Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle *).)

Riemanns Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen sind in der Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867“ bekannt geworden.

Dieselben beziehen sich zunächst in den §§. 7—10 auf Reihen, in welchen die Coefficienten unendlich klein werden; die übrigen Reihen werden alsdann, wenn nur Convergenz für einen Werth der Veränderlichen vorhanden ist, auf jene zurückgeführt.

Ich will im Folgenden den Satz beweisen:

„Wenn zwei unendliche Grössenreihen: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ so beschaffen sind, dass die Grenze von

$$a_n \sin n x + b_n \cos n x$$

für jeden Werth von x, der in einem gegebenen Intervalle $(a < x < b)$ des reellen Grössengebietes liegt, mit wachsendem n gleich Null ist, so convergirt sowohl a_n wie b_n mit wachsendem n gegen die Grenze Null“.

Wird dieser Satz auf die trigonometrischen Reihen angewandt, so giebt er die Einsicht, dass eine derartige Reihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin n x + b_n \cos n x + \cdots$$

nur dann für alle Werthe von x in einem gegebenen Intervalle $(a < x < b)$ des reellen Grössengebietes convergiren kann, wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n unendlich klein werden.

Diese Thatsache ist, wie aus mehreren Stellen der oben citirten Abhandlung hervorgeht, *Riemann* bekannt gewesen; es scheint jedoch, dass er sie nur im Hinblicke auf diejenigen Fälle bewiesen hat, wo die Coefficienten

---

*) Zu den folgenden Arbeiten bin ich durch Herrn *Heine* angeregt worden. Derselbe hat die Güte gehabt, mich mit seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen frühzeitig bekannt zu machen. Aus dem Versuche seine Resultate in der Richtung zu erweitern, dass jedwede Voraussetzung über die *Art* der Convergenz bei den auftretenden Reihen vermieden wird, sind beide hervorgegangen.

a_n, b_n in der Form der Integralausdrücke:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

vorausgesetzt werden können.

§. 1.

Ich schicke das Lemma vorauf:

„Hat man eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen:

$$(R.) \qquad u,\ v,\ w,\ x,\ \ldots$$

von der Beschaffenheit, dass:

$$v > 4u, \quad w > 8v, \quad x > 16w, \quad \ldots$$

so giebt es eine Zahlengrösse Ω, welche die Eigenschaft hat, dass das Product $n\Omega$, wenn man für n eine der Zahlen $(R.)$ setzt, die Form hat:

$$n\Omega = 2z_n + 1 \pm \Theta_n,$$

wo z_n eine vom Index n abhangende positive ganze Zahl und Θ_n eine zu n gehörige positive Grösse ist, welche unendlich klein wird, wenn man n in der Zahlenreihe $(R.)$ ins Unendliche fortschreiten lässt.“

Beweis. Ich bestimme auf Grundlage der Reihe $(R.)$ eine neue Reihe $(S.)$ von ungeraden ganzen Zahlen:

$$(S.) \qquad 2g+1, \quad 2h+1, \quad 2i+1, \quad \ldots$$

nach folgendem Gesetze:

$2g+1$ werde bestimmt durch die Bedingung, dass:

$$2g+1-\frac{v}{u}$$

dem absoluten Werthe nach kleiner oder gleich 1 sei.

Falls in dieser Bestimmung eine Zweideutigkeit enthalten ist, entscheide man sich für die kleinere der beiden ihr genügenden ungeraden Zahlen. Wenn $2g+1$ bestimmt ist, so wird $2h+1$ durch die Bedingung: $2h+1-(2g+1)\frac{w}{v}$ dem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich 1 bestimmt, wobei man sich im Falle der Zweideutigkeit wie im ersten Falle zu verhalten hat.

Analog werde die dritte Zahl $2i+1$ bestimmt durch die Bedingung: $2i+1-(2h+1)\frac{x}{w}$ dem absoluten Werthe nach kleiner oder gleich 1 und ebenso alle folgenden Zahlen der Reihe $(S.)$.

Man bilde aus ($R.$) und ($S.$) die unendliche Reihe rationaler Brüche:

$$(N.)\qquad \frac{1}{u},\quad \frac{2g+1}{v},\quad \frac{2h+1}{w},\quad \frac{2i+1}{x},\quad \ldots .$$

Diese Brüche nähern sich einer festen von Null verschiedenen Grenze, einer Zahlengrösse, welche ich mit Ω bezeichnen will.

Um dies zu sehen, bemerke man, dass, der Entstehungsweise der Reihe ($S.$) zufolge, die nachstehenden Ungleichheiten Geltung haben:

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{2g+1}{v}\right)\leqq\frac{1}{v},\quad \left(\frac{2g+1}{v}-\frac{2h+1}{w}\right)\leqq\frac{1}{w},\quad \ldots .$$

Mithin ist die Differenz des ersten und irgend eines folgenden Bruches der Reihe ($N.$) nicht grösser als die Summe:

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots \text{ in infinitum};$$

ebenso ist die Differenz des zweiten und irgend eines folgenden Bruches nicht grösser als die Summe:

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots \text{ in infinitum};$$

und das Aehnliche gilt für die Differenzen der übrigen Brüche in der Reihe ($N.$).

Da die Reihe $\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots$, wegen der Bedingungen, denen die Zahlen ($R.$) unterworfen sind, convergirt, so folgt hieraus, dass die Differenz zweier Brüche ($N.$), wenn dieselben beliebig in der Reihe ($N.$) stets weiter ins Unendliche rücken, unendlich klein wird, was die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass sich die Brüche ($N.$) einer festen Grenze Ω nähern.

