

Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni

(del prof. ULISSE DINI, a Pisa.)

In questa memoria, facendo la rappresentazione di una superficie non sviluppabile S sulla sfera di raggio $=1$, col metodo di GAUSS, e considerando le linee sferiche che corrispondono alle linee coordinate u e v di S (che suppongo qualunque) e l'elemento lineare sferico corrispondente, stabilisco prima di tutto alcune formole generali che contengono i coefficienti di questo elemento lineare sferico e altre quantità relative alla superficie S . Dopo, faccio alcune considerazioni su queste formole e sulle asintotiche delle superficie, e poi passo a fare alcune applicazioni delle medesime formole, per mostrarne l'utilità e fare risaltare sempre più i vantaggi che si hanno nello studio delle superficie quando si fa uso della loro rappresentazione sferica, e si tiene conto della forma che prende l'elemento lineare sferico nelle coordinate u e v che corrispondono a quelle u e v della superficie.

Per fare queste applicazioni suppongo dapprima che le linee coordinate sulla superficie S siano le asintotiche; e allora, per mezzo delle formole stabilite in principio, giungo ad altre pure generali che conducono poi, in particolare, a dei risultati notevoli relativi alle superficie di curvatura costante negativa e a quelle di area minima. Suppongo poi che uno solo dei due sistemi di linee coordinate sia formato di asintotiche, e l'altro sia formato dalle linee che sono a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste asintotiche; e in questo caso applico prima le formole date in principio alla ricerca delle superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono eliche appartenenti a cilindri paralleli fra loro, e riduco la determinazione di queste superficie alla soluzione di uno dei più semplici problemi della teoria del calore; e poi applico le stesse formole alla trattazione di alcuni problemi sulle superficie gobbe.

Formole generali.

1. Prendiamo su una superficie non sviluppabile S due sistemi di linee coordinate i cui parametri siano u e v . Le coordinate cartesiane x, y, z dei punti di questa superficie e i coseni X, Y, Z degli angoli che la normale ad essa fa coi tre assi saranno funzioni di u e v , e insieme alla relazione $\Sigma X^2 = 1$, e a quelle che se ne deducono colla derivazione, si avranno, come è noto, le formole seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= M \frac{dX}{du} + N \frac{dX}{dv}, & \frac{dx}{dv} &= P \frac{dX}{du} + Q \frac{dX}{dv}, \\ \frac{dy}{du} &= M \frac{dY}{du} + N \frac{dY}{dv}, & \frac{dy}{dv} &= P \frac{dY}{du} + Q \frac{dY}{dv}, \\ \frac{dz}{du} &= M \frac{dZ}{du} + N \frac{dZ}{dv}, & \frac{dz}{dv} &= P \frac{dZ}{du} + Q \frac{dZ}{dv}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ove M, N, P, Q sono certe funzioni di u e v .

Rappresentiamo ora la superficie S sulla sfera di raggio $=1$, col metodo di GAUSS. Il punto della sfera che corrisponde a quello della superficie di coordinate u e v , cioè al punto (x, y, z) , avrà per coordinate cartesiane X, Y, Z e per coordinate curvilinee u e v ; e il quadrato dell'elemento lineare sferico in queste coordinate sarà

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2, \quad (2)$$

ove

$$E' = \Sigma \left(\frac{dX}{du} \right)^2, \quad F' = \Sigma \frac{dX}{du} \frac{dX}{dv}, \quad G' = \Sigma \left(\frac{dX}{dv} \right)^2. \quad (3)$$

Troviamo ora le relazioni che esistono fra questi coefficienti E', F', G' dell'elemento lineare sferico, e le quantità M, N, P, Q che compariscono nelle formole (1).

Per questo osserviamo che uguagliando fra loro i due valori di $\frac{d^2 x}{du dv}$ tratti dalle due prime delle (1), e indicando con M'_u, M'_v, N'_u, \dots le derivate di M, N, \dots rispetto ad u e v , si ha la equazione

$$(M'_v - P'_u) \frac{dX}{du} + (N'_v - Q'_u) \frac{dX}{dv} + (M - Q) \frac{d^2 X}{du dv} + N \frac{d^2 X}{dv^2} - P \frac{d^2 X}{du^2} = 0, \quad (4)$$

e se ne avrebbero due simili in Y e Z considerando le altre equazioni (1);

e ora da queste, moltiplicandole una volta per X , Y , Z , un'altra per $\frac{dX}{du}$, $\frac{dY}{du}$, $\frac{dZ}{du}$, e un'altra infine per $\frac{dX}{dv}$, $\frac{dY}{dv}$, $\frac{dZ}{dv}$, e sommandole ogni volta col-
l'avere riguardo alle equazioni (3) e alle altre $\sum X \frac{dX}{du} = 0$, $\sum X \frac{dX}{dv} = 0$, non
che a quelle che si deducono da queste e dalle (3) con sole derivazioni,
si otterranno le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} (M - Q)F' + NG' - PE' &= 0, \\ (M'_v - P'_u)E' + (N'_v - Q'_u)F' + \frac{1}{2}(M - Q)\frac{dE'}{dv} - \frac{1}{2}P\frac{dE'}{du} + N\left(\frac{dF'}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dG'}{du}\right) &= 0, \\ (M'_v - P'_u)F' + (N'_v - Q'_u)G' + \frac{1}{2}(M - Q)\frac{dG'}{du} + \frac{1}{2}N\frac{dG'}{dv} - P\left(\frac{dF'}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE'}{dv}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

che sono quelle che volevamo stabilire, e delle quali parlavamo in principio.

2. Queste equazioni, nella ipotesi che E' , F' , G' appartengano ad una sfera di raggio $= 1$, e X , Y , Z siano le coordinate dei punti di questa sfera ecc., esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le equazioni (1) appartengano ad una superficie di cui X , Y , Z sono i coseni degli angoli che la normale fa coi tre assi. Per ciò che precede infatti, quando le (1) appartengano a una superficie, le equazioni (5) saranno sempre soddisfatte; e reciprocamente, se esse saranno soddisfatte, le equazioni (1), ove M , N , P , Q hanno i valori che compariscono nelle (5), apparterranno a una superficie di cui X , Y , Z sono i coseni degli angoli che la normale fa coi tre assi, giacchè in questo caso indicando con A , B , C i primi membri della equazione (4) e delle sue analoghe in Y e Z , avremo:

$$\sum AX = 0, \quad \sum A \frac{dX}{du} = 0, \quad \sum A \frac{dX}{dv} = 0;$$

e quindi, poichè il determinante formato coi coefficienti di A , B , C in queste equazioni non è nullo, avremo $A = B = C = 0$, e perciò le espressioni $\frac{d\omega}{du}du + \frac{d\omega}{dv}dv, \dots$ dedotte dalle (1) saranno differenziali esatti, e i loro integrali in conseguenza saranno le coordinate dei punti di una superficie di cui X , Y , Z saranno i coseni degli angoli che la normale fa cogli assi, giacchè si avrà $\sum X \frac{d\omega}{du} = 0$, $\sum X \frac{d\omega}{dv} = 0$.

3. Colle equazioni (4) poi, se saranno dati i valori di M , N , P e Q , si determineranno quelli di E' , F' , G' che le soddisfano; e quando questi appartengano alla sfera di raggio $=1$, esisteranno dei valori corrispondenti di X , Y , Z che si potranno trovare per mezzo della relazione $\Sigma X^2=1$ e delle (3) o (4), o per mezzo delle formole date dal prof. BRIOSCHI al § 4 della sua memoria: *Sulla teoria delle coordinate curvilinee*; e quindi, per quanto testè dicemmo, i valori dati di M , N , P e Q apparterranno a una superficie le cui equazioni si avranno subito dalle (1) quando si siano determinate X , Y e Z .

Viceversa, date le linee u e v sulla sfera, o dati E' , F' , G' , le equazioni (5) determinano tre delle quantità M , N , P , Q in funzione della quarta.

Notiamo poi che le equazioni (5) divengono molto più semplici quando si ha $E'=1$, $F'=0$, $G'=\cos^2 u$, cioè quando le linee coordinate v ed u sulla superficie sono tali che le linee corrispondenti sferiche costituiscono un sistema di meridiani e di paralleli, e sono in conseguenza le coordinate del BONNET.

Quando poi sia $N=P=0$, $F'=0$, cioè quando le linee coordinate u e v siano le linee di curvatura e che quindi M e Q siano i raggi di curvatura principali, le equazioni (5) si riducono alle relazioni note fra questi raggi di curvatura e i coefficienti E' e G' del corrispondente elemento lineare sferico.

