

Ueber die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse.

Von *J. Mestschersky*.

Das Problem von der Bewegung zweier Körper, deren Massen mit der Zeit Veränderungen unterworfen sind, führt unter der Annahme, dass bei der Massenveränderung keine Stöße vorkommen und die Körper sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, auf die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned} \right\} (1)$$

wo μ eine bekannte Function der Zeit darstellt.

H. Gylden hat in Nr. 2593 der A. N. in seiner Abhandlung: »Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind«, eine Methode für die angenäherte Integration der Gleichungen (1) angegeben.

In Nr. 3153 der A. N. habe ich in meiner Abhandlung: »Ein Specialfall des Gylden'schen Problems (A. N. 2593)« auf einen Specialfall, nämlich:

$$\mu = \frac{1}{a + \alpha t}, \quad (2)$$

wo a und α Constanten bedeuten, hingewiesen, in welchem das Problem zweier Körper von veränderlicher Masse sich auf das Problem zweier Körper von constanter Masse reduciren lässt, indem die Gleichungen (1) mittelst der Formeln:

$$\xi = \frac{x}{a + \alpha t}, \quad \eta = \frac{y}{a + \alpha t}, \quad \tau = \frac{1}{\alpha(a + \alpha t)} \quad (3)$$

sich in die folgenden Gleichungen transformiren lassen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\varrho} &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\varrho} &= 0 \\ \varrho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Herr E. O. Lovett kommt in seiner Abhandlung: »Note on Gylden's equations of the problem of two bodies with masses varying with the time« in Nr. 3790 der A. N. bei der Betrachtung einer Transformation von der Form:

$$\xi = \varphi(x, y, t), \quad \eta = \psi(x, y, t), \quad \tau = \omega(t)$$

zu dem Schlusse, dass die von mir angegebene Transformation unrichtig sei und dass die Gleichungen (1) auf (4) in dem Falle führen, wenn

$$\mu = a + \alpha t$$

ist und

$$\xi = \frac{x}{a + \alpha t}, \quad \eta = \frac{y}{a + \alpha t}, \quad \tau = -\frac{1}{\alpha(a + \alpha t)} \quad *)$$

gesetzt wird.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtige ich zu zeigen:

1. dass die von mir in Nr. 3153 der A. N. angegebene Transformation richtig ist;
2. dass die Gleichungen (1) auch in einem allgemeineren Falle, nämlich wenn

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{a + \beta t + \gamma t^2}}$$

ist und α, β, γ Constanten bedeuten, in Quadraturen integrirbar sind;

3. dass dieser Fall der einzige ist, in welchem durch eine Transformation von der Form:

$$\xi = \varphi(x, y, t), \quad \eta = \psi(x, y, t), \quad d\tau = \omega(x, y, t) \cdot dt,$$

welche der Bedingung unterworfen ist, dass bei einer jeden von der Geschwindigkeit unabhängigen Kraft dadurch keine ersten Derivirten in den Bewegungsgleichungen entstehen, die Gleichungen (1) auf Gleichungen führen, welche man als Bewegungsgleichungen eines Punktes von constanter Masse unter dem Einflusse einer bloss von der Entfernung abhängenden centralen Kraft betrachten kann.

§ 1. Fall: $\mu = \frac{1}{a + \alpha t}$.

Wir zeigen, dass die Gleichungen (4) nach Transformation mittelst der Formeln (3) die Gleichungen (1) bei $\mu = \frac{1}{a + \alpha t}$ ergeben.

*) In den Formeln (46) und (47) des Verfassers setze ich: $m = \alpha, n = a, l = 1$.

Aus (3) folgt nämlich:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha \tau \cdot x, & \eta &= \alpha \tau \cdot y, & \alpha \tau &= \frac{1}{a + \alpha t} \\ \frac{dt}{d\tau} &= -\frac{1}{\alpha^2 \tau^2} \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \alpha x - \frac{1}{\alpha \tau} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= -\alpha \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \tau^2} + \frac{1}{\alpha \tau^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\alpha^3 \tau^3} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha^3 \tau^3} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{\xi}{\rho^3} &= \frac{1}{\alpha^2 \tau^2} \cdot \frac{x}{r^3}\end{aligned}$$

daher

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \tau \cdot \frac{x}{r^3} = 0$$

und folglich

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{a + \alpha t} \cdot \frac{x}{r^3} = 0.$$

Eine ähnliche Gleichung erhält man natürlich auch für y .

