

Ueber fünf Doppelintegrale.

Von

L. POCHHAMMER in Kiel.

In den nachstehenden Rechnungen werden fünf Doppelintegrale behandelt, welche zu den Euler'schen Integralen in Beziehung stehen. Das erste dieser Doppelintegrale erweist sich als identisch mit dem Product $\Gamma(a)\Gamma(b)$, das zweite mit dem Product $\bar{\Gamma}(a)\bar{\Gamma}(b)$. Die drei übrigen reduciren sich auf Producte, in denen je ein $\bar{\Gamma}$ -Integral und ein Euler'sches Integral erster Art, resp. ein \bar{E} -Integral als Factor vorkommt (s. Band 35 dieser Annalen, S. 510 und 514). Jedes der fünf Doppelintegrale bildet den Gegenstand eines der fünf folgenden Paragraphen.

§ 1.

Es sei L das Doppelintegral

$$(1) \quad L = \int_0^\infty v^{b-1} dv \int_0^\infty e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a-b-1} du,$$

in welchem die Variablen u und v die positiven reellen Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen. Die Doppelintegrale werden hier so geschrieben, dass die zuletzt angegebene Integration zuerst ausgeführt wird; in (1) ist also zuerst nach u zu integriren. Für die Potenzen u^{a-b-1} , v^{b-1} sollen, falls die Constanten a und b reell sind, die reellen positiven Werthe, und im allgemeinen Fall die Werthe $e^{(a-b-1)\log u}$, $e^{(b-1)\log v}$, in denen $\log u$ und $\log v$ reell sind, genommen werden. Man setzt die reellen Bestandtheile von a und b als positiv voraus. Da v in dem Integral nach u als Parameter vorkommt, so sind, wenn für u die Grenzen 0 und ∞ eingesetzt werden, die Werthe v als endlich und von Null verschieden anzusehen. Werden also die zwei Grenzen ∞ , resp. die zwei Grenzen 0, der Variablen u und v mit einander verglichen, so ist die Annäherung an die Werthe ∞ und 0 bei u in beliebig hohem Masse stärker als bei v . Um dies hervorzuheben, schreibt man L lieber als den Ausdruck

$$(1a) \quad L = \lim_{(\delta=0, q=\infty)} \int_{\delta}^q v^{b-1} dv \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a-b-1} du,$$

welcher erkennen lässt, dass erst schliesslich δ als unendlich klein und q als unendlich gross angenommen werden sollen.

Das Integral L wird durch Aenderung der Integrationsfolge auf das Product zweier Euler'scher Integrale zurückgeführt. Man hat die Zulässigkeit der genannten Aenderung, durch welche die gegenseitigen Verhältnisse der zwei Grenzen ∞ , bezw. der zwei Grenzen 0 umgekehrt werden, zu beweisen. Zu diesem Behufe nennt man δ' eine sehr kleine, q' eine sehr grosse positive reelle Zahl, von der Beschaffenheit, dass bei abnehmendem δ der Quotient $\frac{\delta}{\delta'}$ beliebig klein, bei wachsendem q der Quotient $\frac{q}{q'}$ beliebig gross wird (z. B. $\delta' = \sqrt{\delta}$, $q' = \sqrt{q}$), und theilt das Integral nach u in die drei Theile

$$\int^{\delta'} + \int_{\delta'}^{q'} + \int_{q'}^{\infty}.$$

Das Integral L zerlegt sich dementsprechend in die drei Summanden

$$(2) \quad L = L_1 + L_2 + L_3,$$

wo zur Abkürzung

$$(3) \quad L_1 = \lim_{(\delta=0, q=\infty)} \int_{\delta}^q dv \int_0^{\delta'} f(u, v) du,$$

$$(4) \quad L_2 = \lim_{(\delta=0, q=\infty)} \int_{\delta}^q dv \int_{\delta'}^{q'} f(u, v) du,$$

$$(5) \quad L_3 = \lim_{(\delta=0, q=\infty)} \int_{\delta}^q dv \int_{q'}^{\infty} f(u, v) du$$

und

$$(6) \quad f(u, v) = v^{b-1} e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a-b-1}$$

gesetzt ist. In dem Integral L_2 kann, so lange δ , q , δ' , q' endliche Werthe bedeuten, die Integrationsordnung umgekehrt werden, da $f(u, v)$ stetig und eindeutig bleibt, und wenn δ , δ' bis zur Null abnehmen, q , q' unendlich werden, so geschieht dies (nach der Definition von δ' , q') in der Art, dass die Variable v sich vor der Variable u den Grenzen 0 und ∞ nähert. Hieraus folgt, dass die Grösse L_2 bei abnehmendem δ , δ' und wachsendem q , q' in das Integral

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-u} u^{a-b-1} du \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{u}} v^{b-1} dv$$

übergeht, welches aus (1) durch Aenderung der Integrationsfolge entsteht. Man kann somit die Identität der Integrale (1) und (7) dadurch beweisen, dass man zeigt, dass die Integrale L_1 und L_2 verschwindend

klein sind. Bevor jedoch hierauf eingegangen wird, mögen einige kurze Bemerkungen Platz finden.

Es seien u, σ, τ positive reelle Grössen, und σ, τ unabhängig von u . Der Ausdruck $\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau}$ wird sowohl für ein unbegrenzt abnehmendes als für ein unbegrenzt wachsendes u unendlich, und da die Gleichung

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau} \right) = \frac{u^2 - \sigma\tau}{\tau u^2} = 0$$

die Wurzeln $u = \pm \sqrt{\sigma\tau}$ hat, so ergibt sich zwischen $u = 0$ und $u = \infty$ für die obige Function das Minimum

$$\left(\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau} \right)_{u=\sqrt{\sigma\tau}} = + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}.$$

Mithin ist für alle positiven reellen Werthe von u

$$(8) \quad e^{-\left(\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau}\right)} \leq e^{-2\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}}.$$

Das Product $e^{-\frac{\sigma}{u}} u^{-\tau}$, welches für ein unendlich grosses und für ein unendlich kleines (positives) u verschwindet, nimmt, wie die Gleichung

$$\frac{d}{du} \left(e^{-\frac{\sigma}{u}} u^{-\tau} \right) = e^{-\frac{\sigma}{u}} u^{-\tau-2} (\sigma - \tau u)$$

zeigt, für $u = \frac{\sigma}{\tau}$ den Maximalwerth $e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{\tau}$ an. Also besteht unter den für (8) erwähnten Voraussetzungen auch die Ungleichheit

$$(9) \quad \frac{e^{-\frac{\sigma}{u}}}{u^{\tau}} \leq e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{\tau}.$$

Es sei ferner

$$(10) \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2,$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2 reelle Zahlen bedeuten. Dann gelten für positive reelle Werthe von u und v die Gleichungen

$$\text{mod. } (u^{a-b-1}) = u^{a_1-b_1-1}, \quad \text{mod. } (v^{b-1}) = v^{b_1-1}.$$

Denn die Grössen $u^{i(a_2-b_2)}$ und v^{ib_2} , welche $e^{i(a_2-b_2)\log u}$ und $e^{ib_2\log v}$ geschrieben werden können ($\log u, \log v$ reell), haben den Modul Eins.