4. Prima di passare alle applicazioni delle formole precedenti, è utile di fare alcune considerazioni sulle asintotiche della superficie S , che d'ora innanzi riterò a curvature opposte; e incomincerò perciò dal trovare la equazione di queste linee in funzione di M , N , P , Q , E' , F' e G' . Per questo, si osservi prima che, se si chiamano r_1 e r_2 i raggi di curvatura principali di S , e si chiama α l'angolo di una linea di S colla linea di curvatura cui corrisponde r_2 , e α' l'angolo delle linee corrispondenti sulla sfera, si ha (*):

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \alpha, \quad (6)$$

giacchè la superficie è a curvature opposte.

Ora per le asintotiche si ha, come è noto:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{r_1}{r_2},$$

(*) Vedi la mia memoria: *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie*. — Atti della Società Italiana dei XL, S. III, T. I, pag. 2.

quindi per queste linee sarà:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = 1, \quad (7)$$

e perciò $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}, \dots$; e quindi osservando che reciprocamente le linee per le quali α e α' soddisfano a queste condizioni sono le asintotiche, giacchè quando si ha la (7), la (6) ci dà $\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{r_1}{r_2}$, e osservando inoltre che nelle superficie a curvature opposte la rappresentazione sferica produce una inversione nelle figure, si potrà dire che le asintotiche delle superficie a curvature opposte sono le linee che nella rappresentazione sferica deviano di un angolo retto dalla direzione primitiva; e quindi esse hanno la seguente equazione differenziale:

$$dx dX + dy dY + dz dZ = 0;$$

che per le (1) e (3) si riduce all'altra

$$(ME' + NF') du^2 + \{ (M+Q)F' + PE' + NG' \} du dv + (PF' + QG') dv^2 = 0, \quad (8)$$

che è quella che volevamo stabilire, e che come vedremo ci sarà molto utile in questi studi.

5. Poichè le rappresentazioni sferiche delle asintotiche sono perpendicolari alle loro direzioni primitive, ne viene che le linee sferiche traiettorie ortogonali delle linee che corrispondono alle asintotiche di uno stesso sistema sono parallele alle asintotiche stesse. Se dunque per una asintotica si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{-\frac{r_1}{r_2}},$$

per la direzione sferica (β') che è perpendicolare alla rappresentazione sferica di questa asintotica si avrà:

$$\operatorname{tg} \beta' = -\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}};$$

e quindi, chiamando β l'angolo corrispondente su S , si avrà per la (6),

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{-\frac{r_1}{r_2}} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ma per la linea (α_1) perpendicolare all'asintotica (α) si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha = -1;$$

quindi, fra α_1 e β sussisterà la relazione :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta = -\frac{r_1}{r_2};$$

la quale ci mostra che le linee α_1 e β sono a tangenti conjugate, e ci permette perciò di dire che le direzioni a tangenti conjugate colla perpendicolare ad una asintotica hanno le loro rappresentazioni sferiche parallele a questa asintotica; o anche: le trasformate sferiche delle asintotiche di un sistema e quelle delle linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste asintotiche costituiscono un doppio sistema ortogonale.

6. Osservazione. Per questo teorema si può dire che, considerando su una superficie un sistema di asintotiche v e le linee u a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste asintotiche, se sarà data la direzione delle normali alla superficie lungo uno di questi due sistemi di linee u e v , la direzione delle stesse normali lungo l'altro sistema di linee risulterà pienamente determinata; e in particolare si può dire che nelle superficie gobbe a piano direttore le normali alla superficie lungo le linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali delle generatrici sono ugualmente inclinate sul piano direttore; e nelle superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono eliche appartenenti a cilindri paralleli fra loro, le normali lungo le linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste eliche sono parallele a dei piani fissi che passano per una retta parallela alle generatrici dei cilindri che contengono queste eliche; giacchè evidentemente in questo caso le normali alla superficie lungo una delle asintotiche fanno angoli costanti colle generatrici dei cilindri che contengono queste asintotiche.

Caso particolare

in cui le linee coordinate sulla superficie S sono le asintotiche.

APPLICAZIONI.

7. Fin qui abbiamo supposto che le coordinate u e v sulla superficie S fossero qualunque. Ora prenderemo a considerare alcuni sistemi di coordinate particolari, e incominceremo dal supporre che esse siano le asintotiche.

In questa ipotesi la equazione (8) delle asintotiche ci mostra che si devono avere le due equazioni:

$$ME' + NF' = 0, \quad PF' + QG' = 0. \quad (9)$$

Ora l'essere zero una delle tre quantità M , Q , F' porta che anche le altre due lo sieno; quindi escludendo per ora questo caso (che corrisponde alle superficie di area minima) e osservando che P ed N non possono essere zero, si avrà dalle precedenti:

$$(M - Q)F' + \frac{MQ}{NP}(NG' - PE') = 0;$$

e per questa e per la prima delle equazioni (5), siccome MQ non può essere eguale a NP , perchè $MQ - NP$ è il prodotto dei raggi di curvatura principali della superficie (*), si concluderà che deve essere $M = Q$.

Dunque in ogni caso, se le linee coordinate u e v sono le asintotiche, dovremo avere $M = Q$, e inoltre dovremo soddisfare alle (9) e alle due ultime delle (5), o a una delle (9) e alle (5), a meno che non sia $M = Q = F' = 0$, nel qual caso le (9) sono già soddisfatte ambedue, e restano da soddisfarsi tutte le (5).

8. Questi risultati conducono ad altri non meno notevoli, relativi essi pure al caso in cui le linee coordinate u e v sono le asintotiche.

In questo caso infatti, per quanto ora abbiamo detto, si ha sempre $M = Q$, e si hanno le equazioni:

$$ME' + NF' = 0, \quad PF' + MG' = 0, \quad NG' - PE' = 0;$$

quindi si avranno anche le seguenti:

$$\frac{N}{E'} = \frac{P}{G'} = -\frac{M}{F'};$$

e perciò chiamando λ il valore comune di questi rapporti, si avrà sempre:

$$N = \lambda E', \quad M = Q = -\lambda F', \quad P = \lambda G',$$

pei valori di N , M , Q , P .

(*) Nel caso generale l'equazione delle linee di curvatura delle superficie (1) (BERTRAND, *Calcul diff.* § 672) è la seguente:

$$Ndu^2 - (N - Q)dudv - Pdv^2 = 0;$$

e quella dei raggi di curvatura principali è l'altra:

$$\rho^2 - (M + Q)\rho + MQ - NP = 0.$$

Ma, essendo $-\mu^2$ la curvatura della superficie, si ha:

$$\frac{1}{\mu^2} = NP - M^2;$$

quindi, se poniamo:

$$E'G' - F'^2 = \Delta'^2,$$

sarà $\lambda = \frac{1}{\mu\Delta'}$, e perciò si avrà

$$N = \frac{E'}{\mu\Delta'}, \quad M = Q = -\frac{F'}{\mu\Delta'}, \quad P = \frac{G'}{\mu\Delta'} \quad (10)$$

pei valori di M , N , P e Q ; e le equazioni differenziali (1) della superficie diverranno ora le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(-F' \frac{dX}{du} + E' \frac{dX}{dv} \right), & \frac{dx}{dv} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(G' \frac{dX}{du} - F' \frac{dX}{dv} \right), \\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(-F' \frac{dY}{du} + E' \frac{dY}{dv} \right), & \frac{dy}{dv} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(G' \frac{dY}{du} - F' \frac{dY}{dv} \right), \\ \frac{dz}{du} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(-F' \frac{dZ}{du} + E' \frac{dZ}{dv} \right), & \frac{dz}{dv} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(G' \frac{dZ}{du} - F' \frac{dZ}{dv} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ove, come abbiamo detto, $-\mu^2$ è la curvatura della superficie e E' , F' , G' sono i coefficienti dell'elemento lineare sferico; e fra queste quantità μ , E' , F' e G' esistono soltanto le due relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu'_u}{\mu} &= \frac{-F' \frac{dE'}{dv} + E' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2}, \\ \frac{\mu'_v}{\mu} &= \frac{G' \frac{dE'}{dv} - F' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

cui si riducono ora le due ultime delle (5) ponendovi per M , N , P , Q i loro valori (10).

Queste relazioni poi risolte rispetto a $\frac{dE'}{dv}$ e a $\frac{dG'}{du}$ si trasformano nelle altre:

$$\frac{d \frac{E'}{\mu}}{dv} = F' \left(\frac{1}{\mu} \right)', \quad \frac{d \frac{G'}{\mu}}{du} = F' \left(\frac{1}{\mu} \right)', \quad (13)$$

che sono della massima semplicità.

