

*V. Ueber Klangfiguren auf Quadratscheiben;
von Strehlke, Prof. am Gymnas. zu Danzig.*

I. In einem Aufsätze dieser Annalen (Bd. 80. St. 2. S. 212.) habe ich einige Resultate meiner Beobachtungen über Klangfiguren bekannt gemacht, unter welchen mir zwei nicht unwichtig schienen:

- 1) Die Klangfiguren sind krumme Linien.
- 2) Diese Linien durchschneiden sich nicht.

Beide Resultate erfuhren den Widerspruch Chladni's, welcher es der Unregelmäßigkeit der von mir gebrauchten Metallscheiben zuschrieb, wenn ich von den seinigten verschiedene Resultate erhalten haben konnte. Seit jener Zeit habe ich viele Versuche mit Scheiben von Glas angestellt, und mich bald überzeugt, daß der Unterschied zwischen diesen und jenen Scheiben in Beziehung auf Klangfiguren unerheblich ist; wenn zuvor die Oberfläche des Glases verändert worden, so erhält man auf beiden Arten von Scheiben dieselben Erscheinungen, und bei der nöthigen Vorsicht, welche die Anstellung dieser Versuche erfordert, sieht man auch auf Glasscheiben nur Curven, welche einander nicht durchschneiden. Auf polirten Glasscheiben hat es mir niemals gelingen wollen, die ruhenden Linien der Klangfiguren vollkommen scharf zu erhalten. Immer waren irgendwo auf der Scheibe, besonders da, wo sich die Curven einander näherten, Stellen, an denen man, wegen des von der Oberfläche zurückgehaltenen Sandes, den wahren Zug der ruhenden Linien nicht mehr mit der nöthigen Genauigkeit verfolgen konnte. Nachdem aber die eine Seite der Scheibe mit Blattgold belegt war, da erschienen auf dieser Seite die Klangfiguren mit derselben Schärfe, wie auf metallenen Scheiben. Wenn auf der andern nicht

belegten Seite dieselbe Unterstützung und dieselbe Erregungsstelle der Schwingungen benutzt wurde, so traten hier wieder alle die Zweifel ein, welche Glasscheiben mit gewöhnlicher unveränderter Oberfläche darbieten. War auf der vergoldeten Seite kein Zweifel darüber, ob die ruhenden Linien sich durchschnitten oder nicht, sahe man hier ganz deutlich nur eine Annäherung der Curven, zwischen denen sich eine vom Sande ganz freie Stelle befand, so war auf der untersten Seite an diesen Stellen der Sand zurückgehalten worden, und der wahre Zug der Curven war nicht zu erkennen. Andere Glasscheiben wurden mit einer dünnen Schicht einer Auflösung von Gummilack in absolutem Alkohol überzogen. Die Schärfe der Figuren, welche man auf den so überzogenen Glasscheiben erhält, giebt kaum derjenigen etwas nach, welche man auf Metallscheiben wahrzunehmen gewohnt ist. Auch Glasscheiben mit matt geschliffener Oberfläche geben schärfere Figuren als Glasscheiben mit polirter Oberfläche. Bei metallenen Scheiben ist es ebenfalls vorthellhaft, die Oberfläche matt zu schleifen.

II. Außerdem erfordert die Anstellung dieser Versuche über die Klangfiguren manche Vorsicht, wenn man sonst unvermeidlichen Täuschungen entgehen will. Sowohl metallene als gläserne Scheiben, welche einige Zeit hindurch nicht gebraucht worden sind, können, ohne vorhergegangene sorgfältige Reinigung, nicht sogleich zu den in Rede stehenden Versuchen benutzt werden. Eine beginnende Oxydation der Oberfläche hemmt die Bewegung des Sandes so sehr, daß man an den Stellen, wo die ruhenden Linien sich nahe kommen, nichts Bestimmtes mehr erkennt. Alle Stellen der Scheibe, welche man mit anscheinend ganz trockenen Fingerspitzen berührt hat, werden den Sand zurückhalten. Scheiben, welche aus einem kälteren in ein wärmeres Zimmer gebracht sind, werden, wenn auch kein sichtbarer Niederschlag der Wasserdämpfe erfolgt, dennoch durch die anhängende Feuch-

tigkeit den Sand so stark zurückhalten, daß man sich umsonst bemühen würde, die Figuren in gewohnter Vollkommenheit darzustellen. Auch wenn viele Personen in der Nähe der Klangfiguren sind, wird die Bildung der Figuren gestört. Vorzüglich wichtig aber ist es, nur wenig Sand auf die Scheibe zu streuen, höchstens so viel, daß etwa 3 oder 4 Körnchen auf die Quadratlinie kommen. Von dem regelmäßigen Ueberstreuen hängt die Regelmäßigkeit der Figuren in der Breite ab, und man muß einige Uebung darauf verwenden, durch mehrmaliges Schwenken des den Sand enthaltenden Gefäßes, indem man immer nur einige Körner auf Ein Mal ausstreut, eine regelmäßige Ueberstreuung hervorzubringen. Der Violinbogen muß an derselben Stelle des Randes senkrecht auf und ab geführt werden, und die damit hervorgebrachte Bewegung muß gleichmäßig so lange fortgesetzt werden, bis die Figur keine weitere Abänderung mehr erfährt. Wenn man die Absicht hat, an den Klangfiguren Messungen anzustellen, so muß, um jeden Zweifel über den Gang der eigentlich ruhenden Linien zu entfernen, die Figur so lange immer wieder aufs Neue hervorgebracht werden, bis man an den Stellen, wo die Messung geschehen soll, nur eine einzige Reihe von Sandkörnchen erhalten hat. Man wird annehmen können, daß die die Mittelpunkte dieser Sandkörnchen verbindende Linie die eigentlich ruhende Linie ist, um deren Ausmittelung es sich handelt. Hätte man mehrere Reihen neben einander erhalten, etwa drei, so würde man nicht annehmen dürfen, daß die mittlere Reihe gerade diejenige sey, welche durch die wahrhaft ruhende Linie geht; es könnte die erste oder die dritte Reihe eben so gut die eigentliche ruhende Reihe seyn, gegen welche sich die beiden andern wie gegen einen festen Damm anstemmen. Wenn man viel Sand auf die Scheibe gestreut hat, wodurch die Figuren eine große Breite erhalten, dann bemerkt man, so lange die Scheibe noch tönt, ganz deutlich, daß die

in den äussern Reihen liegenden Sandkörner nicht in Ruhe sind, sondern eine verticale Bewegung erfahren, welche mit dem Tone aufhört. Man kann dann leicht zu der Vermuthung geführt werden, als sey die Scheibe in der ganzen Breite der zuletzt erhaltenen Figur in Ruhe gewesen, während dieselbe doch nur in einer geometrischen Linie wahrhaft ruhend blieb. Dafs übrigens die ruhenden Linien der Klangscheiben Linien im Sinne der Geometrie sind, scheint auch Chladni gemeint zu haben, wenigstens hat dieser Punkt meines frühern Aufsatzes seinen Widerspruch nicht erfahren.

