.}\right]$ che è indipendente dai valori arbitrari di quella nel contorno, e soltanto dipende dalla forma del contorno e dalla posizione di un punto arbitrario p. L'espressione di questa funzione in θ ed ω è data a pag. 354, e la determinazione di θ ed ω per mezzo di x ed y vien ridotta ad un problema (pag. 355) il quale, a meno di una condizione di discontinuità non messa in evidenza, ma tuttavia facile a completarsi, costituisce un caso particolare della quistione primitiva. Non vi si danno però applicazioni di questa interessante riduzione a casi determinati.

Quanto sia anche a me riuscito di trovare nuovi punti di vista ed utili sussidi per la presente questione, lo mostrerannno le ricerche che seguono.

I.

Sia distesa sul piano xy una superficie F ad un solo strato e semplicemente connessa *(eine einblättrige und einfach zusammenhängende Fläche),* il cui contorno sia formato da una data curva K. Ciò supposto, si cerca una funzione U di x,y, che unitamente alle sue derivate prime sia ad un valore *(einwerthig)* e continua in F, e che sodisfaccia all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\phi(x,y),$$

mentre lungo il contorno K sia:

$$U=\psi(x,y).$$

Per determinare U in punto o di F, separiamo da F un cerchio di raggio ρ, il cui centro sia o, e formiamo, mediante una funzione ξ che colle sue prime derivate sia nella restante superficie F' ad un valore e continua, l'equazione:

$$\int\xi\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]dF'=\int\phi\,\xi\,dF'.$$

Se si indica con ds un elemento arbitrario della linea K, con dp il differenziale della normale a ds diretta verso l'esterno, e finalmente con θ l'angolo che il raggio ρ uscente da o fa colla direzione delle x crescenti; il primo membro dell'ultima equazione diventerà:

$$=\int\left(\xi\frac{\partial U}{\partial p}-U\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)ds-\int\left(\rho\xi\frac{\partial U}{\partial\rho}-U\rho\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\right)d\theta+\int U\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right]dF'.$$

Ciò posto, assoggettiamo ξ alle seguenti condizioni:

A. Lungo la curva K sia dappertutto $\xi=0$.

B. Per ρ tendente a zero diventi $\rho\dfrac{\partial\xi}{\partial\rho}=1$.

C. In F, fuori di o, sia $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0$.

Da *B*. pel teorema VII. *e*. della mia *teorica dei potenziali ad un valore* (Giornale di Borchardt, t. 64, pag. 337) discende che anche $\dfrac{\xi}{\log.\rho}$ converge verso il limite 1, quando ρ tende a zero. Per conseguenza, insieme con ρ si annulla $\rho\xi=\rho\log.\rho.\dfrac{\xi}{\log.\rho}$, e l'ultima espressione annullandosi ρ, si trasforma in:

$$-\int\psi\frac{\partial\xi}{\partial p}ds+2\pi U_0.$$

Noi otteniamo adunque:

$$U_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int\psi\frac{\partial\xi}{\partial p}ds+\int\phi\,\xi\,dF\right],$$

quindi la determinazione di U è ridotta a quella di ξ.

II.

L'equazione $C.$ è la condizione affinchè $\frac{\partial \xi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \xi}{\partial y}\,dx$ sia il differenziale totale di una funzione di x, y. Indicando questa funzione con η, si ottiene:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

quindi

$$\omega = \xi + i\eta$$

è una funzione di $z = x + iy$, e ξ ne è la parte reale. Questa funzione, per le $A.$ e $B.$ e per le già poste condizioni, ha le seguenti proprietà:

1. Lungo la curva K, la funzione ω è imaginaria senza parte reale, $\operatorname{mod.} e^{\omega} = 1$.

2. Fuori di o, ξ ed η epperò anche ω sono monodrome (*einändrig*) e continue.

3. Se si considerano ξ ed η come funzioni delle coordinate polari ρ, θ, aventi origine in o, quando θ cresce per una rotazione dell' asse delle x verso l' asse delle y, è:

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad \rho \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\frac{\partial \xi}{\partial \theta}.$$