Wir bemerken, dass der Fall: $\mu = \frac{1}{a + \alpha t}$ und die demselben entsprechenden Formeln (3) aus den Formeln von Gylden (A. N. 2593) erhalten werden können, indem man für die von Gylden eingeführte Function ψ eine lineare Function von τ setzt.

$$\S 2. \text{ Fall: } \mu = \frac{1}{\sqrt{a + \beta t + \gamma t^2}}.$$

Wir führen drei neue Variable ξ, η, τ ein, indem wir:

$$\xi = x \cdot f(t), \quad \eta = y \cdot f(t), \quad d\tau = \varphi(t) \cdot dt$$

setzen; dann gehen die Gleichungen (1) in die folgenden über:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= -\frac{\mu f^3}{\varphi^2} \cdot \frac{\xi}{\rho^3} + \frac{1}{\varphi} \left(\frac{2f'}{f} - \frac{\varphi'}{\varphi} \right) \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{1}{f^2 \varphi^2} (ff'' - 2f'^2) \xi \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= \text{einem ähnlichen Ausdrucke, welchen man durch Vertauschung von } \xi \text{ durch } \eta \text{ erhält,} \end{aligned} \right\} (5)$$

wo $f', \varphi', f'', \varphi''$ die ersten und zweiten Derivirten der Functionen f und φ bedeuten.

Die Gleichungen (5) werden die Derivirten $\frac{d\xi}{d\tau}$ und $\frac{d\eta}{d\tau}$ nicht enthalten, wenn

$$\varphi = k f^2,$$

wo k eine Constante ist; damit aber die Veränderliche τ auf der rechten Seite der Gleichung (5) nicht vorkomme, muss

$$\frac{1}{f^2 \varphi^2} (ff'' - 2f'^2) = \text{Const.}$$

sein, und für die Function f ergibt sich somit die Gleichung:

$$\frac{1}{f^6} (ff'' - 2f'^2) = \text{Const.},$$

woraus

$$f = \frac{1}{\sqrt{a + \beta t + \gamma t^2}},$$

wo α, β, γ Constanten bedeuten.

Daraus schliessen wir, dass die Gleichungen (5) die Variable τ und die ersten Derivirten nicht enthalten werden,

wenn

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{a + \beta t + \gamma t^2}}.$$

In diesem Falle transformiren wir die Gleichungen (1), indem wir

$$\xi = \mu x, \quad \eta = \mu y, \quad d\tau = \mu^2 \cdot dt$$

setzen, in die folgenden:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = -\frac{\xi}{\rho^3} + n \xi$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = -\frac{\eta}{\rho^3} + n \eta,$$

wo $n = \frac{1}{4} \beta^2 - \alpha \gamma$.

Somit reducirt sich im betrachteten Falle das Problem der Bewegung zweier Punkte von veränderlicher Masse, welche sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, auf das Problem der Bewegung eines Punktes von constanter Masse unter dem Einflusse einer centralen Kraft, welche die Resultante zweier Kräfte darstellt, von denen die eine die Newton'sche Attractionskraft, und die andere eine der Ent-

fernung proportionale Attractions- oder Repulsionskraft ist, je nachdem $\beta^2 < \text{oder} > 4\alpha\gamma$ ist. Man kann die Lösung der Aufgabe leicht in Quadraturen erhalten; die Coordinaten des Punktes stellen sich als elliptische Functionen der Zeit dar. Ich verweile hier aber nicht bei der Unter-

suchung der Bewegung, da es den Umfang dieser Abhandlung zu sehr vergrössern würde.

