

---

**SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA,  
CHE INTERESSA LA COSTRUZIONE DEI CAVI.**

*Nota di T. LEVI-CIVITÀ <sup>1)</sup>.*

Il Sig. Ing. E. Jona della Ditta Pirelli e C. mi ha favorito alcuni suoi appunti estremamente interessanti sulla rigidità dielettrica dei cavi per trasporto di energia ad alta tensione, sollecitandomi a sottoporre al calcolo una questione concreta, il cui studio sperimentale sembra presentare gravi difficoltà e non dà (o almeno non ha dato finora) indicazioni abbastanza sicure da poter servire utilmente di norma costruttiva.

Ho potuto rispondere al desiderato espressomi dall'Ingegnere Jona, e mi propongo di esporre in modo particolareggiato la ricerca, che ho all'uopo istituita, in una Memoria di prossima pubblicazione. Frattanto mi permetto di comunicare alla Accademia i termini precisi della questione e il risultato, cui sono pervenuto.

Un cavo consta essenzialmente :

di un conduttore centrale (formato da un filo unico a sezione circolare, o più spesso da una corda di tali fili), per cui passa la corrente ;

di un rivestimento isolante ;

di una guaina conduttrice (a sezione circolare) da riguardarsi in comunicazione col suolo.

Quando il conduttore centrale è percorso da corrente, si genera in tutto lo spazio ambiente un campo elettromagnetico. Se anche la corrente è alternativa, entro i limiti delle frequenze industriali, si può con tutta tranquillità parlare di potenziale e ritenere valide per una generica sezione del cavo le leggi elettrostatiche <sup>2)</sup>.

1) Rend. della R. Accad. dei Lincei, Vol. 13, 1° sem., 1904.

2) La ricerca in estenso mi porgerà pure occasione di presentare alcune semplici osservazioni su questo punto, e più generalmente, sul collegamento fra la elettrodinamica teorica e certi principii correnti di elettrotecnica.

La sezione del rivestimento isolante si presenta (cfr. la figura) come una corona  $\sigma$ , limitata esternamente da un cerchio C (sezione della guaina cilindrica conduttrice) ed internamente da un contorno T (circolare nel caso di un filo unico) frastagliato, a archi di cerchio tangenti, nel caso generale di una corda.

Il potenziale (logaritmico)  $W$  è zero in C ed ha in tutti i punti di T uno stesso valore (variabile col tempo)  $\delta$ , che può raggiungere massimi (positivi e negativi) molto elevati. Nel frapposto coibente  $\sigma$  c'è una caduta del potenziale  $W$  da  $\delta$  a zero.

Questa caduta di potenziale pone a cimento la rigidità dielettrica di  $\sigma$ , tanto che, se  $\delta$  oltrepassa un certo limite, avviene una scarica distruttiva e il dielettrico rimane perforato, ciò, che naturalmente è necessario evitare.

In modo preciso si può ritenere che la misura del cimento specifico, cui sottostà il dielettrico  $\sigma$  in un suo punto generico P sia data dal gradiente del potenziale  $W$ , che è poi il valore del  $\Delta_1 W$  in quel punto <sup>1</sup>).

Per gli scopi costruttivi interessa conoscere il massimo cimento specifico, che viene raggiunto in qualche punto del dielettrico  $\sigma$ . È chiaro che questo elemento è, al pari di  $W$ , proporzionale a  $\delta$ , mentre l'altro fattore  $G$  dipende soltanto dalla natura geometrica del campo  $\sigma$ .

Basta dunque occuparsi della (costante di configurazione)  $G$ , massimo cimento specifico (si può dire) per unità di differenza di potenziale.