Da ciò segue subito per $\rho = 0, \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1$. Se quindi il punto (x, y) gira nella direzione positiva intorno al punto o, per ciascun giro η cresce di 2π, ed ω di $2\pi i$, perchè ξ è ad un valore. Per lo stesso motivo nel piano (ρ, θ), lungo la linea $\rho = 0$, è $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0$ (*); quindi per $\rho = 0$ si ha $\rho \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = 0, \frac{\eta}{\log . \rho} = 0$. Ne risulta che nel punto o la funzione $\omega - \log.(z - z_0)$ è monodroma, ed insieme anche continua, perchè il quoziente

(*) Per provare questa proposizione, basta mostrare che la funzione $U' = \xi - \log.\rho$, che è ad un valore in F, è in o anche continua, poichè allora essa sarà costante lungo la summenzionata linea $\rho = 0$ (asse delle θ). Se nell'art. I si assume U' in luogo di U, sarà $\varphi = 0$ all'infuori di o. Inoltre, per la rappresentazione di U' in un punto qualsivoglia m diverso da 0, non occorre che il punto o sia escluso da F, perchè per $\rho = 0$ risulta $\rho \frac{\partial U'}{\partial \rho} = 0$, $\rho\, U' = 0$. Conseguentemente U' è rappresentata da un integrale esteso soltanto lungo K, epperò è una funzione a un valore e continua in ogni punto di F, ed in particolare nel punto o.

$$\frac{\omega - \log.(z - z_0)}{\log.(z - z_0)} = \frac{\xi}{\log.\rho + i\theta} - 1 + i\frac{\eta}{\log.\rho + i\theta},$$

si annulla con ρ, ciò che sarebbe impossibile se la funzione $\omega - \log.(z - z_0)$, monodroma in o, ivi fosse discontinua.

Quindi e^{ω} è dappertutto in F ad un valore e continua, e fuori di o, dove diventa infinitamente piccola del primo ordine, è inoltre diversa da zero. Se si indica con w questa funzione, si ha il seguente risultato:

Sia w una funzione di z ad un valore e continua in F, tale che il suo modulo nel contorno K di questa superficie abbia il valore 1; nel punto o essa divenga infinitamente piccola del primo ordine ed in tutti gli altri punti della superficie F rimanga invece diversa da zero. Allora la parte reale di $\log. w$ sodisfà a tutte le condizioni poste per ξ, e si può porre:

$$\xi = \log.\ \text{mod.}\ w\,.$$

Se w' è una seconda funzione di z che sodisfaccia a tutte le condizioni poste, per w, $\frac{w'}{w}$ sarà in F ad un valore, nè nulla nè infinita; ed il suo modulo sarà in K eguale ad 1. Quindi ogni ramo della funzione $\log.\frac{w'}{w}$ è in F monodromo e continuo, ed in K puramente imaginario. La sua parte reale è perciò nel contorno di F eguale a zero, nell'interno nè polidroma (*mehrändrig*) nè discontinua, e quindi dappertutto in F eguale a zero. Per conseguenza $\log.\frac{w'}{w}$ è costante e puramente imaginario, $=\gamma i$. Da ciò si ricava $w' = e^{\gamma i} w$, cioè w per le antecedenti condizioni è determinata fino ad un fattore costante di modulo 1, e quindi ξ è determinata completamente.

III.

Se ora si scompone la funzione w nelle sue parti reali:

$$w = u + iv\,,$$

siccome lungo K è $\text{mod.}\,w = 1$ e nel punto o di F si ha $w = 0$, così ne emerge che i piani della z e della w si devono corrispondere in modo, che alla data area F esistente nel primo piano corrisponda nell'altro piano il cerchio $u^2+v^2<1$, al punto o il centro di quest'ultimo, ed al contorno K di F il contorno del cerchio. La determinazione di w coincide quindi colla soluzione della questione: rappresentare l'area data F sul piano della w, trasformandola in un cerchio di raggio 1, in modo che nel centro di quest'ultimo riesca rappresentato un punto o scelto ad arbitrio in F.

Dalla conclusione del precedente articolo risulta che questo problema è pienamente determinato, in quanto che due rappresentazioni circolari di F, l'una delle quali si ottiene dall'altra facendola rotare di un angolo γ, non possono essere considerate come essenzialmente diverse.