Die der Entfernung proportionale Kraft erscheint nicht, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$; man kommt dann auf den vorigen

Fall: $\mu = \frac{1}{a + \alpha t}$.

§ 3. Die Transformation:

$$\xi = \varphi(x, y, t), \quad \eta = \psi(x, y, t), \quad d\tau = \omega(x, y, t) \cdot dt. \quad (6)$$

Es seien die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \end{aligned} \right\} (7)$$

gegeben, wo X und Y Functionen bloss der Variablen x, y, t bedeuten; betrachten wir die Transformation dieser Gleichungen mittelst Einführung der neuen Veränderlichen ξ, η, τ durch die Gleichungen (6).

Wir bezeichnen die partiellen Differentialquotienten folgendermaassen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_t, \quad \frac{\partial \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)}{\partial x} = \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_x, \quad \frac{\partial \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)}{\partial y} = \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_y \quad \text{u. s. w.}$$

und erhalten dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \frac{1}{\omega^2} \left(\varphi_x \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi_y \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \frac{1}{\omega} \left\{ \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\varphi_y}{\omega} \right)_y \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left[\left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_y + \left(\frac{\varphi_y}{\omega} \right)_x \right] \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_t + \left(\frac{\varphi_t}{\omega} \right)_x \right] \frac{dx}{dt} + \left[\left(\frac{\varphi_y}{\omega} \right)_t + \left(\frac{\varphi_t}{\omega} \right)_y \right] \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\varphi_t}{\omega} \right)_t \right\} \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

der Ausdruck für $\frac{d^2\eta}{d\tau^2}$ ergibt sich aus demjenigen für $\frac{d^2\xi}{d\tau^2}$

durch Vertauschung von φ durch ψ .*)

Untersuchen wir nun, welche Form die Functionen φ, ψ, ω (6) haben müssen, damit die Gleichungen (8) keine ersten Derivirten mehr enthalten, wie die Functionen X und Y auch beschaffen sein mögen, nachdem $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$

durch X und Y ersetzt und die Variablen ξ, η eingeführt worden sind.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Gleichungen (8) die Derivirten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nicht enthalten; hieraus folgen zwei Gruppen von Gleichungen, denen die Functionen φ, ψ, ω genügen müssen:

$$\left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_x = 0, \quad \left(\frac{\varphi_y}{\omega} \right)_y = 0, \quad \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_y + \left(\frac{\varphi_y}{\omega} \right)_x = 0 \quad (9)$$

und drei ähnliche Gleichungen, welche man durch Einsetzung von ψ statt φ erhält;

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\varphi_x}{\omega} \right)_t + \left(\frac{\varphi_t}{\omega} \right)_x &= 0, \quad \left(\frac{\varphi_y}{\omega} \right)_t + \left(\frac{\varphi_t}{\omega} \right)_y = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

und zwei ähnliche Gleichungen mit ψ statt φ .

Aus den Gleichungen (9) folgt bekanntlich (P. Appell, »De l'homographie en mécanique«, American Journal of Mathematics, Vol. XII, pp. 103-114), dass die Functionen φ, ψ, ω die Gestalt:

$$\varphi = \frac{Ax + By + C}{Mx + Ny + P}, \quad \psi = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{Mx + Ny + P}, \quad \omega = \frac{1}{k(Mx + Ny + P)^2} \quad (11)$$

haben müssen, wo alle Grössen, ausser x und y , Functionen von t oder Constanten sein können und k von Null verschieden ist.

Substituirt man nun die Ausdrücke (11) in die Gleichungen (10) und setzt die Coefficienten von x und y und die constanten Glieder gleich Null, so erhält man zwölf

Gleichungen, welche sich in folgende drei Gruppen bringen lassen:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dA}{dt} - A \frac{dM}{dt} &= 0, \quad N \frac{dB}{dt} - B \frac{dN}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

und zwei ähnliche Gleichungen für A_1 und B_1 ;

*) Wendet man die Formeln (8) auf den in der Abhandlung E. O. Lovett (A. N. 3790) betrachteten Fall der Transformation an, so sieht man, dass dort auf der rechten Seite der Formeln (4) ein Theiler fortgelassen ist, nämlich ω_t nach der Bezeichnung des Verfassers.