Man geht nun dazu über, Ungleichheiten für die Moduln der Integrale L_1 und L_3 aufzusuchen. Da der Modul einer Summe höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Summanden ist, so folgt

$$(11) \quad \text{mod. } L_1 \leq \int_{\delta}^q v^{b_1-1} dv \int_0^{\sigma} e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a_1-b_1-1} du,$$

$$(12) \quad \text{mod. } L_3 \leq \int_{\delta}^q v^{b_1-1} dv \int_{q'}^{\infty} e^{-\frac{v}{u}-v} u^{a_1-b_1-1} du.$$

Aus (8) ergibt sich, wenn für σ und τ die Werthe $\sigma = v$, $\tau = 2$ gewählt werden,

$$e^{-\frac{v}{u} - \frac{u}{2}} \leq e^{-\sqrt{2}v}.$$

Durch Benutzung dieser Ungleichheit findet man

$$\text{mod. } L_3 < \int_{\delta}^{\eta} e^{-\sqrt{2}v} v^{b_1-1} dv \int_{\eta'}^{\infty} e^{-\frac{u}{2}} u^{a_1-b_1-1} du$$

oder, wenn $\sqrt{2}v = v_1$, $v = \frac{1}{2} v_1^2$, und $u = \frac{1}{u_1}$ substituirt wird,

$$\text{mod. } L_3 < \frac{1}{2^{b_1-1}} \int_{\sqrt{2}\delta}^{\sqrt{2}\eta} e^{-v_1} v_1^{2b_1-1} dv_1 \int_0^{\frac{1}{\eta'}} e^{-\frac{1}{2u_1}} u_1^{b_1-a_1-1} du_1.$$

In dem rechts stehenden Ausdruck ist das Integral nach v_1 , da man δ unendlich klein, η unendlich gross zu nehmen hat, gleich dem Euler'schen Integral $\Gamma(2b_1)$. Für das Integral nach u_1 kann (gemäss dem bekannten Theorem vom Mittelwerthe) das Product

$$e^{-\frac{1}{2\kappa}} \kappa^{b_1-a_1-1} \frac{1}{\eta'}$$

gesetzt werden, in welchem κ einen zwischen 0 und $\frac{1}{\eta'}$ liegenden Werth bedeutet. Also nähert sich, wenn η' unbegrenzt wächst, mod. L_3 dem Werthe Null.

Bei der auf L_1 bezüglichen Rechnung unterscheidet man, ob $a_1 - b_1$ positiv oder negativ ist. Da aus (8) (für $\sigma = v$, $\tau = 1$)

$$e^{-\frac{v}{u} - u} \leq e^{-2\sqrt{v}}$$

folgt, so besteht (nach (11)) die Ungleichheit

$$\text{mod. } L_1 < \int_{\delta}^{\eta} e^{-2\sqrt{v}} v^{b_1-1} dv \int_0^{\delta'} u^{a_1-b_1-1} du,$$

welche im Falle $a_1 - b_1 > 0$ den Schluss erlaubt, dass mod. L_1 mit δ' zugleich beliebig klein wird. Denn das Integral nach u ist gleich $\frac{1}{a_1 - b_1} \delta'^{a_1-b_1}$ und das Integral nach v geht durch die Substitution $2\sqrt{v} = v_2$, $v = \frac{v_2^2}{4}$, in den Ausdruck

$$2^{1-2b_1} \int_{2\sqrt{\delta}}^{2\sqrt{\eta}} e^{-v_2} v_2^{2b_1-1} dv_2 = 2^{1-2b_1} \Gamma(2b_1)$$

über.

Ist $a_1 - b_1$ negativ oder gleich Null, so bezeichne man durch ε irgend eine positive reelle Constante, die kleiner als a_1 ist (z. B. $\frac{a_1}{2}$ oder $\frac{a_1}{3}$), und schreibe

$$e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a_1-b_1-1} = e^{-\frac{v}{2u}-u} \frac{e^{-\frac{v}{2u}}}{u^{b_1-a_1+\varepsilon}} \frac{1}{u^{1-\varepsilon}}.$$

Da nun aus (8) (für $\sigma = \frac{v}{2}$, $\tau = 1$) und aus (9) (für $\sigma = \frac{v}{2}$, $\tau = b_1 - a_1 + \varepsilon$) die Ungleichheiten

$$e^{-\frac{v}{2u}-u} \leq e^{-V2v}, \quad \frac{e^{-\frac{v}{2u}}}{u^{b_1-a_1+\varepsilon}} \leq \frac{\mathfrak{A}}{v^{b_1-a_1+\varepsilon}}$$

erhalten werden, wo \mathfrak{A} die Constante

$$\mathfrak{A} = e^{a_1-b_1-\varepsilon} (2[b_1 - a_1 + \varepsilon])^{b_1-a_1+\varepsilon}$$

bedeutet, so ist nach (11)

$$\text{mod. } L_1 < \mathfrak{A} \int_{\delta}^{\eta} e^{-V2v} v^{a_1-\varepsilon-1} dv \int_0^{\delta'} u^{\varepsilon-1} du.$$

Durch Anwendung der Substitution $V2v = v_1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\eta} e^{-V2v} v^{a_1-\varepsilon-1} dv &= 2^{1+\varepsilon-a_1} \int_{V2\delta}^{V2\eta} e^{-v_1} v_1^{2a_1-2\varepsilon-1} dv_1 \\ &= 2^{1+\varepsilon-a_1} \Gamma(2a_1-2\varepsilon), \end{aligned}$$

so dass für L_1 die Ungleichheit

$$\text{mod. } L_1 < \frac{2^{1+\varepsilon-a_1} \mathfrak{A}}{\varepsilon} \delta'^{\varepsilon} \Gamma(2a_1-2\varepsilon)$$

besteht, deren rechte Seite sich mit abnehmendem δ' der Null nähert.