9. Le relazioni (12) servono a determinare μ quando siano date convenientemente E' , F' e G' .

Da esse si vede che queste quantità E' , F' e G' (oltre alla relazione che proviene dall'essere esse i tre coefficienti dell'elemento lineare sferico) devono ora soddisfare alla relazione:

$$\frac{d}{dv} \left\{ \frac{F' \frac{dE'}{dv} - E' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2} \right\} = \frac{d}{du} \left\{ \frac{-G' \frac{dE'}{dv} + F' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2} \right\}; \quad (14)$$

e ora, poichè quando sia soddisfatta questa condizione e μ sia dedotto dalle (11) (ciò che allora può farsi), i valori (10) di M , N , P , Q soddisfano a tutte le condizioni (5) e (9), si conclude (§ 2) che essendo dati sulla sfera due sistemi di linee per le quali sia soddisfatta la condizione (14), esse corrisponderanno alle asintotiche di una superficie la cui curvatura si determinerà per mezzo delle formole (12), e le cui equazioni si avranno con sole quadrature per mezzo delle formole (11).

Invece, quando sia data la curvatura $-\mu^2$ della superficie in funzione dei parametri u e v delle asintotiche, le (12) o (13) insieme alla condizione che esprime che E' , F' , G' appartengono a una sfera di raggio $=1$, serviranno a determinare queste quantità E' , F' e G' ; e quando si riesca a trovare i valori di X , Y , Z che corrispondono a questi valori di E' , F' e G' , le (11) serviranno a dare (con sole quadrature) le equazioni delle superficie di cui $-\mu^2$ è la curvatura, le linee u e v sono le asintotiche e X , Y , Z sono i coseni degli angoli della normale alla superficie coi tre assi.

10. Le formole che qui ho date contengono tutte i coefficienti dell'elemento lineare sferico. Volendo introdurvi invece quelli dell'elemento lineare della superficie, basta osservare (v. mia mem. cit.) che nella rappresentazione di una superficie sulla sfera gli archi elementari delle asintotiche vengono variati nello stesso rapporto in ogni punto, e il loro angolo si muta nell'angolo supplementare. Da questa osservazione infatti (come anche può vedersi ricavando dalle (11) l'elemento lineare della superficie S) si deduce subito che, se

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2$$

è l'elemento lineare sferico, quello

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

della superficie è:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu^2} (E' du^2 - 2F' du dv + G' dv^2);$$

e si ha perciò:

$$E = \frac{E'}{\mu^2}, \quad F = -\frac{F'}{\mu^2}, \quad G = \frac{G'}{\mu^2}; \quad (15)$$

e dietro queste formole, le precedenti possono ridursi a contenere E, F, G in luogo di E', F' e G' , e in particolare le (13) possono ridursi alle altre:

$$\frac{d(E\mu)}{dv} = F\mu'_u, \quad \frac{d(G\mu)}{du} = F\mu'_v. \quad (16)$$

11. Le formole che abbiamo stabilite in questi ultimi paragrafi pel caso che le coordinate u e v siano le asintotiche, conducono a delle conseguenze notevoli relative alle superficie di curvatura costante negativa e a quelle di area minima.

1.° Supponendo che le superficie che si considerano siano quelle di curvatura costante negativa $-\mu^2$, si vede dalle (13) che possiamo prendere $E' = G' = 1$; e questo, dandoci $E = G = \frac{1}{\mu^2}$, $F = -\frac{F'}{\mu^2}$, ci fa concludere che nelle superficie di curvatura costante negativa $-\mu^2$, le asintotiche sono tali che prese per coordinate u e v riducono l'elemento lineare della superficie alla forma

$$ds^2 = \frac{du^2 - 2F' du dv + dv^2}{\mu^2},$$

essendo F' una funzione tale che

$$ds'^2 = du^2 + 2F' du dv + dv^2 \quad (17)$$

è il corrispondente elemento lineare sferico; e questo mostra che nelle superficie di curvatura costante negativa le asintotiche dividono la superficie in losanghe infinitamente piccole, e inoltre se s'intende che le distanze siano contate lungo le asintotiche di uno stesso sistema, si può anche dire che due qualunque delle asintotiche dell'altro sistema sono in tutti i punti equidistanti. Lo stesso avviene delle linee corrispondenti sferiche.

Inoltre è da notare che, per ciò che precede, si può dire che trovate sulla sfera le linee u e v per le quali si ha la (17) e trovati i valori corrispondenti di X, Y, Z , le equazioni integrali delle superficie di curvatura co-

stante negativa $-\mu^2$ si otterranno con sole quadrature per mezzo delle (11); e con ciò la ricerca delle superficie di curvatura costante negativa viene ridotta a quella di tre funzioni X, Y, Z che soddisfano alle tre equazioni simultanee:

$$\Sigma X^2 = 1, \quad \Sigma \left(\frac{dX}{du} \right)^2 = 1, \quad \Sigma \left(\frac{dX}{dv} \right)^2 = 1.$$

12. 2.° Supponendo $F' = 0$ o $F = 0$, siamo nel caso delle superficie di area minima, e le (13) ci mostrano che in questo caso si può sempre prendere $E' = G' = \mu$, con μ tale soltanto che E' e G' appartengano alla sfera di raggio $= 1$; e poichè questo porta per le (15) che $E = G = \frac{1}{\mu}$, si ritrova così che in queste superficie le asintotiche sono ortogonali e isoterme, e le linee corrispondenti sferiche possono essere uno qualunque dei doppi sistemi ortogonali e isotermi della sfera.

Ora i sistemi di linee ortogonali e isoterme della sfera possono dirsi conosciuti, e possiamo dire di conoscere i valori delle coordinate X, Y, Z dei punti della sfera in funzione dei parametri isometrici u e v di queste linee; quindi, supponendo che per questi valori di X, Y, Z il quadrato dell'elemento lineare sferico sia:

$$ds'^2 = \mu^2 (du^2 + dv^2),$$

si può dire, per le (14), che le equazioni delle superficie di area minima in funzione dei parametri isometrici u e v delle asintotiche sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{dX}{dv} du + \frac{dX}{du} dv \right), \\ y &= \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{dY}{dv} du + \frac{dY}{du} dv \right), \\ z &= \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{dZ}{dv} du + \frac{dZ}{du} dv \right), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ove X, Y, Z sono presi nel modo che abbiamo detto.

13. Per essere poi $E = G = \frac{1}{\mu}$ quando $E' = G' = \mu$, e viceversa, si conclude che l'elemento lineare delle superficie di area minima, quando le coordinate u e v sono le asintotiche, è dato dalla formola:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu} (du^2 + dv^2)$$

ove μ è tale che l'espressione

$$\mu(du^2 + dv^2),$$

appartiene alla sfera di raggio $=1$; e si può dire inoltre che affinchè una superficie sia applicabile su una di area minima è necessario e sufficiente che esistano su essa due sistemi di linee ortogonali e isoterme tali che, se con esse si ha:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu}(du^2 + dv^2),$$

l'espressione

$$\mu(du^2 + dv^2)$$

appartenga alla sfera di raggio $=1$.

È poi da notare che nelle superficie di area minima, nelle attuali coordinate u e v , le equazioni delle linee di curvatura sono le seguenti:

$$u + v = \text{cost.}, \quad u - v = \text{cost.}$$

14. Inoltre è da osservare che, avendo le equazioni generali (18) delle superficie di area minima in funzione dei parametri u e v delle asintotiche e delle loro rappresentazioni sferiche, se vogliamo quelle fra queste superficie nelle quali le asintotiche godono di proprietà speciali che si riducono a proprietà delle linee sferiche che le rappresentano, basta porre nelle (18) per X, Y, Z, μ i valori corrispondenti alle variabili isometriche u e v , che vogliamo che rappresentino le asintotiche.

Così volendo le superficie di area minima nelle quali le asintotiche sono ellissi e iperbole geodetiche, e riducono per conseguenza l'elemento lineare della superficie alla forma:

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

ove U è una funzione di u e V una funzione di v soltanto, basterà cercare le linee della sfera per le quali si ha:

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{U + V},$$

e porre poi nelle (10) per X, Y, Z i valori corrispondenti.

Volendo le superficie di area minima nelle quali le asintotiche sono eliche, si osserverà che quando le asintotiche di una superficie sono eliche le loro rappresentazioni sferiche sono piccoli cerchi e viceversa; e quindi per avere le dette superficie basterà porre nelle (18) per X, Y, Z, μ i valori (noti)

che esse hanno quando si esprimono in funzione dei parametri isometrici u e v di due sistemi di cerchi ortogonali.