$$\left. \begin{aligned} 2k \left(N \frac{dA}{dt} - B \frac{dM}{dt} \right) + \frac{dk}{dt} (AN - BM) &= 0 \\ 2k \left(M \frac{dB}{dt} - A \frac{dN}{dt} \right) + \frac{dk}{dt} (BM - AN) &= 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

und zwei ähnliche Gleichungen für A_1 und B_1 ;

$$\left. \begin{aligned} 2k \left(P \frac{dA}{dt} - C \frac{dM}{dt} \right) + \frac{dk}{dt} (AP - CM) &= 0 \\ 2k \left(P \frac{dB}{dt} - C \frac{dN}{dt} \right) + \frac{dk}{dt} (BP - CN) &= 0 \end{aligned} \right\} (14)$$

und zwei ähnliche Gleichungen für A_1, B_1, C_1 .

$$(\alpha - \beta) \left(2k \frac{dM}{dt} + N \frac{dk}{dt} \right) = 0, \quad (\alpha - \beta) \left(2k \frac{dN}{dt} + N \frac{dk}{dt} \right) = 0$$

und zwei ähnliche Gleichungen, welche den Factor $(\alpha_1 - \beta_1)$ statt $(\alpha - \beta)$ enthalten; es kann nicht zugleich $\alpha = \beta$ und $\alpha_1 = \beta_1$ sein, da sonst die ersten beiden der Gleichungen (11)

Man sieht leicht ein, dass diesen Gleichungen dann, und nur dann, Genüge geleistet wird, wenn in den Ausdrücken (11) C, C_1, P Functionen von t oder Constanten, $k = 1$ und die übrigen Coefficienten constante Grössen sind.

Erster Fall: M und N sind von Null verschieden.

Die Gleichungen (12) ergeben:

$$A = \alpha M, \quad B = \beta N, \quad A_1 = \alpha_1 M, \quad B_1 = \beta_1 N,$$

wo $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ Constanten sind.

Die Gleichungen (13):

$$(\alpha - \beta) \left(2k \frac{dN}{dt} + N \frac{dk}{dt} \right) = 0$$

keine bestimmten Ausdrücke für x und y , als Functionen von ξ und η , geben würden; es muss daher

$$M = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}, \quad N = \frac{\delta}{\sqrt{k}}$$

sein, wo γ und δ Constanten sind.

Die Gleichungen (14) werden durch die oben angeführten Ausdrücke für A, B, A_1, B_1, M, N befriedigt. Bringt man diese Werthe in die Formeln (11), so erhält man:

$$\varphi = \frac{A'x + B'y + C'}{M'x + N'y + P'}, \quad \psi = \frac{A_1'x + B_1'y + C_1'}{M'x + N'y + P'}, \quad \omega = \frac{1}{(Mx + Ny + P)^2}, \quad (15)$$

wo C', C_1', P' Functionen von t oder Constanten und die übrigen Coefficienten constante Grössen sind.

Zweiter Fall: $M \leq 0, \quad N = 0$.

Die Gleichungen (12) ergeben:

$$A = \alpha M, \quad A_1 = \alpha_1 M.$$

Aus den Gleichungen (13) folgt, da B und B_1 nicht zugleich Null sein können:

$$2k \frac{dM}{dt} + M \frac{dk}{dt} = 0, \quad 2k \frac{dB}{dt} + B \frac{dk}{dt} = 0, \quad 2k \frac{dB_1}{dt} + B_1 \frac{dk}{dt} = 0,$$

woraus

$$M = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}, \quad B = \frac{\beta}{\sqrt{k}}, \quad B_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{k}}.$$

Den Gleichungen (14) wird damit Genüge geleistet, und man gelangt zu Formeln von der Form (15) für $N' = 0$.

Dritter Fall: $M = 0, \quad N \geq 0$.

Man verfährt wie im vorigen Falle und gelangt zu Formeln von der Form (15) für $M' = 0$.