Hiermit ist bewiesen, dass wenn a_1 und b_1 positiv sind, die Integrale L_1 und L_3 Grössen darstellen, die man vernachlässigen darf. Also stimmt das Integral (1) mit dem Integral (7) im Werthe überein.

Indem man in (7), wo die Integration nach v zuerst auszuführen ist,

$$v = ut, \quad dv = u dt,$$

setzt, findet man

$$L = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{a-1} du \int_0^{\infty} e^{-t} t^{b-1} dt = \Gamma(a) \Gamma(b).$$

Somit gelangt man zu der Formel

$$(13) \quad \int_0^{\infty} v^{b-1} dv \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a-b-1} du = \Gamma(a) \Gamma(b),$$

bei der die reellen Bestandtheile der Constanten a und b als positiv vorausgesetzt sind.

§ 2.

Es soll nunmehr ein Doppelintegral

$$(14) \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} v^{b-1} dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u} + u} u^{a-b-1} du,$$

in welchem u und v complexe Werthe annehmen, betrachtet werden. Man lege um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei Kreise \mathfrak{R} , \mathfrak{L} mit Radien k , l . Von den zwei Halbkreisen, in welche der Kreis \mathfrak{R} durch

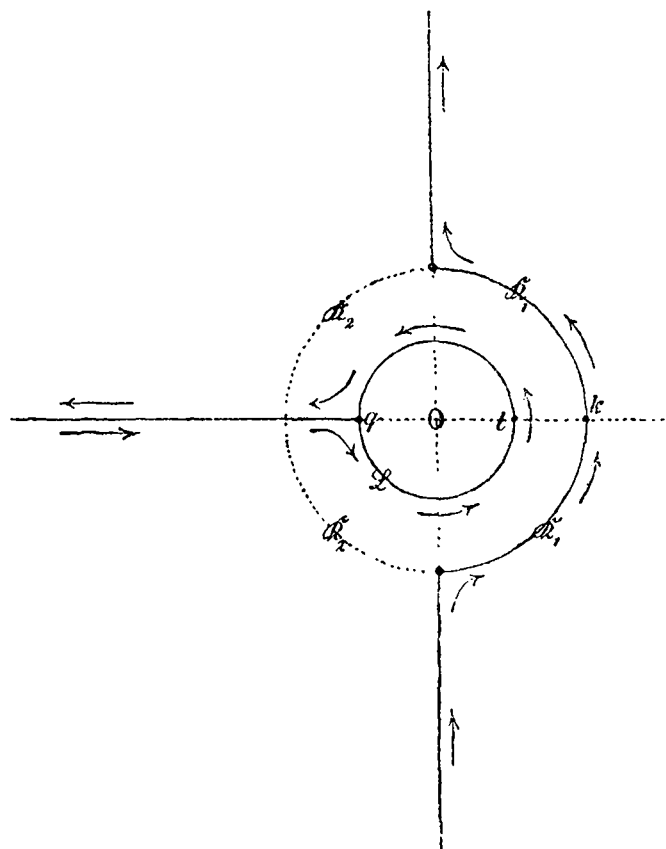


Fig. 1.

die imaginäre Axe zerlegt wird, heisse der auf der Seite der positiven reellen Werthe liegende \mathfrak{R}_1 , der andere \mathfrak{R}_2 . Als Weg der Variable u nimmt man in (14) das Stück der negativen imaginären Axe von $-\infty i$ bis $-ki$, den Halbkreis \mathfrak{R}_1 (so dass der Nullpunkt zur Linken bleibt) und das Stück der positiven imaginären Axe von $+ki$ bis $+\infty i$. Die Variable v soll den Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis $-l$, den Kreis \mathfrak{L} im positiven Sinne und zum zweiten Mal die Strecke von $-l$ bis $-\infty$ durchlaufen. Die hier anzuwendenden Zweige der Potenzen u^{a-b-1} und v^{b-1}

werden durch die Werthe in den Punkten $u = k$, resp. $v = l$ fixirt, indem man die Gleichungen

$$k^{a-b-1} = e^{(a-b-1)\log k}, \quad l^{b-1} = e^{(b-1)\log l}$$

gelten lässt, in denen $\log k$ und $\log l$ die reellen Logarithmen bedeuten. Wie in (10) wird

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2$$

gesetzt. Jedoch nimmt man hier die Grössen a_1 , b_1 , $a_1 - b_1$ als negativ an.

Das Integral N wird nach derselben Methode wie das Integral (1) behandelt. Man beweist, dass die Integrationsordnung umgekehrt, d. h. die Integration nach v zuerst ausgeführt werden kann. Dann

ergibt sich N als das Product zweier einfacher Integrale. Es werde für N (analog zu (1a)) die genauere Schreibweise

$$(14a) \quad N = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{\bar{(0)}} v^{b-1} dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u} u^{a-b-1} du$$

angewendet, welche andeuten soll, dass die unendlichen Grenzen von u noch als unendlich gross gegen die unendlichen Grenzen von v gelten müssen.

Das Integral nach u wird, wie in § 1, in drei Theile getheilt. Indem man p als eine überaus grosse positive reelle Zahl, die aber klein gegen q bleibt, (z. B. $p = \sqrt{q}$) definirt, nennt man N_1, N_2, N_3 die Integrale

$$(15) \quad N_1 = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{\bar{(0)}} dv \int_{-\infty i}^{-pi} \varphi(u, v) du,$$

$$(16) \quad N_2 = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{\bar{(0)}} dv \int_{-pi}^{+pi} \varphi(u, v) du,$$

$$(17) \quad N_3 = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{\bar{(0)}} dv \int_{+pi}^{+\infty i} \varphi(u, v) du,$$

in denen $\varphi(u, v)$ die Function

$$(18) \quad \varphi(u, v) = v^{b-1} e^{\frac{v}{u}+u} u^{a-b-1}$$

bedeutet. Es ist dann

$$(19) \quad N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Man will zeigen, dass wenn für p eine genügend grosse Zahl gesetzt wird, mod. N_1 und mod. N_3 beliebig klein sind.