È chiaro poi che nelle superficie di area minima, se le asintotiche di un sistema sono eliche, quelle dell'altro sistema saranno pure eliche, giacchè nella rappresentazione sferica le linee corrispondenti alle asintotiche sono ortogonali e isoterme, e quindi se le linee dell'un sistema sono circolari, anche le altre sono circolari; e inoltre le generatrici dei cilindri che contengono le eliche di uno stesso sistema sono parallele a un piano fisso, e i due piani sono perpendicolari l'uno all'altro.

15. Se poi ricordiamo che, per un teorema del BONNET, ad ogni superficie di area minima ne corrisponde un'altra della stessa specie che è applicabile sovr'essa; e i punti di due superficie così conjugate si corrispondono in modo che alle linee di curvatura dell'una corrispondono le asintotiche dell'altra, e le normali delle due superficie nei punti corrispondenti sono parallele, si potrà dire evidentemente che, se nell'una di queste superficie le linee di curvatura sono piane, nella superficie conjugata le asintotiche sono eliche.

È facile poi di vedere che fra le superficie di area minima che hanno per asintotiche delle eliche, ne esistono alcune che hanno al tempo stesso le linee di curvatura piane, e quindi godono della proprietà che colla deformazione possono ridursi ad altre superficie di area minima dotate delle stesse proprietà.

Osserviamo infatti che, se le linee asintotiche u e v della superficie di area minima che consideriamo sono eliche, l'elemento lineare sferico corrispondente sarà:

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2}, \quad (19)$$

ove U e V sono tali che si abbia:

$$UU'' - U'^2 + VV'' - V'^2 + UV'' + U''V = 1.$$

Ora, oltre a potere soddisfare a questa equazione per mezzo di valori di U e V che contengono delle esponenziali, si può anche soddisfarvi col prendere

$$U = Au^2 + B, \quad V = Av^2 + C, \quad (20)$$

ove $4A(B + C) = 1$; e per questi valori di U e V si ha:

$$ds'^2 = \left\{ \frac{4A}{4A^2(u^2 + v^2) + 1} \right\}^2 (du^2 + dv^2),$$

e si ha quindi anche:

$$ds'^2 = \left\{ \frac{4A}{4A^2(u_1^2 + v_1^2) + 1} \right\}^2 (du_1^2 + dv_1^2),$$

quando si fa $u + v = u_1 \sqrt{2}$, $u - v = v_1 \sqrt{2}$, cioè quando si prendono per coordinate le linee u_1 e v_1 che corrispondono a quelle di curvatura; e questo mostra chiaramente che, nelle superficie di area minima cui corrispondono i valori (20) di U e V , le asintotiche sono eliche e le linee di curvatura sono piane, ecc.

Volendo poi le equazioni di queste superficie speciali di area minima, basta porre nelle (18) per X, Y, Z, μ i valori corrispondenti in funzione dei parametri isometrici u e v pei quali si hanno sulla sfera le formole (19) e (20), e che si possono trovare facilmente, servendosi delle formole che ho dato al § 38 della mia memoria citata.

**Caso in cui le linee coordinate di un sistema sono asintotiche,
e le altre sono le linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali
di queste asintotiche.**

APPLICAZIONI.

16. Fin qui abbiamo supposto che i due sistemi di linee coordinate siano le asintotiche. Se ora supponiamo che soltanto le v siano asintotiche, per la (8) si avrà $ME' + NF' = 0$; e se di più supponiamo che le linee u siano quelle a tangenti conjugate colle perpendicolari a queste asintotiche, si avrà (§ 5) $F' = 0$, e quindi $M = 0$; e viceversa se $M = F' = 0$, le linee coordinate u e v saranno quelle che abbiamo detto (*).

In questo caso le equazioni (5) si riducono alle altre più semplici:

$$\left. \begin{aligned} NG' &= PE' \\ P'_u E' + \frac{1}{2} Q \frac{dE'}{dv} + \frac{1}{2} P \frac{dE'}{du} + \frac{1}{2} N \frac{dG'}{du} &= 0 \\ (N'_v - Q'_v) G' - \frac{1}{2} Q \frac{dG'}{du} + \frac{1}{2} N \frac{dG'}{dv} + \frac{1}{2} P \frac{dE'}{dv} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(*) Se invece si prendessero per linee coordinate v e u sulla superficie le asintotiche di un sistema e le loro traiettorie ortogonali, servendosi delle (1) si troverebbe che oltre ad aversi $ME' + NF' = 0$, si dovrebbe avere $Q = 0$.

e poichè da queste si vede che per ogni sistema di valori di E' e G' esistono dei valori corrispondenti per le quantità N , P , Q , si conclude che esistono sempre delle superficie che ammettono un sistema di asintotiche che hanno per rappresentazioni sferiche delle linee date, o, in altri termini, esistono sempre delle superficie tali che le normali ad esse lungo un sistema di asintotiche siano parallele alle generatrici di un sistema di coni dati.

17. Per la (8) e per le (21) si vede che nelle attuali coordinate, le asintotiche del secondo sistema hanno la seguente equazione differenziale:

$$2Ndu + Qdv = 0. \quad (22)$$

Indicando poi con

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 \quad (23)$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie, e avendo riguardo alle equazioni (1) e (21) e all'essere ora $M = F' = 0$, si ha:

$$E = N^2 G' = NPE', \quad F = NQG = PQE', \quad G = P^2 E' + Q^2 G' = (NP + Q^2) G', \quad (24)$$

e quindi sarà

$$ds^2 = G'(Ndu + Qdv)^2 + NP G' dv^2, \quad (25)$$

il quadrato dell'elemento lineare delle superficie, e la equazione

$$Ndu + Qdv = 0 \quad (26)$$

rappresenterà le traiettorie ortogonali delle asintotiche v .

Siccome poi le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_v}$, $\frac{1}{\rho_t}$ delle linee v e delle loro traiettorie ortogonali sulla superficie (23) sono:

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ (\sqrt{E})'_v - \left(\frac{F}{\sqrt{E}} \right)'_u \right\}, \quad \frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \right)'_u,$$

nel nostro caso sarà:

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{NP\sqrt{E'G'}} \left\{ (N\sqrt{G'})'_v - (Q\sqrt{G'})'_u \right\}, \quad \frac{1}{\rho_t} = \frac{(P\sqrt{E'})'_u}{NP\sqrt{E'G'}} = \frac{(\log P\sqrt{E'})'_u}{N\sqrt{G'}}; \quad (27)$$

e si può perciò notare in particolare che le superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono traiettorie ortogonali di un sistema di geodetiche

sono quelle per le quali $P\sqrt{E'}$ è una funzione V della sola v , ciò che porta per le (21), che in questo caso si ha:

$$P = \frac{V}{\sqrt{E'}}, \quad Q = V \frac{\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}}{\frac{d \sqrt{E'}}{dv}}, \quad N = V \sqrt{\frac{E'}{G'}},$$

e E' e G' devono soddisfare alla equazione che viene dalla terza delle (21) ponendovi per N , P e Q questi valori.

18. Premesse queste formole, passiamo a farne l'applicazione alle superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono eliche appartenenti a cilindri paralleli, e alle superficie gobbe.

Incominciando dalle prime di queste superficie, osserveremo che se si suppongono i cilindri paralleli all'asse delle x , si avrà:

$$X = \cos v, \quad Y = \cos u \sin v, \quad Z = \sin u \sin v,$$

e sarà perciò:

$$E' = \sin^2 v, \quad G' = 1,$$

e le equazioni (21) si ridurranno ora alle seguenti:

$$N = P \sin^3 v, \quad P'_u + Q \cot v = 0, \quad N'_v - Q'_u + P \sin v \cos v = 0.$$

Per integrare queste equazioni osserviamo che la terza ci dà:

$$(N \sin v)'_v = (Q \sin v)'_u,$$

e ci mostra che si ha:

$$N \sin v = \frac{d\theta}{du}, \quad Q \sin v = \frac{d\theta}{dv},$$

ove θ è una certa funzione di u e v .