Questo risultato ed in pari tempi il dimostrare che il presente problema ammette una soluzione per ciascuna forma di F, sono compresi come caso particolare nella proposizione generale sopra le superficie semplicemente connesse, che Riemann ha sviluppata nella sua dissertazione inaugurale, p. 30(*).

IV.

Per le ricerche ulteriori, conviene sostituire al problema dell'articolo antecedente un altro che dipenda da condizioni più facili ad essere sodisfatte.

Poichè mod.$(z-z_0)$ non è altro che la distanza rettilinea dei due punti z e z_0, così il luogo di tutti i punti z, i quali sodisfanno alla condizione mod.$(z-z_0)=$mod.$(z-z_1)$, è la retta perpendicolare nel punto di mezzo a quella che congiunge i punti z_0 e z_1. Quindi se si assume per z_1 l'espressione $z'_0=x_0-iy_0$ coniugata di $z_0=x_0+iy_0$, ne segue per y_0 positivo che la funzione:

$$\frac{z-z_0}{z-z'_0}$$

nella metà $y>0$ del piano, diventa infinitamente piccola nel solo punto o e propriamente del primo ordine; nel resto rimane continua e nel contorno di questa superficie raggiunge il modulo 1. Per questa superficie è quindi conosciuta anche ξ.

Se ora si è in grado di rappresentare il piano della $Z=X+iY$ sul piano della z, in modo che al mezzo piano $Y>0$, che in seguito si indicherà con E, ed al suo contorno (chiuso all'infinito) $Y=+0$ corrisponda nel piano della z un'area F col proprio contorno dato K, ed a ciascun punto dell'una super-

(*) *Annali di Matematica*, t. 2 (I.ª serie).

ficie corrisponda un punto unico dell'altra; e se in questa supposizione Z_0 è il valore di Z nel punto o di F, e Z'_0 il suo conjugato, allora ciascun punto del piano z corrispondente a Z'_0 giace fuori di F, perchè Z'_0 è situato fuori di E. Inoltre Z è soltanto nel punto o di F eguale a Z_0, perchè a ciascun punto Z_0 di E corrisponde un punto unico o di F. Assumendo quindi:

$$(a) \qquad w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0},$$

w diventerà nel punto o di F infinitamente piccola del primo ordine e nel resto di F si conserverà ad un valore, continua e diversa da zero, ed acquisterà nel contorno K di F, il quale corrisponde al contorno di E, il modulo 1. Quindi per la superficie F è:

$$(b) \qquad \xi = \log.\,\mathrm{mod.}\,\frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0}.$$

Essendo ds, dX gli elementi corrispondenti dei contorni di F ed E, così pure dp, dY i corrispondenti elementi delle loro normali, si avrà:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{\partial \xi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial p},$$

perchè a cagione della somiglianza delle parti infinitamente piccole, alla direzione di dp corrisponde la direzione delle Y decrescenti. Qui $\frac{\partial Y}{\partial p}$, come rapporto di elementi lineari corrrispondenti, è eguale a mod. $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial s}$, dunque $\frac{\partial Y}{\partial p} ds = dX$. Allora $\frac{\partial \xi}{\partial Y}$ è la parte reale di $\frac{\partial \log. w}{\partial Y}$ per $Y = 0$. Quindi per l'elemento ds di K corrispondente al dX, si ottiene:

$$(c) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial p} ds = \frac{2 Y_0\, dX}{(X - X_0)^2 + Y^2},$$

ed ecco allora stabilite tutte le espressioni richieste nell'art. 1, tosto che la superficie E sia rappresentata semplicemente sopra F.

V.

Poligoni ad un solo strato.

Sia F un poligono ad un solo strato, composto di un sol pezzo cogli n vertici $z_1, z_2 \cdot\cdot, z_n$, che si succedono in un giro positivo intorno ad F nell'ordine dei loro indici. L'angolo interno nel vertice z_s sia indicato con λ_s, in modo che sarà:

$$(1) \qquad \Sigma(\pi - \lambda_s) = 2\pi.$$

Noi ci proponiamo la questione di rappresentare semplicemente la superficie E su questo poligono.