Bei N_1 und N_3 soll das Integral nach v in je drei Theile getheilt werden, nämlich in die 2 Integrale mit geradlinigem Integrationsweg und in das Integral längs des Kreises L . Man setzt

$$N_1^{(1)} = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{-l} dv \int_{-\infty i}^{-pi} \varphi(u, v) du,$$

$$N_1^{(2)} = \int_{-l}^{\bar{(0)}} dv \int_{-\infty i}^{-pi} \varphi(u, v) du,$$

$$N_1^{(3)} = \lim_{(q=\infty)} \int_{-l}^{-q} dv \int_{-\infty i}^{-pi} \varphi(u, v) du,$$

also

$$N_1 = N_1^{(1)} + N_1^{(2)} + N_1^{(3)}.$$

Wird in $N_1^{(1)}$

$$u = -ri, \quad v = -v$$

substituiert, so entsteht die Gleichung

$$N_1^{(1)} = e^{-\frac{\pi i}{2}(a+b)} \lim_{(q=\infty)} \int_l^q v^{b-1} dv \int_p^\infty e^{-i\left(\frac{v}{r}+r\right)} r^{a-b-1} dr.$$

Nach Berücksichtigung von (10) folgt hieraus

$$\text{mod. } N_1^{(1)} < e^{\frac{\pi}{2}(a_2+b_2)} \lim_{(q=\infty)} \int_l^q v^{b_1-1} dv \int_p^\infty r^{a_1-b_1-1} dr.$$

Die Constanten b_1 , $a_1 - b_1$ sind aber nach der Voraussetzung negativ; somit ergibt sich

$$\text{mod. } N_1^{(1)} < \frac{e^{\frac{\pi}{2}(a_2+b_2)} l^{b_1}}{b_1(a_1-b_1)} p^{a_1-b_1},$$

d. h. $N_1^{(1)}$ wird für ein grosses p verschwindend klein. Die nämliche Eigenschaft kommt dem Integral $N_1^{(3)}$ zu, da dasselbe sich von $N_1^{(1)}$ nur durch den Factor $-e^{2\pi i b}$ unterscheidet. Das Integral $N_1^{(2)}$, in welchem v den Kreis mit dem Radius l durchläuft, geht durch die Substitution

$$u = -ri, \quad v = l e^{i\omega} = l \cos \omega + i l \sin \omega$$

in den Ausdruck

$$N_1^{(2)} = l^b e^{-\frac{\pi i}{2}(a-b+1)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{b i \omega} d\omega \int_p^\infty e^{-\frac{l \sin \omega}{r} + i\left(\frac{l \cos \omega}{r} - r\right)} r^{a-b-1} dr$$

über. Dies führt zu der Ungleichheit

$$\text{mod. } N_1^{(2)} < l^{b_1} e^{\frac{\pi}{2}(a_2-b_2)} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega \int_p^\infty e^{-\frac{l \sin \omega}{r}} r^{a_1-b_1-1} dr.$$

Indem man die Exponentialgrösse $e^{-\frac{l \sin \omega}{r}}$ durch ihren Maximalwerth $e^{\frac{l}{p}}$ ersetzt, findet man, dass $\text{mod. } N_1^{(2)}$ kleiner ist als das Product

$$\frac{2\pi l^{b_1} e^{\frac{\pi}{2}(a_2-b_2) + \frac{l}{p}}}{b_1 - a_1} \frac{1}{p^{b_1-a_1}},$$

welches (da $b_1 - a_1$ positiv) mit wachsendem p sich der Null nähert.

Hiermit ist bewiesen, dass N_1 für ein hinreichend grosses p kleiner als jede angebbare Zahl ist. Dasselbe gilt von dem in (17) genannten Integral N_3 . Denn die obige Rechnung ändert sich in keinem wesentlichen Punkte, wenn bei der Integration nach u die Grenzen $-\pi i$ und $-\infty i$ durch $+\pi i$ und $+\infty i$ ersetzt werden.

Es bleibt übrig, die Grösse N_2 zu behandeln, auf die sich, gemäss der Gleichung (19), das Integral N reducirt.

Bezeichnet man durch u_1, u_2 zwei beliebige Punkte des Integrationsweges von u und durch v_1, v_2 zwei beliebige Punkte des Integrationsweges von v , so macht es für den Werth von $\varphi(u_2, v_2)$ keinen Unterschied, ob zuerst u von u_1 nach u_2 und dann v von v_1 nach v_2 übergeht, oder ob zuerst v und hierauf u in der angegebenen Art variirt. Denn $\varphi(u, v)$ ist nach (18) gleich dem Product aus einer Function von u , einer Function von v und der eindeutigen Grösse $e^{\frac{v}{u}}$. Werden also in dem Doppelintegral

$$\int_{-q}^{\bar{(0)}} dv \int_{-pi}^{+pi} \varphi(u, v) du,$$

das als Grenzfall einer Doppelsumme aufzufassen ist, diejenigen Summanden gesammelt, welche einen und denselben Werth $e^u u^{a-b-1} du$ als Factor enthalten, so ist deren Summe gleich dem Product aus dem letztgenannten Werthe und dem Integral

$$\int_{-q}^{\bar{(0)}} e^{\frac{v}{u}} v^{b-1} dv.$$

Man bemerke ferner, dass der Weg der Variable u durch den Werth von v nicht beeinflusst wird, und dass die zu integrirende Function für alle vorkommenden Werthe von u und v stetig bleibt. Es folgt hieraus, dass man in dem Integral N_2 , in welchem p und q zunächst als endlich angesehen werden mögen, die Integrationsfolge ändern darf, so dass für N_2 die Gleichung

$$N_2 = \int_{-pi}^{+pi} e^u u^{a-b-1} du \int_{-q}^{\bar{(0)}} e^{\frac{v}{u}} v^{b-1} dv$$

entsteht, in der die Integration nach v zuerst ausgeführt wird. Dies bleibt gültig, wenn q und p unbegrenzt wachsen; denn die unendlichen Grenzen, die zum Integral nach v gehören, sind (nach der Definition von p) unendlich gross gegen die Grenzen des Integrals nach u . Die Substitution

$$v = ut, \quad dv = u dt$$

ergiebt dann

$$N_2 = \int_{-pi}^{+pi} e^u u^{a-1} du \int_{-\frac{q}{u}}^{\bar{(0)}} e^t t^{b-1} dt.$$