Converremo di assumere la definizione di  $G$  sotto la forma seguente :

1) Sia infatti  $W_P$  il valore del potenziale nel punto considerato P;  $W = W_P$  la linea equipotenziale passante per P,  $W = W_P + dW_P$  la linea equipotenziale infinitamente vicina,  $dn$  la lunghezza della perpendicolare, abbassata da P sulla detta linea infinitamente vicina. Il gradiente (differenza elementare di potenziale divisa per l'elemento di distanza) è la naturale misura del cimento specifico. Esso viene quindi espresso da  $\frac{dW}{dn}$ , che coincide, come è ben noto, col  $\Delta_1 W$  (in coord. cartesiane  $\left| \sqrt{\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2} \right|$ ).

$G$  è il valore massimo del  $\Delta_1$  della funzione  $V$ , armonica e regolare entro  $\sigma$ , che prende il valore zero su  $T$  e uno su  $C$ .

Nel caso semplice di un filo unico,  $\sigma$  è una corona circolare e si ha immediatamente

$$V = \frac{\log \frac{\rho}{r}}{\log \frac{R}{r}},$$

designandosi con  $R, r$  i raggi esterno ed interno della corona e con  $\rho$  il raggio vettore del punto generico  $P$ .

Ne viene

$$\Delta_1 V = \frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{\rho \log \frac{R}{r}}.$$

Il valore massimo di  $\Delta_1 V$  ha luogo, come si vede, nei punti del conduttore interno ( $\rho = r$ ). La  $G$  di una corona circolare, che rappresenteremo con  $G_1$ , è dunque definita da

$$G_1 = \frac{1}{r \log \frac{R}{r}}.$$

Dato  $R$ , per rendere minimo  $G_1$ , bisogna prendere

$$r = \frac{R}{e} = \frac{R}{2,72},$$

ed il valore minimo di  $G_1$  è

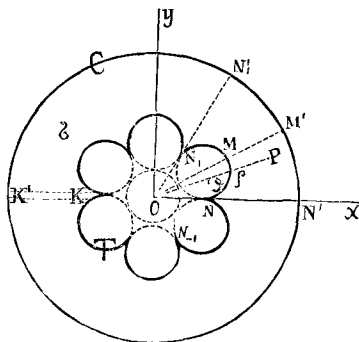
$$g_1 = \frac{1}{r}.$$

In questa condizione  $\left(r = \frac{R}{e}\right)$  — nota l'Ing. Jona — si ha la massima sicurezza contro la perforazione, e ad essa giova avvicinarsi compatibilmente colle esigenze della pratica <sup>1)</sup>. Ma

1) Date le eterogeneità inevitabili del dielettrico, non si può fare a meno — mi ha detto l'Ing. Jona — di dargli uno spessore più grande di quello, che corrisponde alla massima sicurezza teorica.

nella pratica il conduttore interno non è generalmente circolare; è quasi sempre formato con una corda a 7, 19, 37, ... fili circolari.

Si tratta di stabilire che cosa diventa in questi casi la espressione di  $G$ . Noi converremo di individuare il profilo del conduttore interno  $T$  per mezzo del raggio nodale  $r = ON$  e del numero  $m$  ( $m = 6$  in figura) degli archi di cerchio tangenti, che lo costituiscono:  $m$  è dunque non il numero totale dei fili della corda, ma di quelli soltanto, che appartengono all'ultima stratificazione; 6, 12, 18, ... nei citati esempi di corde a 7, 19, 37, ... fili.



Prima di indicare il risultato quantitativo della ricerca analitica, notiamo che il semplice buon senso (sorretto, se si vuole, da nozioni fondamentali di teoria del potenziale) permette di prevedere l'andamento del gradiente entro un generico campo  $\sigma$ .

Anzi tutto i valori estremi del gradiente debbono cadere sul contorno del campo (su  $C$ , o su  $T$ ): questo perchè  $\log \Delta_1 V$  è, al pari di  $V$ , una funzione armonica. Nel caso della corona circolare cadono, come si è visto, su  $T$ . Si capisce senz'altro che lo stesso deve avvenire in generale.