Siano $a_1, a_2, .., a_n$ i punti dell'asse delle X corrispondenti ai vertici $z_1, z_2, .., z_n$ del poligono. Questi punti si seguiranno l'un l'altro nella direzione delle X crescenti, nello stesso ordine dei loro indici, e quindi fra due di essi il passaggio si dovrà fare pel punto infinitamente lontano dell'asse. Noi supporremo che questi sieno i punti a_n, a_1, onde fra le quantità reali a avrà luogo la successione:

$$a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n .$$

Il punto giacente sul contorno del poligono fra z_n e z_1, che corrisponde al al punto infinitamente lontano dell'asse delle X, verrà indicato con z'.

Ciò posto, si tratta di stabilire una tale dipendenza fra le quantità z e Z che: 1) ad un giro positivo intorno all'una delle due superficie F, E corrisponda un giro positivo intorno all'altra; 2) che i punti z, Z durante il giro passino contemporaneamente per i punti z_s, a_s; 3) che z percorra una linea retta ogni qual volta Z descrive uno dei segmenti $a_{s-1}\, a_s$; finalmente 4) che nella rappresentazione di E su F, nell'interno delle due superficie esista perfetta eguaglianza di angoli, cioè ne sia esclusa qualunque diramazione *(Verzweigung)*.

Mentre z e Z percorrono i corrispondenti segmenti rettilinei $z_{s-1}\, z_s$, $a_{s-1} a_s$ in direzione positiva, rimane inalterata la parte imaginaria di $\log. \frac{\partial z}{\partial Z}$ dipendente soltanto da queste direzioni. Nello stesso momento però in cui z piega intorno al vertice z_s, e quindi Z nel suo giro positivo intorno ad E oltrepassa il punto a_s, dz ruota dell'angolo $\pi - \lambda_s$ in direzione positiva, mentre dZ conserva la sua direzione. Quindi in un mezzo giro negativo intorno ad a_s, $\log. \frac{\partial z}{\partial Z}$ cresce di $(\pi - \lambda_s)\, i$, cioè in un intero giro positivo cresce di

$\frac{\lambda_s - \pi}{\pi} \cdot 2\pi i$; epperò $\left(Z - a_s\right)^{\frac{\pi - \lambda_s}{\pi}} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z}$ è in a_s monodroma, nè nulla nè infinita. Di qui segue che il prodotto

$$\left(Z - a_1\right)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} \cdot \left(Z - a_2\right)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \cdots \left(Z - a_n\right)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} = \chi$$

lungo l'asse delle X non ha punti di diramazione (*Verzweigungspuncte*), nè di valor zero, nè di discontinuità, perchè altrimenti K avrebbe od altri vertici o vertici d'altra natura. Inoltre $\frac{\partial z}{\partial Z}$, (e quindi per la relazione (1) anche χ) dev'essere in tutta la superficie E monodroma, continua e diversa da zero; perchè altrimenti la sua rappresentazione od avrebbe diramazioni e quindi non sarebbe ad un solo strato, oppure si estenderebbe all'infinito.

La funzione χ adunque non è mai in E polidroma o discontinua, e deve inoltre essere tale che in ciascun segmento $a_{s-1}\, a_s$ dell'asse delle X il rapporto $\frac{dz}{\text{mod.} dz}$ sia costante, perchè questi segmenti devono essere rappresentati linearmente. Siccome per $Y=0$ è $dZ=dX$, per la realtà della quantità a, il precedente prodotto sta in rapporto costante col suo modulo; perciò

$$\frac{\chi}{\text{mod.}\,\chi}$$

deve essere costante in ciascun segmento $a_{s-1}\, a_s$, quindi per la sua continuità avrà lo stesso valore costante in tutto l'asse delle X. Indicando questo valore con c, si ha per $Y=0$:

$$\log.\chi = \log.\text{mod.}\,\chi + \log.c;$$

adunque nell'asse delle X la parte imaginaria di $\log.\chi$ è costante; ed essendo χ in E monodroma, continua e diversa da zero, ciò non è altrimenti possibile se non quando $\log.\chi$, e quindi anche χ, ha dappertutto lo stesso valor costante. Designando con A questo valore, si ha:

$$(1) \qquad dz = A\left(Z-a_1\right)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1} \cdot \left(Z-a_2\right)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1} \cdots \left(Z-a_n\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1} \cdot dZ\,,$$

dove ora il rapporto della costante A al suo modulo deve essere scelto in modo, che $\frac{dz}{\text{mod.}\,dz}$ ottenga nel punto z' il valore che corrisponde alla data direzione da z_n a z_1.