Vierter Fall: $M = 0, \quad N = 0$.

In diesem Falle kann P nicht Null sein und die Gleichungen (14) ergeben:

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}, \quad B = \frac{\beta}{\sqrt{k}}, \quad A_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{k}}, \quad B_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{k}};$$

man gelangt zu Formeln von der Form (15) für $M' = 0$ und $N' = 0$.

Es stellen daher die Gleichungen:

$$\xi = \frac{Ax + By + C}{Mx + Ny + P}, \quad \eta = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{Mx + Ny + P}, \quad d\tau = \frac{1}{(Mx + Ny + P)^2} dt, \quad (16)$$

in welchen, wie auch überall weiter in unserer Entwicklung, C, C_1, P Functionen von t oder Constanten, und A, B, A_1, B_1, M, N Constanten bedeuten, die einzigen Transformationsarten von (6) dar, bei welchen die transformirten Gleichungen (7), bei einer jeden Form der Functionen X und Y , keine ersten Derivirten enthalten.

Bezeichnen wir mit $a, b, c, a_1, b_1, c_1, m, n, p$ die Coefficienten von $A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, N, P$ resp. in der Entwicklung dieser Determinante, so dass

$$a = B_1P - C_1N, \quad b = C_1M - A_1P, \quad \dots \quad p = AB_1 - BA_1$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

muss von Null verschieden sein.

und lösen die beiden ersten der Gleichungen (16) in Bezug auf x und y auf, so finden wir:

$$x = \frac{a\xi + a_1\eta + m}{c\xi + c_1\eta + p}, \quad y = \frac{b\xi + b_1\eta + n}{c\xi + c_1\eta + p}. \quad (17)$$

§ 4. Beweis, dass der Fall § 2 bei der Transformationsart (16) der einzig mögliche ist.

Wir wenden die Transformationsformeln (16) auf die Gleichungen (1) an.

Die Gleichungen (8) liefern uns:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \frac{1}{\omega} \left[(-b_1x + a_1y) \frac{\mu}{r^3} + \left(\frac{\varphi_t}{\omega} \right)_t \right] \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \frac{1}{\omega} \left[(bx - ay) \frac{\mu}{r^3} + \left(\frac{\psi_t}{\omega} \right)_t \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wo φ und ψ die Functionen bedeuten, welche sich auf der rechten Seite der beiden ersten der Gleichungen (16) befinden, und ω der Factor von dt in der dritten der Gleichungen (16) ist.

Wir werden nur denjenigen Fall ins Auge fassen, in welchem die Gleichungen (18), nach Einführung der Variablen ξ und η mittelst der Gleichungen (17), t nicht enthalten.

Hierbei nehmen wir an, dass man zur Elimination von t über kein Integral der Gleichungen (1) verfügt, welches von den ersten Derivierten frei wäre, da, wenn ein solches Integral bekannt wäre, man die Coordinaten des

Punktes als bekannte Functionen von t betrachten könnte*) und dann das Problem von der Transformation selbst keinen Sinn mehr hätte.

Da die Grössen a, b, a_1, b_1 nicht alle verschwinden können, so ergeben sich nach Einführung der Variablen ξ und η auf der rechten Seite der Gleichungen (18) irrationale Functionen von ξ und η : eine Irrationalität entsteht bei der Transformation von $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Wir suchen nun eine solche Transformation von der Gestalt (16), bei welcher die Gleichungen (18) die Irrationalität in Bezug auf ξ und η nur in der Gestalt von $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ enthalten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(\xi, \eta, t) \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

sei, wo f eine rationale Function in Bezug auf ξ und η darstellt, und folglich, dass umgekehrt

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = F(x, y, t) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

sei, wo F eine rationale Function von x und y bedeutet.