Per queste le due prime ci danno:

$$P = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\sin^3 v}, \quad \frac{d^2\theta}{du^2} = -\sin v \cos v \frac{d\theta}{dv};$$

e quindi si conclude che, trovata la funzione θ per la quale si ha: —

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin v \cos v \frac{d\theta}{dv} = 0, \quad (29)$$

sarà:

$$N = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\operatorname{sen} v}, \quad Q = \frac{\frac{d\theta}{dv}}{\operatorname{sen} v}, \quad P = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\operatorname{sen}^3 v}; \quad (30)$$

e per le (1), le equazioni delle superficie cercate saranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\theta, \\ y &= \int \left\{ \cos u \cot v \frac{d\theta}{du} du + \left(-\frac{d\theta}{du} \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 v} + \frac{d\theta}{dv} \cos u \cot v \right) dv \right\}, \\ z &= \int \left\{ \operatorname{sen} u \cot v \frac{d\theta}{du} du + \left(\frac{d\theta}{du} \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 v} + \frac{d\theta}{dv} \operatorname{sen} u \cot v \right) dv \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

19. Ora ponendo:

$$t = -\int \frac{dv}{\operatorname{sen} v \cos v} = \log \cot v, \quad (32)$$

e prendendo t per variabile, la equazione (29) che determina la funzione ausiliaria θ si riduce all'altra:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{d\theta}{dt}, \quad (33)$$

che è quella che si presenta nella teoria del calore, quando si hanno da determinare le temperature variabili di uno spazio rettangolare nel quale le temperature dipendono soltanto da una coordinata e dal tempo, o quelle del solido compreso fra due sfere concentriche, quando le temperature dipendono soltanto dalla distanza dal centro e dal tempo; quindi la nostra ricerca è ridotta alla risoluzione di un problema della teoria del calore, e a completarla non ci resta ora che prendere per la funzione θ i valori che già sono stati dati per essa nei trattati sul calore (RIEMANN, *Partielle Differentialgleichungen*, ecc., dal § 49 al § 69 inclusive. — BETTI, *Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi e omogenei*: Atti della Società Italiana, S. III, T. I, P. II, ecc.)

20. Questi valori di θ sono determinati quando sono date alcune condizioni ai limiti, come per es.: quando è dato θ lungo una linea t e lungo una linea u , o quando è dato θ lungo una linea t e lungo due linee u .

Nel primo caso, supposto che si debba avere:

$$\begin{aligned} \theta &= f(u) \quad \text{per} \quad t = t_0 \\ \theta &= \phi(t) \quad \text{per} \quad u = \alpha, \end{aligned}$$

e supposto $u > \alpha$, $t > t_0$, RIEMANN dà pel valore di θ (§ 63):

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \int_0^\infty f(\lambda) d\lambda \left(e^{\frac{(u-\alpha-\lambda)^2}{4(t-t_0)}} - e^{-\frac{(u-\alpha+\lambda)^2}{4(t-t_0)}} \right) + \right. \\ \left. + (u-\alpha) \int_0^{t-t_0} \phi(\lambda) d\lambda e^{-\frac{(u-\alpha)^2}{4(t-t_0-\lambda)}} (t-t_0-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \right\}, \quad (34)$$

e supponendo poi in particolare:

$$t_0 = \alpha = f(u) = 0, \quad \phi(t) = \sum_m \rho_m \cos(m\nu t - \lambda_m),$$

con m intero e ρ_m , ν , e λ_m quantità costanti, RIEMANN trova:

$$\theta = \sum \rho_m e^{-u\sqrt{\frac{m\nu}{2}}} \cos\left(m\nu t - \lambda_m - u\sqrt{\frac{m\nu}{2}}\right).$$

Nel secondo caso, supponendo che si debba avere:

$$\theta = f(u) \quad \text{per} \quad t = t_0,$$

$$\theta = \phi(t) \quad \text{per} \quad u = \alpha,$$

$$\theta = \psi(t) \quad \text{per} \quad u = \beta,$$

e applicando le formole date dal prof. BETTI (l. c.), si trova:

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_\alpha^\beta \omega_{\lambda=t_0} f(\mu) d\mu + \int_{t_0}^t \left\{ \psi(\lambda) \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)_\beta - \phi(\lambda) \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)_\alpha \right\} d\lambda, \quad (35) \right.$$

ove si suppone $t > t_0$, $\beta > u > \alpha$, e

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta - \alpha} \left\{ \Theta_{00} \left(\frac{\mu - u}{2(\beta - \alpha)}, \frac{\pi i(t - \lambda)}{(\beta - \alpha)^2} \right) - \Theta_{00} \left(\frac{2\beta - \mu - u}{2(\beta - \alpha)}, \frac{\pi i(t - \lambda)}{(\beta - \alpha)^2} \right) \right\},$$

essendo Θ_{00} una funzione Jacobiana definita dalla equazione

$$\Theta_{00}(z, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\omega + 2nz)}$$

RIEMANN dà un'altra espressione per la funzione u che si può ridurre a quella qui data del prof. BETTI.

Oltre poi a dare per θ le condizioni ai limiti poste disopra, si potrebbero dare le altre che θ lungo una linea t o lungo una linea u prendesse dati

valori, e lungo un'altra linea u soddisfacesse alla condizione $\frac{d\psi}{du} = h(\theta - \xi)$ ove h è una costante, e ξ una funzione nota di u . Anche per questo caso può vedersi il RIEMANN e la memoria del prof. BETTI: *Sulla determinazione delle temperature variabili di un cilindro*.

Osservando poi che il valore (34) di u si annulla per $t = \infty$, e la funzione

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{t}} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1 + \frac{1}{t}}$$

è uguale a 1 per $t = \infty$, e uguale a zero per gli altri valori positivi di t , si conclude anche che la funzione

$$F(u) \left\{ \frac{t}{1 + \frac{1}{t}} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{1 + \frac{1}{t}} \right\} + \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda \left(e^{-\frac{(u-\alpha-\lambda)^2}{4(t-t_0)}} - e^{-\frac{(u-\alpha+\lambda)^2}{4(t-t_0)}} \right) + \right. \\ &\left. (u-\alpha) \int_0^{t-t_0} \phi(\lambda) d\lambda e^{-\frac{(u-\alpha)^2}{4(t-t_0-\lambda)}} (t-t_0-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ove $f(\lambda)$ e $\phi(\lambda)$ non divengono mai infinite, e t_0 si suppone ora positivo o nullo per tutti i valori positivi di t ad eccezione di quello $t = \infty$, soddisfa alla equazione (33); per $t = \infty$ prende il valore $F(u)$, per $t = t_0$ il valore $f(u)$ e per $u = \alpha$ il valore $\phi(t)$.

Ponendo al posto della prima parte l'espressione $au + b$ si ha una funzione che soddisfa sempre alla (33), per $t = \infty$ prende il valore $au + b$ per $t = t_0$ il valore $f(u) + au + b$, e per $u = \alpha$ il valore $\phi(t) + a\alpha + b$.

21. Osservazione I. È da notare che volendo che le variabili restino reali anche quando v è maggiore di $\frac{\pi}{2}$, bisogna intendere che il valore (32) di t è sempre la parte reale di $\log \cot v$; e così, andando sulla sfera dall'equatore a uno dei poli, t va sempre da $-\infty$ a ∞ ; e servendosi, per esempio, della (34) il valore che si avrà da questa per θ varrà pel punto $\left(u, \frac{\pi}{2} - v\right)$ della sfera situato da una parte dell'equatore e pel punto $\left(u, \frac{\pi}{2} + v\right)$ situato dall'altra parte.

Osservazione II. Per le (26) e (30) le traiettorie ortogonali delle asintotiche v hanno per equazione $\theta = \text{cost}$; e quindi per la (31) si può dire che in queste superficie le traiettorie ortogonali delle asintotiche v sono curve piane e situate in piani paralleli fra loro e perpendicolari all'asse delle eliche v . Prendendo poi per coordinate sulla superficie le linee v e θ , il suo elemento lineare (25) si riduce alla forma

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{\sin^2 v} + \frac{\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2}{\sin^4 v} dv^2, \quad (37)$$

ove $\frac{d\theta}{du}$ s'intende qui espresso per θ e v .

22. Passiamo ora a cercare alcune superficie speciali della classe (31) che qui consideriamo.

1.° Volendo le superficie nelle quali una asintotica del secondo sistema taglia ortogonalmente quelle del primo, osserveremo che in questo caso, essa dovrà essere al tempo stesso una delle linee θ , e una delle linee u , e perciò (oss. prec.) sarà rettilinea e si avrà per essa $\theta = \text{cost}$ e $u = \text{cost}$; e quindi supponendo che questa linea sia la $u=0$, e per essa si abbia $\theta=0$, basterà fare $\alpha = \phi(\lambda) = 0$ nella (34) per avere il valore di θ corrispondente.

Se due asintotiche del secondo sistema dovessero essere traiettorie ortogonali delle asintotiche v , e queste fossero quindi le linee $u=\alpha$, $u=\beta$, basterebbe fare $\psi(t) = \text{cost}$, $\phi(t) = \text{cost}$ nella formola (35).

2.° Volendo le superficie della classe (31) nelle quali le asintotiche v sono traiettorie ortogonali di un sistema di geodetiche, si osserverà che, per ciò che precede, queste geodetiche dovranno essere linee piane e situate in piani paralleli fra loro, e non potendo essere di curvatura dovranno essere rettilinee, e la superficie sarà l'elicoide gobbo di area minima.