Se α è l'angolo di questa direzione con quella delle x crescenti, e c una costante positiva, si otterrà:

$$(2) \qquad dz = c\,e^{\alpha i}\left(a_1-Z\right)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1} \cdot \left(a_2-Z\right)^{\frac{\lambda_2}{\pi}-1} \cdots \left(a_n-Z\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi}-1} dZ,$$

supposto che la variabile venga limitata alla superficie E, e ciascun fattore

$$\left(a_s - Z\right)^{\frac{\lambda_s}{\pi} - 1},$$

venga definito colla condizione di rimanere positivo nell'asse delle X, finchè sia $X < a_s$. Ponendo con queste limitazioni:

$$ce^{ai}\left(a_1 - Z\right)^{\frac{\lambda_1}{\pi} - 1} \cdot \left(a_2 - Z\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} \cdots \left(a_n - Z\right)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} = \mathfrak{Z}, \tag{3}$$

si ottiene mediante l'equazione:

$$z - z' = \int_{-\infty}^{Z} \mathfrak{Z}\, dZ, \tag{4}$$

la richiesta rappresentazione di E sopra F.

Indicando il lato del poligono fra i vertici z_s, z_{s+1} con L_s^{s+1}, si ha:

$$L_1^2 = \int_{a_1}^{a_2} \text{mod.}\,\mathfrak{Z}\, dX, \quad L_2^3 = \int_{a_2}^{a_3} \text{mod.}\,\mathfrak{Z}\, dX, \ldots, \quad L_{n-1}^n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \text{mod.}\,\mathfrak{Z}\, dX \tag{5}$$

$$L_n^1 = \int_{a_n}^{\infty} \text{mod.}\,\mathfrak{Z}\, dX + \int_{-\infty}^{a_1} \text{mod.}\,\mathfrak{Z}\, dX,$$

se dappertutto in mod.$\mathfrak{Z}$ vien posto $Y = 0$.

Siccome $\mathfrak{Z}$ in E non presenta nè diramazioni nè discontinuità, così $\int \mathfrak{Z}\, dZ$ preso lungo l'intero contorno di E è nullo, cioè avuto riguardo alla (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{Z}\, dX = 0,$$

ove si integri lungo la linea $Y = +0$. Di qui si hanno due equazioni fra i lati L e gli angoli λ, che non sono altro che le condizioni conosciute perchè il poligono K sia chiuso.

VI.

Per gli antecedenti risultati è risoluto il problema dell'art. IV per ciascun poligono F, di rappresentare cioè semplicemente E su F in modo che a ciascun punto dell'una superficie corrisponda un punto unico dell'altra.

Siccome per ogni posizione del punto Z in E è dato il corrispondente punto z di F, così si può in particolare per l'espressione:

$$w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0},$$

dell'art. IV, sempre assegnare il punto z_0 di F corrispondente a Z_0, per il quale l'ultima formula dell'art. I offra il valore cercato di U. In questo senso adunque (e la più parte delle soluzioni di tali questioni non vanno più oltre) la questione di determinare U si può considerare come risoluta per tutti i poligoni F.

Affatto diversamente si presenta la questione quando non si voglia contentarsi di ciò, ma invece si domandi che la quantità Z_0, che occorre per la formazione di w, venga determinata per ciascuna qualsivoglia posizione del punto o di F.

Infatti questa domanda non altro significa se non che, mediante la inversione dell'equazione (4), Z sia presentata come funzione di z.

Un esame più diligente mostra che sono solamente quattro i poligoni F per i quali questa equazione può essere posta senza ulteriori modificazioni, vale a dire il rettangolo, il triangolo equilatero, e due triangoli rettangoli, l'isoscele cioè e quello i cui angoli all'ipotenusa sono di 30° e 60°.

In tutti gli altri casi o deve essere limitata la variabilità di z e Z nelle superficie F ed E, onde non si ottiene alcuna semplificazione, mentre va perduta l'importanza analitica del problema; oppure, ove si richieda la inversione con variabili illimitate, il problema della rappresentazione dev'essere posto altrimenti.