III. In der folgenden Untersuchung über die Gleichungen einiger Klangfiguren habe ich absichtlich nur zunächst solche Schwingungsarten benutzt, welche durch Unterstützung der Scheibe auf einer einzigen Seitenfläche erhalten wurden. Die Scheibe ruhte hier entweder auf unterstützenden verticalen Holzstäbchen, welche an den Berührungsstellen mit der Scheibe kleine kreisförmige Tuchstückchen trugen, oder sie wurde geradezu auf die Finger der linken Hand gelegt. Diese Unterstützungsart der Scheibe muß sorgfältig von jener unterschieden werden, welche man durch Einspannung der Scheibe auf beiden Seitenflächen erhält. Bei der letzten Aufstellung der Scheibe würde es nicht leicht seyn, zum zweiten Male genau dieselbe Unterstützungsstelle zu erhalten, und weil man nicht gut dieselben Umstände zurückführen kann, so würde es fast unmöglich seyn, dieselbe Klangfigur zum zweiten Male zu erhalten. Schon eine kleine Verrückung der Haltungsstelle bringt sehr sichtbare Veränderungen in dem Zuge der Curven hervor, selbst das stärkere oder schwächere Einspannen der Scheibe verändert die Curven. So habe ich mehrere Male bemerkt, wie durch stärkeres Anziehen der Schraube in der in meinem frühern Aufsatz beschriebenen Gabel die Lage einer hyperbolischen Curve so verändert wurde, dafs die neue Hauptaxe der Curve auf der ersten senkrecht war. Bei der Unter-

stützung der Scheibe von Einer Seite findet dies Alles keine Berücksichtigung mehr. Hat man nur ungefähr die Unterstützungspunkte getroffen, bei welchen man Ein Mal eine bestimmte und deutliche Klangfigur erhalten hatte, so kann man sicher seyn, so oft man will, dieselbe Klangfigur zu erhalten. Die Schwingungsarten, welche man auf diese Weise erhält, verdienen vor allen untersucht zu werden, weil sie die freiesten sind, in welche die Scheibe versetzt werden kann, und bei welchen sich der Einfluß, welchen die Anordnung der kleinsten Theile der Scheibe in Beziehung auf gewisse Axen auf die ruhenden Linien äußert, am unbefangenen ausspricht.

Die Länge der an solchen Klangfiguren gemessenen Linien wurde auf einem Maafsstabe ausgemittelt, dessen Theile in Pariser Linien durch die mit Mikroskopen versehene Skale eines Pistor'schen Barometers ausgemittelt worden waren. Meine Messungen an den Klangfiguren mögen unter den günstigsten Umständen, welche dabei vorkamen, etwa bis auf $\frac{1}{10}$ der Pariser Linie genau seyn.

IV. Eine der einfachsten Klangfiguren, welche man auf einer Quadratscheibe erhalten kann, ist die in Taf. II. Fig. 2. abgebildete. Man erhält dieselbe, wenn man 3 oder 4 Ecken des Quadrats unterstützt, und die Mitte einer beliebigen Seite desselben in Schwingung versetzt. Ich lege die Scheibe gewöhnlich so, daß (Taf. II. Fig. 1.) *E* auf den Daumen, *C* auf den Zeigefinger, *D* auf den fünften Finger der linken Hand zu liegen kommt, und streiche mit dem Violinbogen in der Mitte der Seite *DF*, vorausgesetzt, daß die Scheibe wie in der Figur vorliegt. Auf diese Weise erhält man auf allen regelmäßigen Scheiben von Metall oder Glas eine aus zwei Zweigen bestehende gewöhnliche Hyperbel, deren Asymptoten mit der Hauptaxe einen Winkel größer als 45° einschließen. Die Lage der Hauptaxe dieser Hyperbel läßt sich, wie ich schon in meinem frühern Aufsätze über diesen Gegenstand aus einander gesetzt habe, nicht voraus bestim-

men, da sie entweder der Seite CD oder CE parallel ist *). Nachdem aber diese Axe ausgemittelt worden, wird es zweckmäfsig seyn, die Lage derselben auf der Scheibe zu bemerken, indem durch diese Axe die Lage einer grossen Menge von Klangfiguren bestimmt wird. In Taf. II. Fig. 2. ist vorausgesetzt, dafs diese Axe die Richtung der Linie AB habe. Ich werde nun drei Reihen von Messungen, welche ich über die erwähnte Schwingungsart auf zwei Scheiben von Messing und einer Scheibe von Kupfer angestellt habe, erläutern. Auf allen drei Scheiben halbirte die Hauptaxe der Curve die darauf senkrechten Ordinaten so genau, dafs sich keine erhebliche Abweichung wahrnehmen liefs. Zum Anfangsacte der Coordinaten wurde der Punkt B (Taf. II. Fig. 2.) gewählt, und unter der Voraussetzung, dafs die Curve ein Kegelschnitt sey, dessen Gleichung

$$y^2 = px + qx^2$$

sind die wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten p und q nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

a) Messungen auf einer Quadratscheibe von Messing, 34,3 Par. Lin. lang, 1", 1 dick.

Die aus den gemessenen Werthen der Coordinaten abgeleitete Gleichung war:

$$y^2 = 1,0836 \cdot x(x + 6'',27)$$

*) Die zu den Messungen dienenden den Seiten des Quadrats parallelen Linien, welche bis auf eine geringe Tiefe in die Scheibe geritzt wurden, haben keinen Einflufs auf die Lage der Hyperbel, diese hängt vielmehr von der Anordnung des innern Gefüges der Scheibe ab. Man kann sich davon leicht überzeugen, wenn man, noch ehe die Linien auf der Scheibe gezogen sind, die Lage der Hauptaxe der Hyperbel durch zwei Punkte am Rande der Scheibe bemerkt und dann erst die Linien zieht. In welcher Richtung auch die Linien auf der Scheibe gezogen werden, immer nimmt die nun hervorgebrachte Hyperbel die zuerst beobachtete Lage an.

mit folgender Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe von γ .