Ciò del resto risulta anche dal dovere essere ora (§ 17) $P\sqrt{E'}$ e quindi $\frac{d\theta}{du}$ una funzione della sola v ; giacchè questo porta per la (29) che $\frac{d\theta}{dv} = 0$, e quindi $Q = 0$.

3.° Volendo le superficie della nostra classe nelle quali uno dei raggi di curvatura è una funzione dell'altro, si osserverà che, essendo Q la somma dei raggi di curvatura, e NP il loro prodotto, queste superficie non potranno trovarsi che fra quelle delle due classi

$$NP = \text{cost}; \quad Q = f(\sqrt{NP})$$

Ora, se fosse $NP = \text{cost}$, $\frac{d\theta}{du}$ non conterebbe u , e quindi per la (29) si avrebbe $\frac{d\theta}{dv} = 0$, e $\theta = \text{cost}$; dunque ci dobbiamo limitare al caso in cui sia $Q = f(\sqrt{NP})$, ovvero per le (29) e (30):

$$\frac{\frac{d^2\theta}{du^2}}{\text{sen}^2 v} = \cos v f' - \left(\frac{\frac{d\theta}{du}}{\text{sen}^2 v} \right).$$

Ora, escludendo il caso di $\frac{d^2\theta}{du^2} = 0$ che corrisponde ancora all'elicoide di area minima, perchè fosse verificata la precedente si vede che dovrebbe essere:

$$\theta = \frac{\text{sen}^2 v}{\cos v} F(u \cos v + V) + V_1,$$

essendo F una funzione di $u \cos v + V$, e V e V_1 funzioni di v .

Ma per questo valore di θ la (29) darebbe:

$$F'' + 2F + \text{tg}^2 v F - F' \text{tg} v (u \text{sen} v - V') + \frac{V'}{\text{sen} v} = 0,$$

e questa ponendo $u \cos v + V = p$, e prendendo p per variabile invece di u , e derivando rapporto a p , ci darebbe l'altra:

$$F''' + 2F' + F'' \text{tg} v (p \text{tg} v - V \text{tg} v + V') = 0,$$

la quale porterebbe che si avesse $F''' = 0$, o che l'espressione

$$\text{tg} v (p \text{tg} v - V \text{tg} v + V')$$

fosse indipendente da v .

Ma quest'ultima condizione non può soddisfarsi, e così avviene anche dell'altra $F'' = 0$, perchè questa porterebbe anche $F' = 0$, e θ non conterebbe nè u nè v ; dunque anche in questo caso si trova soltanto il solito elicoide di area minima.

4.º Volendo che le asintotiche v siano eliche circolari, bisogna che la loro curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ sia costante lungo di esse; e poichè dalla (26) si ha ora:

$$\frac{1}{\rho_v} = - \frac{\text{sen} v \cos v}{\frac{d\theta}{du}}, \quad (37)$$

si vede di qui che deve aversi $\frac{d^2\theta}{du^2}=0$, e questo porta $\frac{d\theta}{dv}=0$, e siamo ancora nel caso dell'elicoide gobbo di area minima.

5.° Vogliansi ora le superficie della nostra classe nelle quali le eliche v sono eliche cilindro-coniche.

Osserviamo perciò che per la (37) il raggio di curvatura delle nostre eliche v è:

$$\rho_v = - \frac{\frac{d\theta}{du}}{\operatorname{sen} v \cos v},$$

e per la (25) il loro arco elementare è:

$$ds_v = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\operatorname{sen} v} du;$$

e quindi poichè per le eliche cilindro-coniche il rapporto $\frac{ds_v}{d\rho_v}$ è costante lungo di esse e diverso da zero, si concluderà che per le superficie cercate si deve avere:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = V \frac{d\theta}{du},$$

ove V è una funzione di v che non è zero; e quindi sarà:

$$\theta = V_1 e^{Vu} + V_2,$$

ove V_1 e V_2 sono altre funzioni di v .

Sostituendo nella (29) si trova che V_2 deve essere una costante che può prendersi uguale a zero; V deve essere un'altra costante c , e V_1 deve essere $b \cot^{c^2} v$ ove b è un'altra costante; quindi per le superficie cercate si avrà:

$$\theta = b e^{cu} \cot^{c^2} v; \quad (38)$$

e le loro equazioni (37) saranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= -b e^{cu} \cot^{c^2} v, \\ y &= b c e^{cu} \cot^{1+c^2} v \frac{\operatorname{sen} u + c \cos u}{1+c^2}, \\ z &= b c e^{cu} \cot^{1+c^2} v \frac{-\cos u + c \operatorname{sen} u}{1+c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ovvero:

$$\left. \begin{aligned} x &= -b\tau^{c^2} e^{cu}, \\ y &= b \operatorname{sen} \alpha \tau^{1+c^2} e^{cu} \operatorname{sen} u, \\ z &= b \operatorname{sen} \alpha \tau^{1+c^2} e^{cu} \cos u, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

quando si ponga $c = \operatorname{tg} \alpha$, e $\cot v = \tau$, e si cangi u in $u - x$, e b in $b e^{c^2 x}$.

Da queste si ricava facilmente la equazione:

$$y^2 + z^2 = x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \tau^2,$$

che è quella del cono circolare retto che contiene le eliche v . Dividendo la seconda per la terza si trova la equazione:

$$y = z \operatorname{tg} u;$$

la quale ci mostra che in queste superficie le linee u a tangenti conjugate colle perpendicolari alle eliche v sono esse pure piane, e i loro piani passano tutti per l'asse delle eliche e sono quindi normali a quelli delle traiettorie ortogonali di queste eliche. Queste linee u sono algebriche quando c è commensurabile. L'origine è un punto singolare della superficie nel quale i raggi di curvatura sono zero. Per esso passano tutte le linee u e le v .

È poi da osservare che per le (22) e (28) le asintotiche dell'altro sistema in questa superficie hanno la seguente equazione:

$$2u + c \log \tau = k$$

ove k è una costante arbitraria.

Così anche le equazioni delle linee di curvatura sono subito integrabili.

Infine, per la (36), ponendo ancora $\cot v = \tau$, si trova che l'elemento lineare delle attuali superficie in coordinate τ e θ prende la forma:

$$ds^2 = (1 + \tau^2) d\theta^2 + c^2 \theta^2 d\tau^2;$$

donde si deduce che in queste superficie le asintotiche v e le loro traiettorie ortogonali costituiscono un doppio sistema isoterma.

23. Passiamo ora a dare delle applicazioni delle formole dei § 16 e 17 alle superficie gobbe.

A tal uopo osserviamo che in questo caso dovendo essere le linee v sulla sfera cerchi massimi, e le linee u traiettorie ortogonali di questi cerchi, i valori di X, Y, Z saranno quelli che ho dati nella mia memoria *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane* (Annali del-

l'Univ. di Pisa, tom. XI, § 8), e si possono scegliere le variabili u e v in modo che l'elemento lineare sferico abbia la forma:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2(u - W) dv^2,$$

ora W è una funzione (arbitraria) di v .

Ora essendo in questo caso $E' = 1$, $G' = \operatorname{sen}^2(u - W)$, le equazioni (21) si riducono alle altre:

$$P = N \operatorname{sen}^2(u - W), \quad P'_u = -N \operatorname{sen}(u - W) \cos(u - W), \\ [N \operatorname{sen}(u - W)]'_v = [Q \operatorname{sen}(u - W)]'_u;$$

e con queste si trova facilmente:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)}, & N &= \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)}, \\ Q &= \frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ove V e V_1 sono funzioni arbitrarie di v ; e perciò si conclude che le equazioni delle superficie gobbe sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int \left\{ \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)} \frac{dX}{dv} du + \left[\frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \frac{dX}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \frac{dX}{dv} \right] dv \right\}, \\ y &= \int \left\{ \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)} \frac{dY}{dv} du + \left[\frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \frac{dY}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \frac{dY}{dv} \right] dv \right\}, \\ z &= \int \left\{ \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)} \frac{dZ}{dv} du + \left[\frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \frac{dZ}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \frac{dZ}{dv} \right] dv \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ove X , Y , Z sono presi nel modo che abbiamo detto.