Ed invero, se in F i rapporti angolari sono tutti razionali, e quindi $\mathfrak{Z}$ è una funzione algebrica di Z, si può facilmente per questa funzione determinare la superficie T rappresentante il suo modo di diramazione (*Verzweigunsart*), e l'ordine $2p+1$ della sua connessione (*Zusammenhang*), ed allora per conseguire l'inversione dell'equazione $dz = \mathfrak{Z} dZ$, devonsi aggiungere a questa, come è noto, ancora $p-1$ altre equazioni $dz_\sigma = \mathfrak{Z}_\sigma dZ_\sigma$, dove tutte le $\mathfrak{Z}_\sigma$ sono funzioni algebriche diramate come T, e tutte le z_σ sono integrali di prima specie non aventi tra loro relazioni lineari, alla quale ultima condizione in virtù dell'equazione (1) dell'art. precedente sodisfà anche z.

In termini più semplici, ciò significa doversi in questo caso rappresentare simultaneamente E su p superficie, una delle quali è la stessa F, e le altre dipendono da F. Il caso di $p=1$ mostra già che da questo punto di vista il problema primitivo si decompone in infiniti gruppi di casi particolari.

Del resto, da queste considerazioni risulta che i risultati dell'articolo precedente insegnano in ciascun caso a conoscere la classe di funzioni alla quale appartengono w e ξ, anche quando l'espressione di U sia stata trovata per altra via.

VII.

Ormai non rimane che a render possibile, collo svolgimento di un esempio trattato anche con altri metodi, il confronto fra questi ed il processo qui esposto. Noi scegliamo per brevità il più semplice di tutti, cioè il caso che la superficie F sia un rettangolo. Assumendo nell'art. I, la funzione arbitraria $\phi=0$, si può assai facilmente determinare per questa superficie la U col metodo dato da Fourier (cfr. Lamé *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes,* xiv), ma il principale risultato della ricerca, cioè la determinazione della specie di funzioni dalla quale dipende la soluzione, non si potrebbe riconoscere per questa via che a stento, sebbene la posteriore verificazione del medesimo non offra alcuna difficoltà.

Siano a e b i lati del rettangolo F, posti rispettivamente sugli assi delle x, y positive. Noi possiamo allora porre:

$$z_1=a, \quad z_2=a+bi, \quad z_3=bi, \quad z_4=0,$$

ed otteniamo:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha=0,$$

quindi:

$$\mathfrak{Z}=C:\sqrt{(a_1-Z)(a_2-Z)(a_3-Z)(a_4-Z)},$$

dove la radice è definita come dianzi.

La superficie T è a due strati *(zweiblättrig),* coi punti di diramazione $a_1<a_2<a_3<a_4$ situati sull'asse delle X. Assumendo, ciò che è lecito, pei

limiti ai quali si estendono i due strati di T gli orli delle rette congiungenti a_1 con a_2, ed a_3 con a_4, fra questi limiti gli strati saranno connessi, ed E sarà la metà positiva (corrispondente ad $Y > 0$) del primo strato.

Per questa connessione di T e per le condizioni imposte all'espressione $\mathfrak{Z}$, questa ottiene 1) valori contrari in due punti di T situati l'un sopra l'altro, ed invece 2) valori coniugati in due punti coniugati dello stesso strato.

Facendo inoltre nella solita maniera, a partire da un punto in E, un taglio trasversale *(Querschnitt)* intorno ad $a_1 a_2$, e l'altro intorno ad $a_2 a_3$, ne viene che Z per l'equazione $dz = \mathfrak{Z} dZ$ è determinata come una funzione di z ad un solo valore, avente i due periodi $2a$, $2bi$, i cui valori emergono anche da ciò che segue.

Trasportando in a_2 il punto d'incontro dei due tagli trasversali, e riducendo quest'ultimi a linee rette, la connessione del primo strato col secondo tra a_1 e a_2, ed in ciascuno strato la connessione della metà positiva colla metà negativa fra a_2 ed a_3, sarà tolta. La rappresentazione della superficie T' così modificata, sul piano z, diviene un rettangolo Π, i cui lati $2a$, $2b$ sono paralelli agli assi delle x, y, e le cui diagonali s'incontrano nell'origine $z_4 = 0$, e del quale adunque F è quella quarta parte che cade nel quadrante positivo.