D'altra parte nei nodi (che sono cuspidi colla convessità rivolta verso il campo  $\sigma$ , in cui  $V$  è regolare)  $\frac{dV}{dn}$ , cioè  $\Delta_1 V$

si annulla <sup>1)</sup>. Il valore massimo  $G$  sarà perciò da cercarsi nei ventri (punti medi degli archi di cerchio costituenti  $T$ ): cosa ben naturale, quando si pensi che i ventri sono i punti più vicini a  $C$ , a partire dai quali quindi la variazione del potenziale è più rapida.

Ecco ciò che dà lo studio matematico della questione:

1° la determinazione di  $V$  si riconduce (adattando opportunamente un classico procedimento di Schwarz) alla integrazione di una ordinaria equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti doppiamente periodici; da essa facilmente si desume l'accennato comportamento del gradiente;

2° la integrazione della detta equazione (che si può effettuare per approssimazioni successive usufruendo di certo parametro  $q$ ) porge per  $V$  e  $\Delta_1 V$  degli sviluppi uniformemente convergenti in tutto  $\sigma$ , donde senz'altro la cercata espressione di  $G$  (valore del  $\Delta_1 V$  in un ventre di  $T$ );

3° l'errore, che si commette, arrestando questi sviluppi al loro primo termine, è, *nella peggiore ipotesi*, dell'ordine di  $16 \left( \frac{r}{R} \right)^m$  (rispetto all'unità), affatto trascurabile dunque, se, come avviene sempre nei cavi,  $\frac{r}{R}$  è inferiore ad  $\frac{1}{2}$  e si suppone  $m \geq 12$ .

(Del resto, anche per  $m = 6$ , si ha una esattezza sufficiente, poichè in pratica  $\frac{r}{R}$  è parecchio più piccolo di  $\frac{1}{2}$ ).

Ritenute queste condizioni di fatto, si ha con ogni desiderabile approssimazione

$$(1) \quad G = G_1 \frac{e^{-\mu}}{1 - \mu \cdot G_1} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right),$$

dove

$F$  è simbolo della serie ipergeometrica di Gauss;

$$\mu = \frac{4}{m} \log 2 + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2^{\nu+1}} \frac{2^{2\nu}-1}{m^{2\nu+1}},$$

1) Cfr. per es. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, B. I, pag. 342-343.

$s_3 = 1,2020$ ,  $s_5 = 1,0369$ , . . . designando le somme delle inverse delle potenze terze, quinte, ecc. dei numeri interi ;

e  $G_1 = \frac{1}{r \log \frac{R}{r}}$  è, si può dire, il  $G$ , che competerebbe ad

un cavo unifilare avente per raggio interno il raggio nodale  $r$  della corda.

Alla (1) si può anche attribuire un aspetto, che è meno semplice, ma che si presta più direttamente ai raffronti che interessano i costruttori, mettendovi in evidenza, in luogo del raggio nodale  $r$ , il raggio  $r'$  di un conduttore circolare di egual sezione. Si riconosce senza difficoltà che tale sezione (area interna a T, cioè  $m$  volte il triangolo mistilineo ONN<sub>1</sub>) vale

$$m \left\{ r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} + \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \right\}.$$

Ne risulta

$$r' = r e^\varepsilon,$$

avendo posto, per brevità di scrittura

$$e^{\varepsilon} = m \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \right\}.$$

Designiamo con

$$G' = \frac{1}{r' \log \frac{R}{r'}}$$

il massimo cimento (unitario), che compete al cavo unifilare, che ha il conduttore interno di egual sezione, ed eliminiamo dalla (1) il raggio nodale  $r$ , sostituendovi  $r' e^{-\varepsilon}$ . Si ottiene

$$(1^{\text{bis}}) \quad G = G' e^{\varepsilon - \mu} \frac{\log \frac{R}{r'}}{\log \frac{R}{r'} - \mu + \varepsilon} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right).$$

che ha forse più valore pratico della equivalente (1).