24. In queste superficie l'equazione delle asintotiche del secondo sistema è per le (22) e (41):

$$\frac{2V}{\operatorname{sen}^2(u - W)} du + \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v dv = 0. \quad (43)$$

L'equazione delle traiettorie ortogonali delle generatrici è per la (26):

$$V_1 - V \cot(u - W) = t \quad (44)$$

ove t è una costante; e per la (25) il quadrato dell'elemento lineare della superficie in coordinate v e t è:

$$ds^2 = dt^2 + \frac{V^2}{\operatorname{sen}^2(u - W)} dv^2 = dt^2 + \{ (t - V_1)^2 + V^2 \} dv^2. \quad (45)$$

Di qui risulta che le superficie corrispondenti a uno stesso valore di V^2 e V'_1 o di $\pm V$ e $V_1 + k$ ove k è una costante, sono tutte applicabili l'una sull'altra, qualunque sia W ; e quindi per un teorema del BONNET, si conclude che lasciando fermi i valori di V^2 e V'_1 e variando i valori di X , Y , Z e W in modo che i cerchi v sulla sfera vengano ad essere tutti i sistemi distinti di cerchi massimi della stessa sfera, le equazioni (42) daranno una classe completa di superficie gobbe applicabili l'una sull'altra; e da questo poichè col variare di X , Y , Z in tutti i modi possibili varia in simil modo il cono direttore della superficie, si deduce subito il teorema di BOUR che una superficie gobba può sempre deformarsi in modo che le sue generatrici vengano parallele a quelle di un cono dato qualunque.

Notiamo poi che dal valore precedente di ds^2 si deduce subito che $\frac{1}{V}$ e il parametro di distribuzione dei piani tangenti, e la linea che ha per equazione $u = W + \frac{\pi}{2}$ è la linea di stringimento della superficie.

Sulla sfera dunque la linea di stringimento viene rappresentata da quella linea che dicesi linea di stringimento dei cerchi massimi che rappresentano le generatrici.

Dalla (43) poi risulta che, onde la linea di equazione $u = \phi(v)$ sia una asintotica, bisogna che fra W , V , V_1 e $\phi(v)$ sussista la relazione:

$$\{V \cot(\phi - W)\}' - V'_1 - \frac{V\phi'}{\sin^2(\phi - W)} = 0$$

che, ponendo $V \cot(\phi - W) = \eta$, si riduce all'altra:

$$\eta' - V'_1 - V\phi' - \frac{\eta^2 \phi'}{V} = 0;$$

e poichè quando sono dati V , V_1 e ϕ , esiste sempre una funzione W che soddisfa a questa relazione, si conclude di qui che (*) una superficie gobba può sempre deformarsi in modo che una sua linea qualunque divenga asintotica, senza che la superficie cessi per questo di esser gobba.

In particolare dunque la sua linea di stringimento può sempre ridursi ad essere una asintotica della superficie, e una sua geodetica qualunque può

(*) Questi teoremi ed altri che potremmo dedurre dalle nostre formole sono stati dati dal prof. BELTRAMI nella sua memoria *Sulla flessione delle superficie rigate*: Annali di Matematica, 1^a serie, tom. VII.

sempre ridursi ad essere rettilinea; e quando la linea di stringimento sia divenuta una asintotica si avrà

$$W = - \int \frac{V'_1}{V} dv.$$

25. Quando $W = \text{cost}$: le linee u e v sulla sfera costituiscono un sistema di paralleli e di meridiani, e siamo evidentemente nel caso delle superficie gobbe a piano direttore.

Ora in questo caso, supponendo $W = 0$, il che evidentemente può farsi, si ha:

$$X = \cos u, \quad Y = \sin u \cos v, \quad Z = \sin u \sin v,$$

quindi le equazioni della superficie si riducono alle altre più semplici:

$$\left. \begin{aligned} x &= - \int V dv, \\ y &= V \cot u \sin v - \int V'_1 \sin v dv, \\ z &= - V \cot u \cos v + \int V'_1 \cos v dv. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

L'equazione differenziale (43) delle asintotiche si riduce ora, all'altra:

$$\frac{2V}{\sin^2 u} du + (V_1 - V \cot u)'_v dv = 0,$$

che divisa per $2\sqrt{V}$ viene subito integrabile, e dà:

$$\sqrt{V} \cot u - \frac{1}{2} \int \frac{V'_1}{\sqrt{V}} dv = \text{cost}, \quad (47)$$

per la equazione in termini finiti delle asintotiche del secondo sistema nelle superficie gobbe a piano direttore.

In queste superficie la linea di stringimento è la linea $u = \frac{\pi}{2}$, e quindi è una linea a tangenti conjugate colla perpendicolare alla generatrice.

Le sue equazioni in coordinate cartesiane sono le seguenti:

$$x = - \int V dv, \quad y = - \int V'_1 \sin v dv, \quad z = \int V'_1 \cos v dv,$$

e perciò quando si vuole che questa linea soddisfaccia a qualche condizione speciale basterà, servendosi di queste equazioni, determinare una o tutte e due le funzioni V e V_1 in modo che queste condizioni riescano soddisfatte.

Così volendo che essa appartenga ad un cilindro circolare di raggio r il

cui asse sia quello delle x , bisognerà prendere V_1 in modo che si abbia:

$$(\int V'_1 \operatorname{sen} v dv)^2 + (\int V'_1 \cos v dv)^2 = r^2,$$

ciò che porta $V'_1 = r$.

Volendo che la superficie abbia per linea di stringimento una retta perpendicolare al piano direttore, e che quindi possiamo supporre essere l'asse x , si dovrà prendere $V_1 = 0$, e perciò le equazioni della superficie saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} x &= -\int V dv, \\ y &= V \cot u \operatorname{sen} v, \\ z &= -V \cot u \cos v; \end{aligned}$$

e la equazione (47) delle asintotiche si ridurrà all'altra:

$$\sqrt{V} \cot u = \cos t;$$

dalla quale, coll'osservare che $V \cot u$ è la distanza del punto che si considera della superficie dalla linea di stringimento contata sulla generatrice, e $\frac{1}{\sqrt{V}}$ è il parametro di distribuzione dei piani tangenti, si deduce subito una proprietà nota delle asintotiche delle superficie conoidi che qui consideriamo.

26. Per dare un'altra applicazione delle formole (41) che abbiamo trovato per le superficie gobbe, mi proporrò di ricercare le superficie gobbe che hanno un sistema di linee di curvatura piane; e poichè già dimostrai in un altro lavoro (*) che l'iperboloide gobbo di rivoluzione è la sola superficie gobba che abbia tutte le linee di curvatura piane, mi limiterò ora a cercare le superficie gobbe (se pur esistono) che hanno un solo sistema di linee di curvatura piane.

Per questo ricordiamo che quando per una superficie si hanno le equazioni (1), le linee di curvatura sono rappresentate dalla equazione:

$$N du^2 + (Q - M) du dv - P dv^2 = 0,$$

ovvero dall'altra:

$$2N du + \{Q - M \pm \sqrt{(Q - M)^2 + 4PN}\} dv = 0;$$

e questa equazione oltre a rappresentare le linee di curvatura della superficie, rappresenta anche le loro trasformate sferiche.

(*) *Sulle superficie che hanno le linee di curvatura piane*: Annali di Mat., 2^a serie, t. 1.
Annali di Matematica, tomo IV.

Ora, nel caso delle superficie gobbe l'elemento lineare sferico è:

$$ds'^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2(u - W) dv^2, \quad (48)$$

e si hanno le (41) e $M=0$; quindi le equazioni delle linee di curvatura e delle loro trasformate sferiche sono comprese nella seguente (*)

$$2Vdu + \left\{ V'_1 \operatorname{sen}^2(u - W) - V' \operatorname{sen}(u - W) \cos(u - W) - VW' \right. \\ \left. \pm \sqrt{[V'_1 \operatorname{sen}^2(u - W) - V' \operatorname{sen}(u - W) \cos(u - W) - VW']^2 + 4V^2 \operatorname{sen}^2(u - W)} \right\} dv = 0; \quad (49)$$

la quale, ponendo $\operatorname{sen}(u - W) = \eta$, può anche scriversi sotto la forma:

$$2Vdu + (\alpha \pm \sqrt{\beta}) dv = 0, \quad (50)$$

ove α e β sono funzioni razionali intere di η e $\sqrt{1 - \eta^2}$, i cui coefficienti sono funzioni di v ; e perciò per avere le superficie gobbe che cerchiamo (se pure esistono), basterà determinare i valori da darsi a V , V_1 e W onde ottenere che le linee (50) corrispondenti al segno superiore di $\sqrt{\beta}$, o quelle corrispondenti al segno inferiore, considerate sulla sfera (48), abbiano la curvatura geodetica costante.