Per dimostrarlo, si tiri anzitutto in ciascuno strato da a_4 al corrispondente punto Z una linea, in modo che le due linee così ottenute si coprano; allora la somma degli integrali $\int_{a_4}^{Z} \mathfrak{Z} dZ$, presi lungo queste due linee, sarà nulla, quindi a due punti di T' giacenti l'uno sull'altro corrrisponderanno due valori contrari di z, cioè due punti del piano z la cui congiungente passa per l'origine $z_4 = 0$ ed è ivi divisa per metà.

Tirando inoltre da a_4 sullo stesso strato di T' due linee simmetriche rispetto all'asse delle X, cioè congiungenti soltanto punti coniugati e terminate in siffatti punti, si otterranno mediante l'integrazione valori coniugati di z anche nei punti estremi. Due punti coniugati dello stesso strato di T' vengono dunque rappresentati nel piano z in due punti coniugati, cioè situati simmetricamente rispetto all'asse delle x.

Da ciò risulta subito che Π è la rappresentazione di T'. Se i rettangoli nei quali vien diviso Π dagli assi coordinati nell'ordine con cui si succedono in un giro positivo intorno all'origine, si denotano con F, F_1, F_2, F_3, possiamo concludere, siccome per le condizioni del problema E è di già rappresentato su F, che la parte positiva del secondo strato coperta da E sarà rappresentata su F_2, la metà negativa del primo strato su F_3, e quella del secondo su F_1. Contemporaneamente è dimostrato che $2a$, $2bi$ sono i moduli di periodicità di z.

Questi risultati sono sufficienti per esprimere la funzione:

$$w = e^{\gamma i} \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0}$$

mediante z. In fatti se z_0 è quel punto di F che corrisponde al punto Z_0 di E, allora $Z - Z_0$ diventa in Π nei due punti $z_0, -z_0$ infinitamente piccola del primo ordine, ma fuori di questi diversa da zero. Se z'_0 è conjugato a z_0, $Z - Z'_0$ non è mai in Π eguale a zero, fuorchè nei punti $z'_0, -z'_0$, nei quali è infinitamente piccola del primo ordine. Quindi w è una funzione di z ad un valore, coi periodi $2a$, $2bi$, la quale nel rettangolo Π dei periodi è infinitamente piccola solamente per $z = (z_0, -z_0)$, infinitamente grande solamente per $z = (z'_0, -z'_0)$, e sempre del primo ordine; e per $Z = \infty$ si riduce a $e^{\gamma i}$. Di qui segue che mediante la funzione di Jacobi:

$$\theta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} x - 2q^{\frac{9}{4}} \operatorname{sen} 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \operatorname{sen} 5x \cdots$$

la w si può esprimere nella forma:

$$w = C \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z - z_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z + z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z - z'_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z + z'_0)}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}},$$

dove C è una costante.

Se z' è il punto fra z_4 e z_1, che corrisponde al punto di E infinitamente lontano, si ha:

$$e^{\gamma i} = C \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z' - z_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z' + z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z' - z'_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z' + z'_0)}{2bi}\right)}$$

Siccome z' è reale, nel fattore di C il denominatore è conjugato al numeratore, onde il modulo di questo fattore sarà $= 1$. Quindi, se la quantità

$e^{\gamma i}$, soggetta soltanto a quest'ultima condizione, si assume eguale al fattore di C, riescirà $C = 1$, epperò:

$$w = \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z+z_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z'_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z+z'_0)}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}}.$$

Moltiplicando quest'espressione di w, coll'espressione che ne risulta per il valore coniugato w', si otterrà il quadrato del mod. w, e quindi per la determinazione di U nel punto z_0 di F:

$$e^{2\xi} = ww', \; \xi = \tfrac{1}{2} \log. ww'.$$

Decomponendo w in $u + iv$ si risolve inoltre il problema di rappresentare il rettangolo F sul cerchio $u^2 + v^2 < 1$, in modo che il centro del cerchio corrisponda al punto z_0 di F, da scegliersi arbitrariamente.

I tre altri problemi accennati nell'art. VI, per i quali soltanto è ancora possibile la rappresentazione di w per mezzo di z, si possono del pari risolvere facilmente coi mezzi qui adoperati.

Zurigo, 25 marzo 1867.