Man kann nun zeigen, dass das in letzterem Ausdruck enthaltene Integral

$$(20) \quad \int_{-\frac{q}{u}}^{\bar{(0)}} e^t t^{b-1} dt$$

von u nicht abhängt, vielmehr stets den Werth $\bar{\Gamma}(b)$ hat. Da $\text{mod. } u$ im Maximum den Betrag p erreicht, so ist $\text{mod. } \frac{q}{u}$ eine unbegrenzt grosse Zahl. Im ersten Theil des Weges von u , wo $u = -ri$, $p \geq r \geq k$ ist, hat man $-\frac{q}{u} = \frac{q}{ri} = -\frac{qi}{r}$, so dass der Werth $-\frac{q}{u}$ einen überaus entfernten Punkt der negativen imaginären Axe darstellt. Gehört u sodann dem Halbkreise \mathfrak{R}_1 an (Fig. 1), so ist $u = ke^{\vartheta i}$, $-\frac{q}{u} = -\frac{q}{k} e^{-\vartheta i}$, wo ϑ von $-\frac{\pi}{2}$ durch 0 zu $+\frac{\pi}{2}$ übergeht. Hier durchläuft der Punkt $-\frac{q}{u}$ diejenige Hälfte des unendlichen Horizonts, in der die reellen Bestandtheile negativ sind. Im letzten Theil des Weges von u , wo $u = +ri$ ist, bedeutet der Werth $-\frac{q}{u}$ einen unendlich entfernten Punkt der positiven imaginären Axe. Aus dieser Betrachtung ergibt sich, dass das Integral (20), wenn q unbegrenzt wächst, stets mit einem von drei Integralen identisch ist, welche der Verfasser in der Abhandlung „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ “ behandelt und dort durch die Nummern (11), (20), (21) bezeichnet hat*). Letztere Integrale haben, obwohl ihr Integrationsweg ein verschiedener ist, doch den gleichen Werth. Je nachdem u dem ersten, zweiten oder dritten Theile der u -Curve angehört, stimmt das obige Integral (20) mit dem Integral (20), (11) oder (21) der erwähnten Arbeit (woselbst nur b statt a zu schreiben ist) überein. Daher hat das Integral (20) allgemein den Werth $\bar{\Gamma}(b)$. Für N_2 entsteht in Folge dessen die Gleichung

$$N_2 = \bar{\Gamma}(b) \int_{-pi}^{+pi} e^u u^{a-1} du.$$

Das Integral nach u ist aber für ein unbegrenzt wachsendes p , gemäss der Formel (18) des soeben genannten Aufsatzes**), gleich $\bar{\Gamma}(a)$.

Die vorstehende Rechnung führt auf diese Weise, unter der Voraussetzung, dass die reellen Bestandtheile der Constanten a , b , $a - b$ negativ sind, zu der Gleichung

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_{-\infty}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u} + u} u^{a-b-1} du \\ & = \bar{\Gamma}(a) \bar{\Gamma}(b), \end{aligned} \right.$$

in welcher der Integrationsweg der Variable u so zu bilden ist, dass der Nullpunkt in einer auf der Seite der positiven reellen Werthe liegenden Curve umgangen wird.

*) Dieser Band, S. 161 und 164.

**) Dieser Band, S. 163.

§ 3.

Man nenne P das Doppelintegral

$$(22) \quad P = \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^1 (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1-u^2)^{a-1} du,$$

bei welchem v die nämliche Curve wie bei dem Integral (14) durchläuft, während u einen reellen Integrationsweg hat. Für dasselbe möge die nähere Bestimmung gelten, dass die Potenz $(1-u^2)^{a-1}$ an der unteren Integralgrenze $u=0$ den Werth 1 annimmt, und dass für die Potenz v^{b-1} der in § 2 angegebene Zweig gewählt wird. Indem man (wie in (10))

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2$$

setzt, macht man die Annahme, dass a_1 positiv, b_1 negativ sei.

Es werde durch δ eine positive reelle Zahl, welche sehr klein, jedoch endlich ist, und durch P_1 das Doppelintegral

$$P_1 = \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^\delta (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1-u^2)^{a-1} du$$

bezeichnet. Lässt sich zeigen, dass mod. P_1 für ein genügend kleines δ beliebig klein wird, so darf in (22) bei der Integration nach u die Grenze 0 durch δ ersetzt werden.

Der Integrationsweg der Variable v besteht nach Fig. 1 aus dem doppelt durchlaufenen Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis $-l$ und dem Kreise \mathfrak{L} . Der Theil von P_1 , der dem Kreise \mathfrak{L} entspricht, wird zugleich mit δ beliebig klein, weil die zu integrirende Function stetig bleibt, und der Weg der Variable v eine endliche Länge, der Weg der Variable u jedoch die Länge δ hat. Auf den geradlinigen Strecken werde $v = -s$ gesetzt ($s \geq l$). Es ist dann

$$e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}} = e^{2ui\sqrt{s}} + e^{-2ui\sqrt{s}} = 2 \cos(2u\sqrt{s}).$$

Der Modul der letzteren Grösse erreicht also höchstens den Werth 2. Man erhält hierdurch die Ungleichheit

$$\begin{aligned} \text{mod.} \int_{-\infty}^{-l} v^{b-1} dv \int_0^\delta (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1-u^2)^{a-1} du \\ < 2 \int_l^\infty s^{b_1-1} ds \int_0^\delta (1-u^2)^{a_1-1} du, \end{aligned}$$

deren rechte Seite verschwindend klein ist, da dieselbe (nach Ausführung der auf s bezüglichen Integration) durch Anwendung des Satzes vom Mittelwerth in den Ausdruck

$$\frac{2l^{b_1}}{-b_1} (1-\mu^2)^{a_1-1} \delta, \quad \text{wo } 0 < \mu < \delta,$$

übergeht. Eine analoge Ungleichheit gilt für den letzten Theil des Integrals nach v . Wird demnach δ hinreichend klein gewählt, so ist mod. P_1 kleiner als jede angebbare Zahl.