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	γ	γ	
1,05	2,94	2,89	+0",05
1,72	3,88	3,86	+0 ,02
2,99	5,43	5,48	—0 ,05
4,43	7,15	7,18	—0 ,03
5,71	8,64	8,61	+0 ,03
9,20	12,41	12,42	—0 ,01

Da die Messungen selbst nur etwa bis auf $\frac{1}{20}''$ genau sind, so kann man die Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und der Beobachtung vollständig nennen. Es ist wahrscheinlich, dafs bei regelmäfsigen Scheiben, die zugleich vollkommen homogen wären, die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung auf einzelne Hunderttheile der Pariser Linie gehen würde. Kleine Abweichungen von der Regelmäfsigkeit der geometrischen Form werden wohl immer, zumal bei den einfachern Schwingungsarten, einen nur unbedeutenden Einflufs auf die Regelmäfsigkeit der Figuren ausüben; viel erheblicher ist aber der Einflufs, welchen Störungen in der homogenen Beschaffenheit der Scheibe auf diese Curve haben können.

Aus der oben angeführten Gleichung folgt der Abstand, der bei dem Scheitelpunkte der Curve = $6'',27$. Mit dem mikroskopischen Apparate an der Skale des erwähnten Pistor'schen Barometers wurde der kürzeste Abstand der Punkte B und A auf der Hauptaxe der Curve gemessen. Die Ablesungen waren für B $14'',375$,

für A $8,125$

Abstand $6,25$.

Darauf wurde der Sand von der Scheibe entfernt, und die Figur (2) aufs Neue hervorgebracht. Die Ablesungen waren jetzt

14^{''},82
 und 8 ,56
 Abstand 6 ,26.

Eine dritte Messung gab, nachdem wieder eine neue Figur hervorgebracht war, die

Ablesungen 15^{''},21
 und 8 ,97
 Abstand von *A* und *B* 6 ,24.

Man sieht hieraus, welcher Schärfe die Messungen der Klangfiguren mit einem genauen Apparate fähig sind. Die Sandkörnchen erschienen unter dem Mikroskope der Skale als kleine sphäroidische Körper von 0^{''},03 bis 0^{''},05 Durchmesser (der gebrauchte Sand war Seesand, welcher diese Form wohl durch Schleifen auf dem Ufer erhalten hatte, und es wurde angenommen, daß die eigentlich ruhende Stelle der Klangfigur, welche zu finden man allein beabsichtigt, mit dem Mittelpunkte dieser Körper zusammenfiel. Der Ungewißheit in der Schätzung dieses Punktes ist es wahrscheinlich allein zuzuschreiben, daß die einzelnen Messungen des Abstandes von *B* und *A* um einzelne Hundertheile der Par. Lin. von einander abweichen. Man darf nicht annehmen, daß bei der hier gebrauchten Art der Unterstützung der Scheibe die ruhenden Linien derselben bei den einzelnen Messungen selbst sich um so kleine Quantitäten von der zuerst beobachteten Lage entfernen konnten, zumal an Stellen, welche von dem erschütterten Punkte des Randes ziemlich entfernt liegen, wie es hier der Fall ist. In den in der Nähe des Randes vorkommenden Theilen der Klangfiguren sind allerdings solche Störungen der Lage der ruhenden Linien bei wiederholten Messungen bemerkbar.

Die erwähnte Scheibe von Messing wurde nun mehrere Male abgeschliffen, um wahrzunehmen, welche Veränderungen diese Operation in der Lage der beobachteten Curve hervorbringen würde. Nachdem diese Scheibe wiederum mit den zur Messung nöthigen Linien verse-

hen war, erhielt ich folgende Gleichung für den durch den Scheitelpunkt *B* gehenden Theil der Hyperbel:

$$y^2 = 1,1032 \cdot x \cdot (x + 6'',228).$$

Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen von *y* ersieht man aus folgender Zusammenstellung.

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
<i>x</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	
0,66	2,33	2,24	+0,09
1,39	3,46	3,42	+0,04
2,16	4,52	4,47	+0,05
2,88	5,46	5,38	+0,08
3,77	6,37	6,45	−0,08
4,60	7,45	7,41	+0,04
6,29	9,25	9,32	−0,07
8,75	12,05	12,03	+0,02

Man sieht aus den erhaltenen Gleichungen, daß durch das Abschleifen keine bedeutenden Aenderungen in den Gang der Curven gekommen sind. Der Abstand der Scheitelpunkte konnte nicht weiter mit der Skale des Barometers gemessen werden, da dieses Instrument seinem anderweitigen Gebrauch nicht entzogen werden durfte.

Scheinbar war der zweite durch den Scheitelpunkt *A* gehende Theil der Hyperbel dem zuerst erwähnten durch den Punkt *B* gehenden Theile vollkommen gleich. Um hierüber Gewissheit zu erhalten, stellte ich auf diesem zweiten Zweige Messungen an, welche sich auf den Scheitelpunkt *A* als Anfangspunkt beziehen. Es ergab sich hieraus die Gleichung:

$$y^2 = 1,1627 \cdot x \cdot (x + 5'',379),$$

wobei folgende Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung stattfindet.

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,78	2,30	2,36	—0,06
1,39	3,43	3,31	+0,12
2,22	4,38	4,43	—0,05
3,02	5,46	5,43	+0,03
3,74	6,34	6,30	+0,04
4,60	7,20	7,31	—0,11
5,15	7,98	7,94	+0,04
8,48	11,69	11,69	+0,00

Es ergibt sich hieraus, daß auf der zweiten Hälfte dieser Scheibe die Elasticität eine andere wie auf der ersten Hälfte seyn mußte. Man findet aber auch Scheiben, wo dieselbe auf beiden Theilen fast dieselbe ist. Diefs war der Fall bei der Scheibe, deren Untersuchung in Beziehung auf dieselbe Curve jetzt folgen soll.

b) Messungen auf einer Quadratscheibe von Messing, deren Länge 34^{'''},3, deren Dicke 0^{'''},66 betrug.

Auf dieser Scheibe, welche ich Messingscheibe No. II. nennen werde, während die so eben untersuchte Messingscheibe No. I. heißen soll, erhielt ich für die durch den Scheitelpunkt *B* gehende Hyperbel die Gleichung:

$$y^2 = 1,1421 \cdot x \cdot (x + 6^{'''},126) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für die durch den Scheitelpunkt *A* gehende die Gleichung:

$$y^2 = 1,1472 \cdot x \cdot (x + 6^{'''},062) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Beide Gleichungen enthalten nahe dieselben Constanten, auch stimmte der direct gemessene Abstand der Punkte *A* und *B* ziemlich nahe mit dem aus den obigen Gleichungen Gefolgerten überein.

Die Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung:

Zu (1).