Ciò posto, sia $\phi(u, v)$ il valore che si trova colle formole note per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ delle linee (50) sulla sfera (48). Lungo queste linee si avrà:

$$d \frac{1}{\rho} = \left(\frac{d\phi}{du} \frac{du}{dv} + \frac{d\phi}{dv} \right) dv,$$

ove $\frac{du}{dv}$ deve essere dedotto dalla equazione (50); quindi per le superficie che cerchiamo si dovrà avere:

$$\frac{d\phi}{du} \frac{du}{dv} + \frac{d\phi}{dv} = 0, \quad (51)$$

(*) Questa equazione è soddisfatta da $u = W$ o $u = W + \pi$, quando si prende il segno inferiore del radicale; quindi poichè per le (44), (45) e (48) queste linee sulla superficie sono situate all'infinito, e sulla sfera sono gli involuppi dei cerchi v , si conclude che le linee della sfera involuppi dei cerchi massimi che rappresentano le generatrici corrispondono a linee di curvatura all'infinito; e quindi (escludendo il caso che queste curve involuppi si riducano a due punti e che quindi la superficie sia a piano direttore) si potrà dire che nelle superficie gobbe che non hanno un piano direttore, le linee di curvatura di un sistema sono tali che le loro rappresentazioni sferiche sono perpendicolari alle curve involuppi dei cerchi massimi che rappresentano le generatrici, e sulla superficie vanno a toccare le generatrici all'infinito.

quando $\frac{du}{dv}$ appartenga alle linee di curvatura (50) di uno stesso sistema, e quindi sia il valore che viene dalla (50) prendendovi il segno superiore di $\sqrt{\beta}$, o quello che si ottiene prendendo il segno inferiore; e poichè questa equazione (51) viene ad essere in termini finiti e non contiene costanti arbitrarie, mentre deve appartenere a tutte le infinite linee di curvatura di uno stesso sistema, si conclude che essa dovrà essere identica.

Ora, ponendo nel primo membro della (51) il valore di $\frac{du}{dv}$ che si ha dalla (23), si ottiene una equazione della forma:

$$A + B\sqrt{1-\eta^2} \pm (C + D\sqrt{1-\eta^2})\sqrt{\beta} = 0, \quad (52)$$

ove A, B, C, D sono funzioni razionali intere di η ; quindi, per quanto abbiamo detto, per le superficie che cerchiamo bisognerà che una e una sola delle due equazioni che si ottengono da questa prendendo il segno superiore o l'inferiore di $\sqrt{\beta}$ sia identicamente soddisfatta.

Da ciò risulta che C e D non potranno essere zero, perchè altrimenti quando fosse soddisfatta una delle (52), lo sarebbe anche l'altra; quindi onde sia soddisfatta una delle (52) basterà che lo sia una delle seguenti

$$(A + B\sqrt{1-\eta^2})(C - D\sqrt{1-\eta^2}) \pm [C^2 - D^2(1-\eta^2)]\sqrt{\beta} = 0.$$

Ora queste equazioni hanno la forma:

$$\lambda + \mu\sqrt{1-\eta^2} \pm \nu\sqrt{\beta} = 0$$

ove λ, μ, ν sono funzioni razionali intere di η , e ν non può essere nullo; quindi si vede intanto che β dovrà essere il quadrato di una funzione razionale di η e di $\sqrt{1-\eta^2}$; e perciò dobbiamo prima cercare in quali casi β può godere di questa proprietà.

Per questo osserviamo che si ha:

$$\beta = (V_1'^2 - V'^2)\eta^4 + (V'^2 + 4V^2 - 2VV'_1W')\eta^2 + V^2W'^2 + 2V'\eta(VW' - V'_1\eta^2)\sqrt{1-\eta^2}, \quad (53)$$

e onde sia:

$$\beta = (r + s\sqrt{1-\eta^2})^2, \quad (54)$$

ove r ed s sono funzioni razionali intere di η , dovrà essere:

$$rs = V'\eta(VW' - V'_1\eta^2).$$

Ora è chiaro che r non potrà essere una funzione del terzo grado di η e s una funzione del secondo o del terzo grado, altrimenti il valore (54) di β verrebbe del sesto o dell'ottavo grado, mentre il valore (53) è soltanto del quarto; dunque r dovrà essere al più del secondo grado in η , ed s del primo al più; e perciò, indicando con m una funzione di v , non si potranno avere che i seguenti casi:

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} \quad r &= \frac{VW' - V'_1 \eta^2}{m}, & s &= mV'\eta, \\
 2.^{\circ} \quad r &= \frac{\eta \left(\eta \pm \sqrt{\frac{VW'}{V'_1}} \right)}{m}, & s &= -mV'V'_1 \left(\eta \mp \sqrt{\frac{VW'}{V'_1}} \right), \\
 3.^{\circ} \quad r &= \frac{1}{m}, & s &= mVV'W'\eta, \quad V'_1 = 0, \\
 4.^{\circ} \quad r &= \frac{VV'W'\eta}{m}, & s &= m, \quad V'_1 = 0, \\
 5.^{\circ} \quad V' &= W' = 0, \\
 6.^{\circ} \quad V'_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ma esaminando i primi quattro di questi casi, e osservando che in questi si suppone che V' e V'_1 non siano zero, si trova che onde potessero essere uguali i valori (53) e (54) di β , bisognerebbe che si avesse $V=0$ e questo non può essere; quindi questi quattro casi sono da escludersi, e ci resta soltanto da esaminare i due ultimi.

Ora esaminando il quinto caso, si trova che onde β sia un quadrato, bisogna che anche V sia costante, e questo porterebbe che la superficie gobba fosse l'elicoide di area minima. Ma in questo elicoide, come è noto (e come è facile a riscontrarsi coll'osservare che le trasformate sferiche delle linee di curvatura sono lossodromiche) le linee di curvatura non sono piane; quindi anche il caso attuale è da escludersi, e ci resta solo da considerare il caso di $V'=0$.

Supponiamo dunque ora $V'=0$; il valore di β diviene:

$$\beta = V_1^2 \eta^4 + 2V(2V - V'_1 W') \eta^2 + V^2 W'^2,$$

e per essere un quadrato richiede che si abbia $V = V'_1 W'$; quindi oltre a $V'=0$, si dovrebbe avere $V = V'_1 W'$.

Ora, quando si ha $V'_1 W' = V = \text{cost}$, le equazioni (49) delle linee di curvatura si riducono alle altre:

$$du - W' dv = 0, \quad W' du + \text{sen}^2(u - W) dv = 0;$$

la prima delle quali è subito integrabile e dà:

$$u - W = \text{cost}$$

per l'equazione in termini finiti delle linee di curvatura di un sistema; quindi per esaurire la nostra ricerca, non ci resta più che cercare se è possibile di determinare la funzione W in modo che la curvatura geodetica di uno solo dei due sistemi di linee:

$$u - W = \text{cost}, \quad (55)$$

$$W' du + \text{sen}^2(u - W) dv = 0, \quad (56)$$

sulla sfera (48) sia costante lungo le stesse linee.

Ora calcolando la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ delle linee (55) sulla sfera (48) si trova:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{W'' \text{sen } \omega}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos \omega}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{1}{2}}},$$

ove $\omega = u - W$; e siccome, onde $\frac{1}{\rho}$ sia costante lungo le linee (55) stesse bisogna che $\frac{1}{\rho}$ non dipenda che da ω , si conclude che onde le linee (55) sulla superficie fossero piane, dovrebbe essere $W' = \text{cost}$. Ma la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho'}$ delle linee (56) sulla sfera è:

$$\frac{1}{\rho'} = - \frac{W' W''}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{3}{2}}}, \quad (57)$$

ed è zero quando W' è costante; quindi se le linee (55) sulla superficie fossero piane, le linee (56) sarebbero geodetiche e perciò non potremmo essere che nel caso dell'iperboloide gobbo di rivoluzione; e di questo caso noi non vogliamo occuparci.

Volendo invece che le linee (56) fossero piane, bisognerebbe che si avesse identicamente per la (56) e (57):

$$d\frac{1}{\rho'} = -\frac{1}{(W'^2 + \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} \{ (W' W'')' (W'^2 + \sin^2 \omega) - \\ - 3 W'' [W'^2 W'' - \sin \omega \cos \omega (W'^2 + \sin^2 \omega)] \} dv = 0,$$

e questa porterebbe ancora $W'' = 0$, e saremmo nel caso precedente; dunque si può ora concludere che: fra le superficie gobbe non ne esiste alcuna che abbia un solo sistema di linee di curvatura piane; e quindi (per il teorema citato in principio sull'iperboloide gobbo di rivoluzione), quando sia trovato che una superficie gobba ha un sistema di linee di curvatura piane, si può dire subito che anche le linee di curvatura dell'altro sistema sono piane, e che la superficie è un iperboloide gobbo di rivoluzione.

Pisa, settembre 1870.