Wie bei N_2 (§ 2), so kann auch bei P , nachdem die Grenze δ statt der Grenze 0 für die Integration nach u eingeführt ist, die Reihenfolge der Integrationen geändert werden. Es entsteht hierdurch für P der Ausdruck

$$P = \int_{\delta}^1 (1-u^2)^{a-1} du \int_{-\infty}^{(0)} (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) v^{b-1} dv,$$

auf welchen man die Substitution $v = w^2$, $w = \sqrt{v}$ anwendet. Für $v = -\infty$ nimmt w den Werth $\pm i\infty$ an. Man wähle $-i\infty$ als den Werth von w , welcher der unteren Integralgrenze entspricht. Dann durchläuft w zunächst die negative imaginäre Axe von $-i\infty$ bis zum Punkte $-i\sqrt{l}$, sodann diejenige Hälfte des um den Nullpunkt mit dem Radius \sqrt{l} beschriebenen Kreises, welche auf der Seite der positiven reellen Werthe liegt (da v den Umlauf längs des Kreises \mathfrak{L} in positiver Drehungsrichtung ausführt), und endlich den Abschnitt der positiven imaginären Axe von $+i\sqrt{l}$ bis $+i\infty$. Auf diese Weise ergibt sich die Gleichung

$$P = 2 \int_{\delta}^1 (1-u^2)^{a-1} du \int_{-\infty i}^{+\infty i} (e^{2uw} + e^{-2uw}) w^{2b-1} dw.$$

Man setze nun

$$w = \frac{t}{2u}, \quad 2uw = t, \quad dw = \frac{1}{2u} dt.$$

Dann wird

$$P = 2^{1-2b} \int_{\delta}^1 (1-u^2)^{a-1} u^{-2b} du \int_{-\infty i}^{+\infty i} (e^t + e^{-t}) t^{2b-1} dt.$$

Da u reell und positiv ist, so besteht der Weg der Variable t aus dem Stück der negativen imaginären Axe von $-i\infty$ bis $-2ui\sqrt{l}$, aus dem Halbkreise um den Nullpunkt mit dem Radius $2u\sqrt{l}$ und aus dem Stück der positiven imaginären Axe von $+2ui\sqrt{l}$ bis $+i\infty$. Jedoch kann der Radius des Halbkreises, in welchem die t -Curve den Nullpunkt umgeht, beliebig geändert werden, ohne dass dies den Werth des Integrals beeinflusste. Denn die zu integrierende Function hat auf dem Flächenstück, welches zwischen der ursprünglichen und der modificirten t -Curve liegt, keinen singulären Punkt. Man erkennt, dass sobald der genannte Radius constant genommen wird, P in das Product zweier einfacher Integrale übergeht. Bei dem Integral nach u möge statt der Grenze δ nun wieder die Grenze 0 angewendet werden. Nach den Formeln (18) und (19a) des erwähnten Aufsatzes

„Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ “*) ist in dem obigen Ausdruck von P (da die Variable t den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht)

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{t^{2b-1}} dt = \bar{\Gamma}(2b),$$

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{-t^{2b-1}} dt = 0.$$

Indem ferner durch $E(p, q)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$(23) \quad {}^1E(p, q) = E(q, p) = \int_0^1 \xi^{p-1} (1 - \xi)^{q-1} d\xi$$

bezeichnet wird, findet man mit Hülfe der Substitution $u = +\sqrt[2]{\xi}$

$$\int_0^1 u^{-2b} (1 - u^2)^{a-1} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi^{-b - \frac{1}{2}} (1 - \xi)^{a-1} d\xi = \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{2} - b, a\right).$$

Somit erhält man für P die Gleichung

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\bar{(0)}} v^{b-1} dv \int_0^1 (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1 - u^2)^{a-1} du \\ & = \frac{1}{2^{2b}} E\left(\frac{1}{2} - b, a\right) \bar{\Gamma}(2b), \end{aligned} \right.$$

in welcher der reelle Bestandtheil von a als positiv, der reelle Bestandtheil von b als negativ vorausgesetzt ist. Die Grösse $\frac{1}{2^{2b}}$ hat, gemäss den Festsetzungen für v^{b-1} , resp. für t^{2b-1} , den Werth $e^{-2b \log 2}$, woselbst $\log 2$ den reellen Logarithmus bedeutet.

Wie die vorstehende Entwicklung zeigt, kann (durch Fortlassung des Summandus, der den Werth Null hat) das gewonnene Resultat auch dahin formulirt werden, dass

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty i}^{+\infty i} w^{2b-1} dw \int_0^1 e^{2uw} (1 - u^2)^{a-1} du \\ & = \frac{1}{2^{2b+1}} E\left(\frac{1}{2} - b, a\right) \bar{\Gamma}(2b) \end{aligned} \right.$$

ist, falls bei Umgehung des Nullpunktes der Weg der Variable w auf der Seite der positiven reellen Werthe bleibt.

§ 4.

Es soll sodann das Doppelintegral

$$(26) \quad Q = \int_{-\infty}^{\bar{(0)}} v^{b-1} dv \int_0^1 e^{-2uv} (1 - u^2)^{a-1} du$$

*) Dieser Band, Seite 163 und 164.

betrachtet werden. Als Integrationsweg von v nimmt man, nach Fig. 1, den Abschnitt der positiven reellen Axe von ∞ bis l , den Kreis \mathfrak{L} , der im positiven Sinne durchlaufen wird, und die Strecke von l bis ∞ . Für v^{b-1} werde auf dem ersten Theil des Integrationsweges der Werth $e^{(b-1)\log v}$, in welchem $\log v$ reell ist, gewählt. Die Potenz von $(1-u^2)^{a-1}$ sei gleich 1 für $u=0$. Der reelle Theil von a wird als positiv, der von b als negativ vorausgesetzt.

Indem man durch δ wiederum eine sehr kleine, jedoch endliche positive reelle Zahl bezeichnet, bildet man das Integral

$$Q_1 = \int_{\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^{\delta} e^{-2uv} (1-u^2)^{a-1} du,$$

von dem bewiesen werden soll, dass es für ein genügend kleines δ beliebig klein wird. Wie bei dem Integral P_1 (§ 3) schliesst man aus der Stetigkeit der zu integrierenden Function, dass der zum Kreise \mathfrak{L} gehörige Bestandtheil von Q_1 mit δ zugleich unbegrenzt abnimmt. In den übrigen Theilen von Q_1 sind u und v reell und positiv, also $e^{-2uv} < 1$. Man erhält, nach Berücksichtigung von (10), die Ungleichheit

$$\begin{aligned} & \text{mod.} \int_l^{\infty} v^{b-1} dv \int_0^{\delta} e^{-2uv} (1-u^2)^{a-1} du \\ & < \int_l^{\infty} v^{b-1} dv \int_0^{\delta} (1-u^2)^{a-1} du \end{aligned}$$

d. h.