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	x	y	
0,39	1,66	1,70	-0",01
1,44	3,60	3,53	+0 ,07
2,52	4,99	4,99	+0 ,00
3,71	6,40	6,46	-0 ,06
4,82	7,76	7,76	+0 ,00
5,90	8,97	9,00	-0 ,03
6,87	10,16	10,10	+0 ,06
9,86	13,41	13,42	-0 ,01

Zu (2)

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
1,16	3,19	3,10	+0 ,09
2,10	4,57	4,43	+0 ,14
3,10	5,65	5,71	-0 ,06
3,99	6,81	6,78	+0 ,03
4,99	7,92	7,95	-0 ,03
5,87	8,92	8,96	-0 ,04
7,04	10,30	10,29	+0 ,01
9,14	12,63	12,62	+0 ,01

- c) Messungen auf einer Scheibe von Kupfer, deren Länge und Breite $= 34''',3$, deren Dicke $= 1''',33$. (Kupferscheibe No. I.)

Die Gleichung, welche aus den Messungen auf dieser Scheibe zwischen den auf einander rechtwinkligen Coordinaten abgeleitet wurde, war für den Scheitelpunkt B :

$$y^2 = 1,027 \cdot x \cdot (x + 3''',846).$$

Die unmittelbare Messung ergab den Abstand der beiden Punkte B und $A = 3''',88$.

Rechnung und Beobachtung stimmen auf folgende Weise:

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,51	1,44	1,51	−0,07
0,79	1,83	1,94	−0,11
1,33	2,60	2,66	−0,06
1,62	3,05	3,02	+0,03
2,48	3,99	4,01	−0,02
3,29	4,93	4,91	+0,02
4,12	5,82	5,81	+0,01
5,04	6,65	6,78	−0,13
5,76	7,53	7,54	−0,01
6,70	8,59	8,52	+0,07
7,70	9,64	9,55	+0,09
8,75	10,54	10,64	−0,10
9,92	11,80	11,84	+0,04

Um auszumitteln, ob der Abstand der beiden Scheitelpunkte der Hyperbel in einem gewissen bestimmten Verhältnisse zu der Länge der Seite der Scheibe stehe, so wurde dieser Abstand auf einer Anzahl von Scheiben gemessen und mit der Länge der Quadratscheibe verglichen. In dem nachfolgenden Verzeichnisse bedeutet $2a$ diesen Abstand in Theilen der als Einheit genommenen Seite des Quadrats, φ den Winkel, welchen die Asymptote der Hyperbel mit der Hauptaxe derselben einschließt.

	$2a$	φ
Messingscheibe No. I.	0,181	46° 9'
Messingscheibe No. II.	0,177	46 56
Messingscheibe wie No. II.	0,116	45 46
Messingscheibe No. III. (53",6)	0,207	46 36
Messingscheibe (57",8)	0,151	46 13
Kupferscheibe No. I.	0,112	45 23
2 Kupferscheiben wie	0,263	47 36
Messingsch. No. II.	0,326	49 46
Zinkscheibe (53",6)	0,175	46 8
Zinkscheibe (34",9)	0,189	46 18
Eine eben so gr. Zinksch.	0,167	46 25
Eine eben so gr. Zinnscheibe	0,164	46 12
Scheibe v. Glockenmetall	0,155	45 47
Glasscheibe mit Siegellack überz.	0,179	46 37
Glassch. mit Gummilack in Alk.	0,174	46 30
Glassch. m. Gummil. in Schwefeläth.	0,127	45 28

Wir schliessen aus dem Angeführten, dass mit der Vergrößerung von $2a$ sich auch der Winkel φ vergrößert. Diefes zeigt sich auch dann, wenn man die Scheibe auf beiden Seiten durch Einspannung unterstützt. Man kann hier bewirken, dass sich die ruhenden Linien in gewissen Gränzen von B und A rechts und links entfernen, je nachdem die Scheibe dem Mittelpunkte näher oder entfernter von demselben eingespannt wird. Als Beispiele führe ich 2 Messungen auf der Messingscheibe No. II. an, welche bei der freiesten Schwingungsart von Einer Seite unterstützt $2a=0,177$, φ aber $=46^{\circ} 56'$ hat. Als diese Scheibe in einem Punkte der Hauptaxe rechts von B eingespannt wurde, war $2a=0,341$, $\varphi=51^{\circ} 53'$. Nun wurde dieselbe Scheibe links von B in der Richtung der Hauptaxe eingespannt, wodurch $2a=0,148$, $\varphi=44^{\circ} 16'$ wurde. Wenn man die Scheibe in einem Punkte einspannt, welcher in der Winkelfläche der von ED und CF eingeschlossenen rechten Winkel befindlich ist, so nimmt die bei demselben unveränderten Tone entstehende neue Hyperbel eine gegen die der freiesten Schwingungsart angehörige senkrechte Lage an. Die erste Hyperbel kehrt augenblicklich zurück, wenn die Unterstützung von einer Seite aufhört, wodurch die Scheibe wiederum die freieste Art sich einzutheilen annehmen kann.

V. Eine andere der einfacheren Schwingungsarten wird erhalten, wenn man die Mittelpunkte dreier Seiten des Quadrats, wie D , C , D' (Taf. II. Fig. 3.) mit 3 Fingern der linken Hand unterstützt, und das Quadrat an einer beliebigen der 4 Ecken in Schwingung versetzt. Man erhält dann eine aus zwei Hyperbelzweigen bestehende Figur, deren Hauptaxe mit einer Diagonale des Quadrats zusammenfällt. Aber sehr häufig ordnet sich der Sand bei dieser Unterstützung zu einer geschlossenen Figur (Taf. II. Fig. 4.), deren längerer Durchmesser CC' immer in der Richtung der Hauptaxe AB der Hyperbel (Taf. II. Fig. 2.) liegt, so dass die Lage dieser Axe die

Lage der geschlossenen Figur bestimmt. Wäre die Scheibe als ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäß von quadratischer Gestalt anzusehen (Wellenlehre S. 273.), so würden die Interferenzstellen der erregten Wellen in einem Quadrate, wie Taf. II. Fig. 3., liegen. Wenn aber der Widerstand, welchen die Wellenbewegung erfährt, in den beiden den Seiten des Quadrats parallelen Richtungen ungleich ist, und zwar der geringere Widerstand in der Richtung der Linie CC' (Taf. II. Fig. 4.) wirkt, so wird es begreiflich, wie das Quadrat $DCD'C'$ an den 4 Ecken hyperbolisch abgerundet werden muß, und wie der längere Durchmesser der aus 4 zusammenstossenden Hyperbeln gebildeten Curvenvereinigung den längeren Durchmesser CC' (Taf. II. Fig. 4.) in der Richtung CC' (Taf. II. Fig. 3.), den kürzern Durchmesser DD' (Taf. II. Fig. 4.) in der Richtung DD' erhalten werde. Wenn der Widerstand nicht mehr derselbe ist in der einer Seite der Scheibe parallelen Richtung, so wird die geschlossene Figur $DCD'C'$ in Beziehung auf die beiden Linien CC' und DD' nicht mehr symmetrisch seyn können.