Aus den Formeln (16) erhalten wir:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{\omega} [(A^2 + A_1^2)x^2 + (B^2 + B_1^2)y^2 + 2(AB + A_1B_1)xy + 2(AC + A_1C_1)x + 2(BC + B_1C_1)y + C^2 + C_1^2]$$

daher muss

$C = 0, \quad C_1 = 0, \quad B_1 = \pm A, \quad A_1 = \mp B$ sein, wobei hier sowohl als auch in den folgenden Formeln

$$\begin{aligned} a &= \pm AP, & b &= \pm BP, & a_1 &= -BP, & b_1 &= AP, & m &= 0, & n &= 0 \\ c &= \mp (AM + BN), & c_1 &= BM - AN, & p &= \pm (A^2 + B^2). \end{aligned}$$

Die Formeln (17) ergeben:

$$x = \frac{P(\pm A\xi - B\eta)}{c\xi + c_1\eta + p}, \quad y = \frac{P(\pm B\xi + A\eta)}{c\xi + c_1\eta + p},$$

folglich ist

$$x^2 + y^2 = \frac{P^2(A^2 + B^2)}{(c\xi + c_1\eta + p)^2} (\xi^2 + \eta^2), \quad -b_1x + a_1y = \mp \frac{P^2(A^2 + B^2)}{c\xi + c_1\eta + p} \xi, \quad bx - ay = \mp \frac{P^2(A^2 + B^2)}{c\xi + c_1\eta + p} \eta,$$

*) Es sei $f(x, y, t, h_1) = h_2$, wo h_1 und h_2 Constanten bedeuten, ein bekanntes Integral der Gleichungen (1); dann wird

$$\frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dt} = 0$$

und

$$xy' - yx' = h,$$

wo $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ und h eine Constante ist. Lassen letztere zwei Gleichungen eine Lösung in Bezug auf x' und y' zu, so ergibt sich das fehlende Integral nach dem Liouville'schen Satze; können aber diese Gleichungen in Bezug auf x' und y' nicht gelöst werden, so muss

$$\frac{df}{dx} x + \frac{df}{dy} y = 0$$

sein und folglich die Function f die Veränderlichen x und y nur in Gestalt des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ enthalten und man erhält dann offenbar x und y als bekannte Functionen der Zeit.

die oberen oder die unteren Zeichen zugleich genommen werden müssen.

In diesem Falle hat man:

$$\left(\frac{\varphi_i}{\omega}\right)_t = \mp \frac{PP''(A^2 + B^2)}{c\xi + c_1\eta + p} \xi, \quad \left(\frac{\psi_i}{\omega}\right)_t = \mp \frac{PP''(A^2 + B^2)}{c\xi + c_1\eta + p} \eta,$$

$$\text{wo } P'' = \frac{d^2 P}{dt^2}.$$

Nach Substitution in die Gleichungen (18) findet man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= \mp \frac{(A^2 + B^2)^{3/2}}{(c\xi + c_1\eta + p)^3} \left\{ \frac{\mu \xi}{\rho^3} [P(c\xi + c_1\eta + p)^3] + (A^2 + B^2)^{3/2} P^3 P'' \cdot \xi \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= \mp \frac{(A^2 + B^2)^{3/2}}{(c\xi + c_1\eta + p)^3} \left\{ \frac{\mu \eta}{\rho^3} [P(c\xi + c_1\eta + p)^3] + (A^2 + B^2)^{3/2} P^3 P'' \cdot \eta \right\} \end{aligned} \right\} (19)$$

wo unter $(A^2 + B^2)^{1/2}$ und $[P(c\xi + c_1\eta + p)^3]$ die absoluten Werthe der entsprechenden Ausdrücke zu verstehen sind.

Da nur μ und P Functionen von der Zeit sind, so ergibt sich als nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die Variable t auf der rechten Seite der Gleichungen (19) nicht vorkomme, dass

$$\mu P = \text{Const.} \quad (20)$$

$$P^3 P'' = \text{Const.} \quad (21)$$

sei.

Nach Integration der Gleichung (21) findet man

$$P = \sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2},$$

wo α, β, γ Constanten sind, und aus der Gleichung (20) folgt

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}},$$

wo ε eine Constante bedeutet, welche man aber, ohne der Allgemeinheit der Formel zu schaden, $= 1$ setzen kann; man kommt dann auf den Fall des § 2.