$$< \frac{l^b}{-b_1} (1-\mu^2)^{a-1} \delta, \text{ wo } 0 < \mu < \delta,$$

aus der die Kleinheit von Q_1 folgt. Hiernach darf in Q die Grenze 0 der Integration nach u durch die Zahl δ ersetzt werden. In Analogie zu den Rechnungen des vorigen Paragraphen ergiebt sich durch Umkehrung der Integrationsordnung die Gleichung

$$Q = \int_{\delta}^1 (1-u^2)^{a-1} du \int_{\infty}^{(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv.$$

Durch die Substitution

$$v = \frac{t}{2u}, \quad dv = \frac{1}{2u} dt$$

findet man dann

$$\int_{\infty}^{(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv = (2u)^{-b} \int_{\infty}^{(0)} e^{-t} t^{b-1} dt.$$

Für t kann (da der Werth $u=0$ nicht mehr in Betracht kommt) derselbe Integrationsweg wie für v gewählt werden. Denn die Grösse

des Radius desjenigen Kreises, in welchem t den Umlauf um den Nullpunkt ausführt, ist für den Werth des Integrals unerheblich. Also ist Q gleich dem Ausdruck

$$Q = \frac{1}{2^b} \int_0^1 u^{-b} (1-u^2)^{a-1} du \int_{\infty}^{(0)} e^{-t} t^{b-1} dt,$$

in welchem zwei einfache Integrale mit einander multiplicirt sind. Das Integral nach t hat den Werth $e^{\pi i b} \bar{\Gamma}(b)$ — s. Band 35 dieser Annalen, Seite 515, Gl. (34), — und das Integral nach u geht durch die Substitution $u = +\sqrt{\xi}$ in den Ausdruck $\frac{1}{2} E\left(\frac{1-b}{2}, a\right)$ über (cfr. (23)). Man erhält demnach die Formel

$$(27) \quad \begin{cases} \int_{\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^1 e^{-2uv} (1-u^2)^{a-1} du \\ = \frac{1}{2^{b+1}} e^{\pi i b} E\left(\frac{1-b}{2}, a\right) \bar{\Gamma}(b). \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf gewisse Anwendungen soll die letztere Gleichung durch die Substitution $v = +\sqrt{z}$ umgeformt werden. Die Variable z durchläuft dann zunächst die positive reelle Axe von ∞ bis l^2 , hierauf zweimal hinter einander einen um den Nullpunkt mit dem Radius l^2 beschriebenen Kreis (in positivem Sinne) und endlich wiederum die reelle Axe von l^2 bis ∞ . Ferner ist in der Gleichung

$$v^{b-1} dv = \frac{1}{2} z^{\frac{b}{2}-1} dz$$

auf dem ersten Theil des Weges von z für die Potenz $z^{\frac{b}{2}-1}$ der Werth $e^{\left(\frac{b}{2}-1\right) \log z}$, wo $\log z$ den reellen Logarithmus bedeutet, zu wählen. Man gelangt somit zu der Formel

$$(28) \quad \begin{cases} \int_{\infty}^{(0,0)} z^{\frac{b}{2}-1} dz \int_0^1 e^{-2u\sqrt{z}} (1-u^2)^{a-1} du \\ = \frac{1}{2^b} e^{\pi i b} E\left(\frac{1-b}{2}, a\right) \bar{\Gamma}(b), \end{cases}$$

in der, wie in (27), der reelle Theil von a als positiv, der reelle Theil von b als negativ angenommen wird. Die Grösse \sqrt{z} hat (da sie für v eingetreten ist) auf dem ersten Theil des Integrationsweges das positive Vorzeichen, so dass in der Exponentialgrösse $e^{-2u\sqrt{z}}$ der Exponent negativ ist. Für den Factor $\frac{1}{2^{b+1}}$ in (27) und den Factor $\frac{1}{2^b}$ in (28) sind die Werthe $e^{-(b+1)\log 2}$, resp. $e^{-b\log 2}$, in denen $\log 2$ reell ist, zu setzen.

§ 5.

Wird der reelle Theil der Constante a negativ oder gleich Null, so hört in (27) und (28) das Integral nach u auf, einen bestimmten Sinn zu haben. In diesem Falle möge, statt des geradlinigen Weges

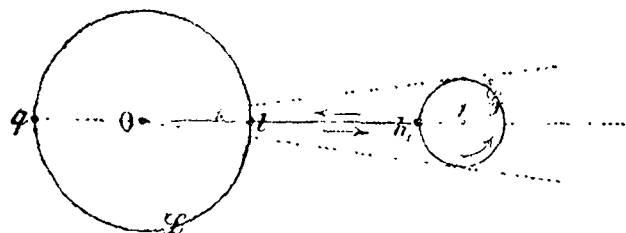


Fig. 2.

von 0 bis 1, für die Variable u eine geschlossene Curve gewählt werden, die vom Nullpunkte ausgeht und den Punkt 1 umschliesst. Man zieht mit einem kleinen Radius h einen Kreis \mathfrak{H} um den Punkt 1 als Mittelpunkt. Die

Winkel, welche die vom Nullpunkt an den Kreis \mathfrak{H} gelegten Tangenten mit der positiven reellen Axe bilden, sollen $\pm \pi$ genannt werden. Der Punkt $1 - h$ heisse h_1 (Fig. 2). Man betrachtet das Integral

$$(29) \quad \Omega = \int_{\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^{(1)} e^{-2uv} (1-u^2)^{a-1} du,$$

in welchem der Weg der Variable u aus der geradlinigen Strecke von 0 bis h_1 , dem Kreise \mathfrak{H} (in positiver Drehungsrichtung) und der Strecke von h_1 bis 0 besteht. Der Weg von v ist derselbe wie in (26). Ebenso mögen für die Potenzen $(1-u^2)^{a-1}$ und v^{b-1} die in § 4 bezeichneten Zweige genommen werden.