Je größer in der zuerst betrachteten Schwingungsart (Taf. II. Fig. 2.) die Auseinanderweichung der Scheitelpunkte A und B ist, desto größer wird im Allgemeinen der Unterschied zwischen der Länge der Linien CC' und DD' seyn.

	CC'	DD'	AB
Für d. Messingsch. No. I. war	30",58	27",92	6",27
Auf der Messingsch. No. II.	31,36	28,03	6,12
Auf einer gleichen Messingsch.	30,86	29,36	3,98
Auf der Kupfersch. No. I.	29,53	29,03	3,85

Auf 2 Kupferscheiben, für die AB in Theilen der zur Einheit angenommenen Seite der Scheibe 0,263 und 0,326 war, betrug DD' 25",2 und 26",6. Beide Curven hatten die Taf. II. Fig. 5. angegebene Gestalt, so daß in diesem Falle die Punkte C und C' außerhalb der Scheibe zu liegen kommen.

Ueber die Curve $DCD'C'$ habe ich mehrere Messungen angestellt, von denen ich hier einige beibringen werde.

a) Auf der Messingscheibe No. I. wurde CC' als Abscissenlinie angenommen für den Anfangspunkt C , die auf CC' rechtwinklichen Ordinaten wurden bis in die Nähe der Punkte A und B gemessen. Für die Curve ACB , welche den 4ten Theil der geschlossenen Figur $DCD'C'$ umfaßt, wurde die Gleichung

$$y^2 = 0,4663 \cdot x(x + 25''',819)$$

erhalten. Die beobachteten Werthe von y stimmen mit den berechneten auf folgende Weise:

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,78	3,10	3,11	— 0,01
1,77	4,76	4,77	— 0,01
2,41	5,65	5,63	+ 0,02
3,16	6,54	6,53	+ 0,01
3,79	7,31	7,23	+ 0,08
4,54	7,92	8,02	— 0,10
5,21	8,78	8,68	+ 0,10
5,87	9,28	9,31	— 0,03

Auf derselben Scheibe erhielt ich für die Curve $AC'B$ folgende Gleichung

$$y^2 = 0,4434 \cdot x \cdot (x + 26''',777)$$

mit folgender Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe von y .

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,50	2,38	2,46	— 0,08
1,33	3,99	4,07	— 0,08
2,11	5,21	5,20	+ 0,01
2,88	6,20	6,15	+ 0,05
3,66	6,98	7,03	— 0,05
4,43	7,87	7,83	+ 0,04
5,26	8,64	8,64	+ 0,00
6,09	9,42	9,42	+ 0,00

In der Curve ADA mußte die Axe DD' gegen CC etwas geneigt werden, damit die Ordinaten halbirt wurden. Für dieses schiefwinkliche Coordinatensystem erhielt ich die Gleichung

$$y^2 = 0,4989 \cdot x(x + 33'',605)$$

Vergleichung der berechneten mit den beobachteten Werthen von y .

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,50	2,77	2,92	—0,15
1,44	5,07	5,02	+0,05
2,33	6,40	6,46	—0,06
3,24	7,76	7,72	+0,04
4,02	8,67	8,69	—0,02
4,90	9,69	9,70	—0,01

Die Curve $BD'B'$ wurde dargestellt durch die auf rechtwinkliche Coordinaten bezogene Gleichung des Scheitelpunktes D'

$$y^2 = 1,001 \cdot (x + 15'',14)$$

An dieser Stelle mußte demnach die Elasticität der Scheibe sehr verschieden seyn von der in dem Theile ADA vorhandenen. Die Unregelmäßigkeit an dieser Stelle verrieth sich auch dadurch, daß der Mittelpunkt der Scheibe, welcher in der Mitte von CC lag, fast um $0'',6$ dem Punkte D' näher war.

b) Messingscheibe No. II. Für den Theil ACB der geschlossenen Figur wurde die Gleichung

$$y^2 = 0,445 \cdot x \cdot (x + 24'',459)$$

für den Theil $A'CB'$ die Gleichung

$$y^2 = 0,4002 \cdot x \cdot (x + 28'',597)$$

erhalten.

Die erste Gleichung stellt die beobachteten Werthe von y auf folgende Weise dar:

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,72	2,88	2,84	+ 0,04
1,39	3,96	4,00	— 0,04
2,38	5,32	5,33	— 0,01
3,43	6,54	6,52	+ 0,02
4,49	7,62	7,61	+ 0,01
5,60	8,64	8,65	— 0,01

VI. In meinem frühern Aufsätze über Klangfiguren habe ich angedeutet, wie sich auf Taf. II. Fig. 2. mehrere zusammengesetzte Klangfiguren zurückführen lassen, indem die Hyperbel in Taf. II. Fig. 2 sich mehrere Male wiederholen kann, wenn man die Scheibe auf geeignete Weise unterstützt. Um Figur 8. hervorzubringen, ist es nöthig, auf einem der 4 congruenten Quadrate, in welche sich die ganze Scheibe zerfallen läßt, die Figur 2. hervorzubringen, welche sich dann 4 mal auf der Scheibe wiederholen wird. Zu dem Ende wird die Scheibe (Taf. II. Fig. 3.) in D und D' mit zwei Fingern unterstützt, der dritte Finger aber in den Mittelpunkt eines jener 4 erwähnten congruenten Quadrate gesetzt. Anstatt der Punkte D und D' können auch die Punkte C und E in Taf. II. Fig. 1. gewählt werden. Es ist vorauszusetzen, daß die Lage der Haupt-Axen der 4 Hyperbeln bei der Unterstützung der Scheibe von Einer einzigen Seite, wodurch die freieste Schwingungsart derselben möglich wird, in die Richtung AB der Hyperbel Taf. II. Fig. 2. fallen werde, und indem man bedenkt, daß auch die dem Rande zugehenden Asymptoten der erwähnten innern Hyperbeln eine hyperbolische Krümmung annehmen, weil auf der Quadratscheibe jede zwei unter Winkeln zusammenstoßenden geraden Linien Hyperbeln werden, so wird man im Allgemeinen zum Voraus eine Vorstellung von Fig. 8. Taf. II. haben. Diefs gilt indessen nur von einer regelmäßigen Scheibe. Denn wenn die Elasticität verschieden ist an verschiedenen Stellen, so wird es vorkommen,

dafs die Hauptaxen einiger von diesen Hyperbeln auf der durch die Linie AB (Taf. II. Fig. 2.) bezeichneten Richtung senkrecht sind.