Riprendendo la (1) stessa, notiamo che, dato  $m$ ,  $F^2$  e  $\mu$  hanno valori numerici determinati. Supponendo assegnato anche  $R$ , si può — come l'Ing. Jona per il cavo a filo unico — cercare in qual modo bisogna prendere  $r$  affinchè  $G$ , e per esso il fattore  $\frac{G_1}{1 - \mu r G_1}$ , risulti minimo. Ricordando che la espressione di  $G_1$  è  $\frac{1}{r \log \frac{R}{r}}$ , si trova immediatamente come condizione di minimo

$$\log \frac{R}{r} = 1 + \mu$$

ossia  $r G_1 = \frac{1}{1 + \mu}$ , con che il predetto fattore  $\frac{G_1}{1 - \mu r G_1}$  si riduce a  $\frac{1}{r}$ .

Dalla espressione sopra riportata di  $\mu$  apparisce che, almeno per  $m \geq 12$ , la somma della serie è assolutamente insignificante, talchè si può identificare  $\mu$  con  $\frac{4}{m} \log 2$ . Se ne ha questo risultato pratico :

*Per un cavo a m fili (con che, non lo si dimentichi, voglio dire che sono  $m$  i fili dell'ultima stratificazione, cioè quelli in contatto col dielettrico) il rapporto di massima sicurezza fra il raggio nodale  $r$  e quello  $R$  del conduttore esterno è*

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{e 2^{\frac{4}{m}}}$$

Si noti che questo rapporto è sempre minore di  $\frac{1}{e}$  e quindi perfettamente entro il campo di validità delle approssimazioni, in base alle quali è stata scritta la condizione di minimo cimento.

Al crescere indefinito di  $m$  si ritrova il rapporto dell'Ingegnere Jona  $\frac{r}{R} = \frac{1}{e}$ , come è naturale perchè gli innume-

revoli piccolissimi archetti, che costituiscono il contorno T, quando  $m$  tende all' $\infty$ , sono come denti infinitesimi di una circonferenza di raggio  $r$  e non possono perciò avere che influenza locale.

Occupiamoci in particolare dei cavi di massima sicurezza, per cui, come si è detto,  $\frac{G_1}{1 - \mu r G_1} = \frac{1}{r}$ . Il corrispondente valore di  $G$ , che chiameremo  $g$ , è

$$g = \frac{1}{r} e^{-\mu} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right),$$

mentre, per un cavo unifilare avente per raggio del conduttore interno il raggio nodale  $r$ , ed egualmente di massima sicurezza, si ha

$$g_1 = \frac{1}{r}.$$

Il rapporto  $\frac{g}{g_1}$ , maggiore dell'unità (da  $m=12$  in poi) misura, si può dire l'aumento di pericolo, che presenta un cavo multifilare di massima sicurezza di fronte all'analogo unifilare. In altri termini:

*Se un cavo unifilare di massima sicurezza può resistere ad una data tensione elettrica, per un cavo multifilare, pure di massima sicurezza e di raggio nodale  $r$  eguale a quello dell'unico filo, la più alta tensione compatibile resta ridotta nel rapporto*

$$\frac{g_1}{g} = \frac{e^{\mu}}{F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right)}.$$

Questo rapporto, decresce con  $m$  e tende per  $m = \infty$  verso il valore limite

$$\frac{1}{F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)}.$$

Ora

$$F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,18,$$



quindi

$$\frac{g_1}{g_\infty} = \frac{1}{(1,18)^2} = 0,72 .$$

Per  $m = 12$ , si ha

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right) = 1,16.$$

$$e^\mu = \sqrt[3]{2} ,$$

da cui

$$\frac{g_1}{g_{12}} = 0,93 .$$

*Agendo per così dire in favore della stabilità, si può, per qualunque  $m$ , ritenere come coefficiente di riduzione il valore costante 0,72.*

Ma è bene avere presente che la riduzione è tanto meno sensibile quanto minore è il numero dei fili.

---