Somit ist bewiesen, dass der Fall

§ 5. Ein Specialfall des Problems von n Körpern mit veränderlicher Masse.

Die Transformation

$$\xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}}, \quad \eta_i = \frac{y_i}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}}, \quad \zeta_i = \frac{z_i}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}}, \quad d\tau = \frac{dt}{\alpha + \beta t + \gamma t^2} \quad (22)$$

kann auch mit Vortheil bei der Lösung des Problems von der Bewegung n materieller Punkte:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \dots M_n(x_n, y_n, z_n),$$

auf welche gegenseitige Anziehungs- und Abstossungskräfte wirken, angewendet werden, nämlich in dem Falle, dass diese Kräfte der s^{ten} Potenz der Entfernungen und den Massen der Punkte proportional sind, wobei die Massen der Punkte sich mit der Zeit nach dem Gesetze

$$m_i = k_i (\alpha + \beta t + \gamma t^2)^{-\frac{s+3}{2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

verändern, wo $k_1, k_2, \dots, k_n, \alpha, \beta, \gamma, s$ Constanten sind.

Ausser diesen Kräften kann auf jeden Punkt M_i des Systems noch eine Anziehungs- oder Abstossungskraft F_i wirken, welche von dem Anfangspunkte der Coordinaten

der einzige ist, in welchem sich das Gylden'sche Problem mittelst der Transformation (6), welche der Bedingung unterworfen ist, dass bei einer jeden von der Geschwindigkeit unabhängigen Kraft dadurch keine ersten Derivirten in den Bewegungsgleichungen entstehen, auf das Problem der Bewegung eines Punktes von constanter Masse unter dem Einflusse einer solchen Kraft reduciren lässt, deren Projectionen auf die Coordinatenachsen Functionen der Coordinaten allein und von der Beschaffenheit sind, dass in ihnen nur eine Irrationalität in Bezug auf die Coordinaten vorkommt, nämlich die Entfernung des Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten.

Aus dem Gesagten folgt, als specieller Fall, dass $\mu = \frac{1}{\alpha + \beta t}$ (§ 1) den einzigen Fall darstellt, in welchem das Gylden'sche Problem sich mittelst der Transformation (6), welche der oben angeführten Bedingung genügt, auf das Problem der Bewegung eines Punktes von constanter Masse reduciren lässt, welche von einem unbeweglichen Punkte nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird.

ausgeht, und gleich $\varepsilon_i m_i r_i^s$, wo

$$\varepsilon_i = f_i (\alpha + \beta t + \gamma t^2)^{-\frac{s+3}{2}}, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

ist und f_1, f_2, \dots, f_n Constanten bedeuten.

Mit Hülfe der Transformation (22) lässt sich diese Aufgabe auf das Problem von der Bewegung n materieller Punkte mit constanter Masse reduciren, auf welche gegenseitige Attractions- und Repulsionskräfte der oben angeführten Art wirken und ausserdem im allgemeinen noch Kräfte, welche von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgehen und der Entfernung und Masse des Punktes proportional sind; von den letzteren wird diejenige, welche auf den Punkt, dessen Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i sind, wirkt, eine Anziehungskraft sein, wenn

$\pm f_i + \alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2 > 0$
ist, dagegen eine Abstossungskraft, falls

$$\pm f_i + \alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2 < 0,$$

wo $+f_i$ zu nehmen ist, wenn die Kraft F_i eine Anziehungs-

St. Petersburg, Mai 1902.

und $-f_i$, wenn sie eine Abstossungskraft darstellt; ist

$$\pm f_i + \alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2 = 0,$$

so wirken auf den Punkt (ξ_i, η_i, ζ_i) bloss Kräfte, welche von den anderen Punkten des Systems ausgehen.

J. Mestschersky.

Positionen der Planeten (240) Vanadis und (238) Hypatia.