Auf den meisten der von mir untersuchten Scheiben hatte die besprochene Klangfigur die Lage von Fig. 8. Taf. II., d. h. die Linien II' und LL' , welche die Scheitelpunkte der 4 Haupthyperbeln enthalten, waren der Linie AB in Fig. 2. Taf. II. oder der Hauptaxe der ersten Hyperbel parallel.

Unter den über diese Figur angestellten Messungen werde ich hier diejenigen anführen, welche einer Messingscheibe von 53^{'''},63 Länge und 0^{'''},7 Dicke angehören. Diese Scheibe ist schon oben mit „Messingscheibe No. III.“ bezeichnet worden.

Die einer Seite des Quadrats parallele Linie FI' welche die Ordinaten der Hyperbeln rechtwinklich halbt, liegt auf allen quadratischen Scheiben nicht genau um den vierten Theil der Seite der Scheibe vom nächsten Rande entfernt, sondern diesem immer etwas näher. Die Gleichung, welche für den Bogen ABA der Curve erhalten wurde, ist

$$y^2 = 1,643 \cdot x \cdot (x + 5''',554.)$$

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,89	2,99	3,07	—0,08
1,72	4,49	4,53	—0,04
2,55	5,93	5,83	+0,10
3,55	7,15	7,28	—0,13
4,38	8,56	8,45	+0,11
5,32	9,69	9,75	—0,06
5,98	10,66	10,64	+0,02

Für den Theil EFE der Fig. 8. Taf. II. wurde in Beziehung auf dieselbe Axe II' die Gleichung

$$y^2 = 1,533 \cdot x \cdot (x + 5''',591.)$$

erhalten.

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,94	3,10	3,07	+0,03
1,83	4,49	4,56	-0,07
2,71	5,98	5,87	+0,11
3,71	7,20	7,27	-0,07
4,71	8,64	8,62	+0,02

Für die Stelle *CDC* erhielt ich die Gleichung

$$y^2 = 1,676 \cdot x (x + 4''',662)$$

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,28	1,39	1,52	-0,13
0,55	2,16	2,19	-0,03
1,05	3,21	3,17	+0,04
1,33	3,71	3,65	+0,06
1,94	4,56	4,63	-0,07
2,22	5,10	5,06	-0,04

Für den Theil *GHG* wurde die Gleichung

$$y^2 = 0,9213 \cdot x (x + 11''',034)$$

erhalten.

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,33	1,99	1,86	+0,13
0,83	2,99	3,01	-0,02
1,27	3,77	3,79	-0,02
1,72	4,52	4,50	+0,02
2,11	4,99	5,05	-0,06
2,55	5,65	5,65	+0,00
3,21	6,54	6,49	+0,05
3,77	7,15	7,17	-0,02

Die Gleichung

$$y^2 = 1,479 \cdot x (x + 5''',44)$$

drückt den Zug der Curve *AMN* aus. Die ganze Figur 8. Taf. II. erscheint demnach als eine Verbindung von gewöhnlichen Hyperbeln, welche aber nach Verschiedenheit der Elasticität an verschiedenen Stellen eine andere Krümmung haben.

Es läßt sich im Allgemeinen voraussehen, welche Gestalt die Klangfigur haben werde, wenn man eine quadratische Scheibe als aus 9 congruenten Quadraten bestehend ansieht, und eines derselben so unterstützt, daß darauf die Figur 2. Taf. II. erscheinen muß. Aber es ist auch zu begreifen, wie bei der Eintheilung der Scheibe in so viele kleine Schwingungssysteme von geringer Bewegung jede von der Form oder der Elasticität herrührende Ungleichheit sehr merkliche Abweichungen von der Regelmäßigkeit in so zusammengesetzten Figuren veranlassen wird.

VII. Wenn man Taf. II. Fig. 3. die Punkte *D* und *D'* mit 2 Fingern unterstützt, den dritten Finger aber in die Mitte von *FC* oder *CG* setzt, und die Scheibe in *C* in Schwingung versetzt, so ordnet sich der Sand zur Fig. 9. oder Fig. 10., wo der Bogen *AB* aus zweien im Mittelpunkte der Scheibe zusammenstoßenden Hyperbeln von derselben Krümmung zusammengesetzt ist, wie zu erwarten war, da diese Figur ohne den ungleichen Widerstand in 2 auf einander senkrechten Richtungen, im Sinne Chladni's aus einer geraden Linie *DD'*, durchschnitten von 2 geraden auf dieser senkrechten bestehen würde. Unterstützt man zwei Ecken *A* und *B* Taf. II. Fig. 11. oder 12., und überdiß noch einen Punkt, welcher von der Ecke *C* oder *C'* ungefähr um $\frac{1}{3}$ der Seite *CB* absteht, so erhält man Fig. 11. und Fig. 12., wo die Linie *AB* aus zweien der geraden Linie sich stark nähernden Hyperbeln zusammengesetzt ist. Die beiden andern Curven sind aber wenig von der Kreisgestalt abweichende Ellipsen. Zu bemerken ist, daß Fig. 9., 10., 11., 12. demselben Tone angehören, nur klingt der Ton bei der Unterstützung zu den Figuren 11. und 12. jederzeit voller. Einige Messungen über die Figur 12. lasse ich hier folgen.

a) Messung auf der Kupferscheibe No I. C wurde (Taf. II. Fig. 12.) als Anfangspunkt der x und y genommen. Die für die Curve erhaltene Gleichung war

$$y^2 = 0,8904 \cdot (143,1 - x^2)$$

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
1,30	11,13	11,22	—0,09
2,63	10,97	11,01	—0,04
4,15	10,58	10,59	—0,01
5,71	9,97	9,92	+0,05
6,81	9,42	9,28	+0,14
7,84	8,64	8,52	+0,12
8,92	7,53	7,52	+0,01
10,14	5,76	5,99	—0,23

Die starke Abweichung des letzten für y berechneten Werthes von dem beobachteten rührt wohl von dem Umstande her, daß die Sandkörner in der Nähe des Randes immer etwas bewegt werden, und deshalb nach dem Aufhören der Schwingungen der Scheibe etwas von der wahren Stelle entfernt angetroffen werden können.

b) Auf der Messingscheibe No. II. wurde für diese Curve die Gleichung erhalten

$$y^2 = 0,899 (144,8 - x^2)$$

c) Auf der Messingscheibe No. III. erhielt ich für dieselbe Curve die Gleichung

$$y^2 = 0,8962 (334,58 - x^2)$$

mit folgender Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe von y .