Auf die geradlinigen Theile des Weges von u übertragen sich die in § 4 für Q angestellten Rechnungen. Auch in (29) ist es zulässig, statt der Null die kleine Zahl δ als untere Integralgrenze von u anzuwenden und die Integrationsordnung zu ändern. Hierdurch entsteht für Ω der Ausdruck

$$(30) \quad \Omega = \int_{\delta}^{(1)} (1-u^2)^{a-1} du \int_{\infty}^{(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv.$$

Das Integral nach v wird durch die Substitution

$$v = \frac{t}{2u}, \quad dv = \frac{1}{2u} dt,$$

umgeformt; jedoch sind bei dieser Rechnung die verschiedenen Werthgebiete der Grösse u zu unterscheiden. Ist u ein Punkt der positiven reellen Axe zwischen δ und h_1 , so ergibt sich, wie in § 4, unmittelbar die Gleichung

$$\int_{\infty}^{(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv = (2u)^{-b} \int_{\infty}^{(0)} e^{-t} t^{b-1} dt = (2u)^{-b} e^{\pi i b} \Gamma(b).$$

Diese Gleichung gilt nun auch, wenn u dem Kreise \mathfrak{H} angehört. Setzt

man $u = re^{\vartheta i}$, so liegt für die Punkte u des Kreises \mathfrak{S} der Modul r zwischen $1 - h$ und $1 + h$, der Winkel ϑ zwischen $-\kappa$ und $+\kappa$. Der Weg der Variable t (welche dann gleich $2re^{\vartheta i}v$ ist) entsteht aus dem Wege der Variable v , wenn man den letzteren um den Winkel ϑ dreht und zugleich den Massstab im Verhältniss $1 : 2r$ ändert. Der Ausgangspunkt und Endpunkt des Weges von t ist also ein unendlich entfernter Punkt, dessen Verbindungslinie mit dem Nullpunkte den Winkel ϑ mit der positiven reellen Axe bildet. Da die Variable t wiederum einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt, so folgt aus obiger Substitution die Gleichung

$$\int_{\infty}^{\bar{(0)}} e^{-2uv} v^{b-1} dv = (2u)^{-b} \int_v^{\bar{(0)}} e^{-t} t^{b-1} dt,$$

in welcher p' den Werth

$$p' = \lim_{(r=\infty)} re^{\vartheta i}$$

bedeutet. Die Potenz v^{b-1} hat nach § 4 die Eigenschaft, für $v = -l$ (im Punkte q der Fig. 1 und 2) den Werth $e^{(b-1)(\pi i + \log l)}$, in welchem $\log l$ reell ist, anzunehmen. In Folge dessen wird t^{b-1} in demjenigen Punkte $t = -l'$, den die t -Curve mit der negativen reellen Axe gemein hat, gleich $e^{(b-1)(\pi i + \log l')}$, wo $\log l'$ den reellen Logarithmus bezeichnet. Denn bei der kleinen Drehung ($-\kappa \leq \vartheta \leq \kappa$) des Kreises, die durch die Substitution stattfindet, ist das Auftreten eines anderen Zweiges der Potenz t^{b-1} ausgeschlossen. Auf diese Weise wird die Formel (13) des bereits mehrfach genannten Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ “*) anwendbar, wodurch für Ω die Gleichung

$$(31) \quad \Omega = \frac{1}{2^b} e^{\pi i b} \bar{\Gamma}(b) \int_{\delta}^{\bar{(1)}} u^{-b} (1-u^2)^{a-1} du$$

entsteht. Hierin kann die Integralgrenze δ wieder durch 0 ersetzt werden. Führt man nun eine Variable ξ durch die Gleichung $u = +\sqrt{\xi}$ ein, so stellt der Weg von ξ , wie der von u , einen bei dem Nullpunkte beginnenden positiven Umlauf um den Punkt 1 dar. Denn während u von 0 bis h_1 variirt (Fig. 2), durchläuft ξ das Stück der reellen Axe von 0 bis zu dem dicht vor 1 liegenden Punkte $(1-h)^2$. Für die Umgebung des Punktes 1 reducirt sich aber die Substitution $u = +\sqrt{\xi}$ auf eine lineare Beziehung zwischen den Variablen u und ξ , da dieselben sich dort gegenseitig eindeutig abbilden. In der That ist, wenn $u = 1 + u' = 1 + he^{\vartheta i}$ gesetzt, und der Kreisradius h unendlich klein gewählt wird, ξ als identisch mit $1 + 2u'$ anzusehen. Es ergibt sich demnach

*) Dieser Band, Seite 162.

$$\int_0^{\bar{1}^{(1)}} u^{-b} (1-u^2)^{a-1} du = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{1}^{(1)}} \xi^{-\frac{b+1}{2}} (1-\xi)^{a-1} d\xi,$$

wofür nach Formel (24) der Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“*) der Ausdruck

$$-\frac{1}{2} e^{\pi i a} \bar{E}\left(\frac{1-b}{2}, a\right) = \frac{1}{2} e^{\pi i(a-1)} \bar{E}\left(\frac{1-b}{2}, a\right)$$

geschrieben werden kann. Indem man diesen Werth in (31) substituirt, findet man die Gleichung

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\infty}^{\bar{1}^{(0)}} v^{b-1} dv \int_0^{\bar{1}^{(1)}} e^{-2uv} (1-u^2)^{a-1} du \\ &= \frac{1}{2^{b+1}} e^{\pi i(a+b-1)} \bar{E}\left(\frac{1-b}{2}, a\right) \bar{\Gamma}(b), \end{aligned} \right.$$

in welcher der reelle Theil der Constante b als negativ vorausgesetzt ist, während a eine beliebige Constante bezeichnet.

Wird in (32) $v = +\sqrt{z}$ gesetzt, so entsteht die zu (28) analoge Formel

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\infty}^{\bar{1}^{(0,0)}} z^{\frac{b}{2}-1} dz \int_0^{\bar{1}^{(1)}} -2u\sqrt{z} (1-u^2)^{a-1} du \\ &= \frac{1}{2^b} e^{\pi i(a+b-1)} \bar{E}\left(\frac{1-b}{2}, a\right) \bar{\Gamma}(b). \end{aligned} \right.$$

Der Integrationsweg der Variable z enthält hier, wie in (28), einen zweimaligen positiven Umlauf um den Nullpunkt.

Kiel, im Juni 1891.

*) Band 35 dieser Annalen, Seite 510. Die Grösse $\bar{E}(p, q)$ ist, wenn die reellen Bestandtheile von p und q positiv sind, mit dem Euler'schen Integral $E(p, q)$ durch die Gleichung

$$\bar{E}(p, q) = (e^{\pi i q} - e^{-\pi i q}) E(p, q) = 2i \sin(\pi q) E(p, q)$$

verbunden.