Auf Wunsch von Herrn A. Berberich hat Dr. Mündler den Planeten (240) Vanadis auf meiner Aufnahme 1895 März 16 ausgemessen. Da der Anfang des Striches wegen der starken Extinction ganz unscharf ist, so ist die Mitte

$$\begin{array}{llll} 1895 \text{ März } 16 & 10^h 32^m & \text{M. Z. Heidelberg} & \alpha (1895.0) = 11^h 34^m 45.52 \quad \delta (1895.0) = +5^\circ 46' 59''.0 \\ & & & \quad \quad \quad 11 \ 34 \ 0.18 \quad \quad \quad +5 \ 47 \ 38.7 \end{array}$$

Die bei den Positionen des Planeten (238) Hypatia A. N. 3790 angegebenen Werthe für $\Delta\delta$ beziehen sich auf zwei andere Vergleichsterne als den dort angegebenen, nämlich auf:

$$\begin{array}{ll} \text{März } 18 & \text{AG. Nicolaiew } 3321 = *2 \\ 20 & \quad \quad \quad 3320 = *3 \end{array}$$

Königstuhl, Astrophys. Observatorium, 1902 Mai 4.

mit den Coordinaten für 1892.0:

$$\begin{array}{ll} *2 & \alpha = 11^h 49^m 7.01 \quad \delta = -1^\circ 5' 51''.4 \\ *3 & \quad \quad \quad 11 \ 48 \ 30.43 \quad \quad \quad -0 \ 26 \ 18.3 \end{array}$$

Dabei sind die Vorzeichen von $\Delta\delta$ zu ändern.

Max Wolf.

Beobachtungen des Planeten (433) Eros

am Repsold'schen Meridiankreis der kais. Universitätssternwarte in Strassburg i. Els.

(Mitgetheilt von dem Director E. Becker.)

1900-01	α app.	δ app.	Par.	B - R		Beob.	
				$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Fernr.	Kr.
Nov. 7	2 ^h 3 ^m 55.18	+54° 19' 50".42	-2".37	-0.5273	+1".04	T	E
8	2 1 2.286	+54 21 11.21	-2.40	-0.235	+1.00	E	T
23	1 34 15.542	+52 40 22.60	-1.91	-0.340	-0.93	T	E
Dec. 8	1 27 4.106	+47 58 30.47	+0.20	-0.318	-0.71	T	T
21	1 40 18.466	+42 42 30.44	+2.76	-0.206	-1.17	E	E
Jan. 23	3 10 51.043	+28 38 25.55	+8.96	+0.120	-0.95	T	E

Die Reduction ist im Wesentlichen von den Beobachtern selbst (T = Dr. Tetens, E = Ebell), die Vergleichung mit der von Herrn Millosevich in Circular Nr. 9 (Conférence astroph. intern. de Juillet 1900) nach den drei Elementensystemen A, B, C gegebenen Ephemeride von

Strassburg, 1902 Mai 3.

den Herren Dr. W. Ebert und Dr. H. Meyer ausgeführt. Die Positionen beruhen in beiden Coordinaten auf Newcomb's Catalogue of fundamental stars for 1875 and 1900. Die RA. Dec. 21 ist nur an 5 Fäden beobachtet und unsicher. $\pi_0 = 8''.80$.

New variable stars*)

discovered in the course of the revision of the Cape Photogr. Durchmusterung 1901 by Mr. R. T. A. Innes, Royal Observatory, Cape of Good Hope.

Designation	Catalogue	α 1875	δ 1875	Range observed
97.1901 Velorum	C. P. D. - 51° 22' 75	9 ^h 24 ^m 50 ^s	-51° 38' 1	8.6 to invisible
98.1901 Carinae	Anonymous	11 14 14	-61 10.0	9.8 to invisible
99.1901 Capricorni	Cord. DM. - 22° 14' 789	20 25 16	-22 6.7	9.4 to invisible

The period of 97.1901 Velorum is still unknown, it probably exceeds 200 days. The character of 98.1901 Carinae is not completely known, it may be a nova. The period of 99.1901 Capricorni is about 353 days.

*) Auszug aus Report of His Maj. Astronomer at the Cape of Good Hope for 1901. Kr.