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
α	γ	γ	
15,40	9,31	9,34	—0,03
13,46	11,85	11,73	+0,12
11,97	13,02	13,09	—0,07
10,53	14,18	14,16	+0,02
8,86	15,12	15,15	—0,03
7,53	15,73	15,78	—0,05
6,15	16,29	16,31	—0,02
4,88	16,62	16,69	—0,07
3,38	17,01	17,02	—0,01
1,94	17,34	17,22	+0,12

Bezeichnet man die halbe grofse Axe der hier betrachteten Ellipse mit a , die halbe kleine Axe mit b , und drückt beide in Theilen der als Einheit angenommenen Seite der Scheiben aus, so erhält man

	a	b
für die Kupferscheibe No. I.	0,348	0,328
für die Messingscheibe No. II.	0,350	0,332
für die Messingscheibe No. III.	0,341	0,323

oder für alle 3 Scheiben ist die kleine Halbaxe der Ellipse nahe $\frac{1}{3}$ der Seite der Scheibe.

VIII. Im Vorigen ist die Art der Unterstützung betrachtet worden, um die Figuren 11. und 12. in Taf. II. hervorzubringen. Es ist klar, dafs, wenn man sich das Quadrat der Scheibe in 4 congruente Quadrate zerlegt denkt, und auf einem dieser Quadrate die den Fig. 11. oder 12. zugehörigen Unterstützungen anbringt, sich die Schwingungsart dieses Quadrats 4 mal wiederholen wird. Hieher gehört die Klangfigur 13. Taf. II., welche man erhält, wenn man die Eckpunkte der Scheibe, A und B , mit 2 Fingern unterstützt, den dritten Finger um $\frac{1}{3}$ der Seite der Scheibe von der Ecke E oder jeder beliebigen Ecke an den Rand der Scheibe setzt und an einem der 4 Mittelpunkte der Seiten D , D' , F , F' mit dem Bogen streicht. Dann bilden sich in der Nähe des Mittelpunktes zwei Zweige einer gewöhnlichen Hyperbel, deren

Hauptaxe der Linie AB in Taf. II. Fig. 2. parallel ist. Die 4 Asymptoten dieser Hyperbel gehen in die Hyperbeln der Figuren 11. und 12. über; an den Stellen F , F' , D , D' werden sich Ellipsen bilden, in welchen die Linien CD und $C'D'$ kleiner, als die Linien EF und $E'F'$ sind.

Für die erste auf der Messingscheibe No. III. angestellte Messung wurde die Mitte von BG oder der Punkt F' als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen, für die zweite Messung auf dieser Scheibe der Punkt E .

Für die erste Ellipse erhielt ich die Gleichung

$$y^2 - 53,477 + 1,6366 x - 0,6725 x^2$$

wo nur die beiden in x und x^2 multiplicirten Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt sind; das erste Glied ist so angenommen, daß es für $x=0$ die gemessene Ordinate genau darstellt.

Die berechneten und beobachteten Werthe von y stimmen so zusammen:

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,00	7,31	7,31	+0,00
3,77	6,98	7,08	-0,10
4,71	6,81	6,80	+0,01
5,65	6,43	6,42	+0,01
6,76	5,87	5,81	+0,06
7,81	5,04	5,02	+0,02
8,86	4,04	3,90	+0,14
9,75	2,05	2,35	-0,30

Für die zweite Curve auf dieser Scheibe wurde die Gleichung erhalten

$$y^2 = 2,8798 \cdot x (11''',01 - x)$$

mit folgender Zusammenstimmung der berechneten und beobachteten Werthe.

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
0,14	1,77	2,09	−0,32
0,25	2,54	2,78	−0,24
0,36	3,38	3,32	+0,06
0,58	4,27	4,17	+0,10
0,80	5,04	4,85	+0,19
1,19	5,87	5,80	+0,07
1,63	6,70	6,63	+0,07
2,30	7,53	7,59	−0,06
3,46	8,59	8,67	−0,08
5,18	9,36	9,33	+0,03

Auf einer Scheibe von Glockenmetall von der Gröfse und Dicke der Messingscheibe No. III. erhielt ich für eine der in die Richtung FF' fallenden Curven die Gleichung:

$$y^2 = 0,5464 \cdot (101,37 - x^2)$$

wo x vom Mittelpunkte der Seite BG gezählt wurde. Man übersieht in folgender Zusammensetzung, wie die beobachteten und berechneten Werthe der Ordinaten mit einander stimmen.

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
x	y	y	
2,99	7,04	7,11	−0,07
5,43	6,32	6,27	+0,05
6,26	5,87	5,83	+0,04
7,09	5,32	5,28	+0,04
8,03	4,60	4,49	+0,11
8,70	3,55	3,75	−0,20

Die Abweichungen der berechneten Werthe von den beobachteten, welche viel zu groß sind, um sie aus Fehlern der Messungen zu erklären, haben vielleicht zum Theil ihren Grund in dem störenden Einflusse des nahen bewegten Randes, wie schon oben angedeutet worden ist.

IX. Die Figuren 11. und 12. Taf. II. können sich auch bei geeigneter Unterstützung so verbinden, daß daraus die Klangfigur 14. hervorgeht. Man wird sogleich übersehen, daß bei der Unterstützung Alles darauf an-

komme, den Figuren 11. und 12. gerade die entgegengesetzte Lage, wie in Fig. 13. zu geben. Zu dem Ende unterstützt man die Scheibe mit 3 Fingern in den Punkten A, C, B , und setzt den vierten Finger in D , so daß $DB = \frac{1}{3}$ der Seite der Scheibe wird; die Scheibe wird im Punkte E in Schwingung versetzt. Die entstehende Figur $ACBF$, welche an den Stellen A, C, B, F hyperbolisch gekrümmt ist, hat den längern Durchmesser AB in der Richtung der Hauptaxe der Figur 2. Auf der Messingscheibe No. III. war die Fig. 14. Taf. II. in der Richtung AB nicht geschlossen. Der größere Durchmesser der von der Figur $ACBF$ eingeschlossenen innern Curve liegt ebenfalls in der Richtung AB der Figur 2. — Die Berechnung dieser Figur werde ich ein andermal mittheilen.

X. Die in Taf. II. Fig. 11. und 12. vorkommende einfache Schwingungsart kann sich auch so mit Hyperbeln verbinden, daß die Ellipsen der Fig. 11. und 12. in Hyperbeln übergehen, deren Hauptaxe entweder auf der Diagonale AB (Taf. II. Fig. 15.) senkrecht ist, oder dieser Diagonale parallel bleibt. Man unterstützt, um eine der Figuren 15. und 16. hervorzubringen, die Scheibe in A und B , und setzt einen dritten Finger in der auf AB senkrechten Diagonale ungefähr um $\frac{1}{6} AB$ vom Rande G , und streicht mit dem Bogen in E , wo $EG = \frac{3}{5} AG$. Für die Curve DC (Taf. II. Fig. 15.) habe ich auf der in (VIII.) erwähnten Scheibe von Glockenmetall die Gleichung erhalten:

$$y^2 = 80,546 - 1,7848 x - 0,9485 x^2$$

Der Anfangspunkt der auf einander senkrechten Coordinaten lag vom Mittelpunkte der Linie BG rechts um $2''{,}16$ entfernt, so daß die Messungen mehr, als die Hälfte der ganzen aus einem elliptischen und hyperbolischen Bogen zusammengesetzten Curve umfassen. In der angegebenen Gleichung sind nur die in x und x^2 multiplicirten Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate be-

stimmt. Die nach dieser Gleichung berechneten Werthe von γ stimmen mit den durch Beobachtung gefundenen folgendermaßen überein:

Beobachtet.		Berechnet.	Differenz.
α	γ	γ	
0,00	8,98	8,98	+0,00
0,89	8,81	8,84	-0,03
2,16	8,42	8,50	-0,08
3,05	8,14	8,14	+0,00
3,82	7,70	7,74	-0,04
4,76	7,20	7,11	+0,09
5,60	6,48	6,39	+0,09
6,37	5,54	5,54	+0,00
7,09	4,38	4,50	-0,12
7,98	2,44	2,43	+0,01

XI. Wenn man die Scheiben zwingt, zwischen 2 Unterstützungsflächen zu schwingen, so erfahren die Klangfiguren ohne Abänderung des Tones mehrere Abänderungen. Es ist nicht meine Absicht, hier genauer in diesen Gegenstand einzugehen, aber ich erlaube mir einige Bemerkungen darüber.

In VII. ist die Schwingungsart betrachtet worden, welche sich in den Figuren 9. und 10. Taf. II. ausspricht. Wir nehmen nun an, daß man die Quadratscheibe in einem Punkte, welcher um $\frac{1}{4}$ der Seite der Scheibe, und um $\frac{1}{2}$ der Seite von den beiden Rändern absteht, einspanne, und dieselbe in einem der 4 Mittelpunkte der Seiten in Schwingung versetze. Durch den erwähnten Punkt der Einspannung lege man den Seiten der Scheibe parallel 2 gerade Linien. Die 4 entstehenden rechten Winkel mögen mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet werden. Unterstützt man die Scheibe in der Winkelfläche 1 in einem Punkte, der etwa einige Paris. Linien vom Durchschnittspunkte der erwähnten Parallelen entfernt ist, so erhält man Fig. 9. Geht man darauf in die Winkelfläche 2, und macht, wie bei 1, dieselbe Unterstützung durch Einspannung der Scheibe, so erscheint Fig. 10; in der Win-

kelfläche 3 erhält man wieder Fig. 9., und in der Winkelfläche 4 wiederum Fig. 10. Ich habe niemals eine Scheibe gefunden, welche diese viermalige Umkehrung der Figuren in einem gewissen Abstände vom Durchschnittspunkte der 2 genannten, den beiden Seiten der Scheibe parallelen Linien nicht gezeigt hätte. Ubrigens ist zu bemerken, daß der Abstand der Curven von einander in Fig. 9. und Fig. 10. veränderlich ist, je nachdem der Punkt der Einspannung dem Durchschnittspunkte jener beiden Parallelen näher oder von demselben entfernter liegt.

Um die Veränderung der Lage der Figur in die entgegengesetzte recht augenscheinlich wahrzunehmen, so läßt man den Sand in der zuletzt erhaltenen Lage liegen, ohne denselben durch nochmaliges Aufstreuen zu erneuern, und spannt nur die Scheibe an einem andern Punkte ein.

Welche Veränderung durch die Unterstützung auf beiden Seiten der Scheibe in die Figur 6. gebracht wird, werde ich noch anzeigen.

Man bringe Fig. 6., welche als die viermalige Wiederholung einer leicht zu erkennenden einfachern Figur anzusehen ist, durch Unterstützung der Scheibe an Einer Seite auf folgende Weise hervor:

Man unterstütze die Scheibe in 2 Punkten G und G' von Einer Seite, und setze einen dritten Finger in den Punkt A in die Richtung der Linie BB' , und streiche mit dem Bogen in dem Punkte B . Wie sich aus frühern Betrachtungen erwarten läßt, liegt in der geschlossenen Figur $DCDC$ der längere Durchmesser CC immer der Hauptaxe der Hyperbel in Taf. II. Fig. 2. parallel; in den zu den Punkten F, F', B, B' gehörigen Curven sind die Linien AB und AB' größer, als die Linien EF und EF' . Man würde dieselbe Figur ohne die geringste Abänderung auch hervorgebracht haben, wenn man die Scheibe, anstatt dieselbe in A zu unterstützen, in E oder E' unterstützt hätte. Wenn man aber die Scheibe

von beiden Seiten einspannt in einem Punkte der Richtung FE , welcher dem Mittelpunkte der Scheibe näher, als der Punkt E liegt, so kann man es ohne Veränderung des Tons dahin bringen, daß die Curve $DCD'C$ ihren längern Durchmesser in der Richtung DD' erhält. Natürlich erfahren dabei auch die andern Theile der Figur 6. entsprechende Veränderungen, und die Oerter, in welchen die Einspannungsstellen liegen, sind in gewissen Gränzen enthalten.

Der Punkt A liegt bei der Unterstützung von Einer Seite ein wenig rechts von der Mitte der Linie HB . Unterstützt man, wie zu Fig. 6., die Punkte des Randes G und G' , und setzt einen dritten Finger genau in die Mitte von HB , so entsteht Fig 7., in welcher die Linien EE' und $D'D$ auf regelmäsigern Scheiben immer in der Richtung der Hauptaxe AB der Hyperbel Fig. 2. liegen.

Diesen Versuche, Klangfiguren durch Gleichungen darzustellen, soll in einiger Zeit ein anderer folgen, gestützt auf schärfere Messungen, welche auf regelmäsigern Scheiben vorgenommen wurden. Es wird sich dann zeigen, ob man die Hypothese, daß die Klangfiguren auf Quadratscheiben aus Kegelschnitten zusammengesetzt seyen, beibehalten oder verwerfen muß.