Diese Zahlengrösse Ω ist von Null verschieden; denn sie unterscheidet sich nach dem Gesagten von dem ersten Näherungsbruche $\frac{1}{u}$ höchstens um die Summe:

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots;$$

die letztere ist aber kleiner als $\frac{1}{v}(1+\frac{1}{8}+\cdots)$, d. h. kleiner als $\frac{5}{4v}$, also auch kleiner als $\frac{5}{16u}$; es liegt daher Ω in den Grenzen:

$$\frac{11}{16u} \quad\text{und}\quad \frac{21}{16u}.$$

Es ist nun nicht schwer einzusehen, dass Ω die im Lemma ausgesagten Eigenschaften hat, wenn man:

$$z_u=0,\quad z_v=g,\quad z_w=h,\quad z_x=i,\quad \ldots$$

nimmt. Man hat nämlich:

$$\left(\Omega-\frac{1}{u}\right)\leqq\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\cdots,\quad \text{also}\quad (\Omega u-1)<\tfrac{1}{2};$$

ferner

$$\left(\Omega-\frac{2g+1}{v}\right)\leqq\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\cdots,\quad \text{also}\quad (\Omega w-2g-1)<\tfrac{1}{4};$$

ebenso ist

$$(\Omega x-(2h+1))<\tfrac{1}{8}\ \text{u. s. f.}$$

Es nehmen also die Differenzen:

$$u\Omega-2z_u-1,\quad v\Omega-2z_v-1,\quad w\Omega-2z_w-1,\quad \ldots$$

welche ich mit:

$$\pm\Theta_u,\quad \pm\Theta_v,\quad \pm\Theta_w,\quad \ldots$$

bezeichnet habe, schneller ab als die Brüche:

$$\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{8},\quad \ldots.$$

Dies war zu beweisen.

§. 2.

„Die Zahlengrösse Ω kann durch eine Modification des für sie festgestellten Entstehungsgesetzes so bestimmt werden, dass sie in ein gegebenes Intervall des reellen Grössengebietes zu liegen kommt."

Ist das Intervall von 0 bis 2 in 2ν gleiche Intervalle getheilt und soll Ω in das μ^{te} von ihnen fallen, so befolge man nachstehende Regel:

Man benutze die Reihe $(R.)$ erst von demjenigen Gliede an, welches grösser ist als 6ν; setzen wir der Kürze wegen voraus, dass schon $u>6\nu$, so bestimme man die ungerade Zahl $2f+1$ so, dass der Bruch $\frac{2f+1}{u}$ in den Grenzen $\frac{3\mu-2}{3\nu}$ und $\frac{3\mu-1}{3\nu}$ liege; die ungeraden Zahlen $2g+1$, $2h+1$, ... haben in ähnlichem Sinne wie oben, den Bedingungen:

$$\left(2g+1-(2f+1)\frac{v}{u}\right)\leqq 1,$$

$$\left(2h+1-(2g+1)\frac{w}{v}\right)\leqq 1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

zu genügen, so dass man hat:

$$\left(\frac{2f+1}{u}-\frac{2g+1}{v}\right)\leqq\frac{1}{v},$$

$$\left(\frac{2g+1}{v}-\frac{2h+1}{w}\right)\leqq\frac{1}{w},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Es fällt alsdann die Grenze Ω, welcher die Näherungsbrüche:

$$\frac{2f+1}{u}, \quad \frac{2g+1}{v}, \quad \frac{2h+1}{w}, \quad \ldots$$

zustreben, zwischen $\frac{2f+1}{u}-\frac{5}{16u}$ und $\frac{2f+1}{u}+\frac{5}{16u}$, mithin auch, wegen der Bestimmungen, die wir für $2f+1$ und u getroffen haben, zwischen:

$$\frac{3\mu-2}{3\nu}-\frac{5}{6.16.\nu} \quad \text{und} \quad \frac{3\mu-1}{3\nu}+\frac{5}{6.16.\nu}$$

und um wie vielmehr zwischen:

$$\frac{\mu-1}{\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\nu}.$$

Die Zahlengrösse Ω hat auch hier die im Lemma ausgesagten Eigenschaften, wenn man:

$$z_u=f, \quad z_v=g, \quad z_w=h, \quad \ldots$$

nimmt.

§. 3.

Wenn ich von einer unendlichen Grössenreihe:

$$(G.) \qquad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

sage, dass $\lim \varrho_n = 0$, so verstehe ich darunter, dass, wenn δ eine beliebig gegebene Grösse ist, man aus der Reihe $(G.)$ eine endliche Anzahl von Gliedern aussondern kann, so dass die übrig gebliebenen sämmtlich kleiner sind als δ.

In dieser Definition liegt, dass, wenn $\lim \varrho_n = 0$ und

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

irgend eine aus der Reihe der positiven ganzen Zahlen ausgehobene unendliche Zahlenreihe ist, in der Grössenreihe

$$(G'.) \qquad \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \varrho_\gamma, \ldots$$

Glieder gefunden werden können, welche kleiner sind, als eine beliebig gegebene Grösse δ.

Es ist folgenreich, dass dieser Ausspruch sich durch den Satz umkehren lässt:

„Ist eine unendliche Grössenreihe $(G.)$ gegeben und weiss man, dass in jeder aus $(G.)$ gehobenen unendlichen Grössenreihe $(G'.)$ Glieder gefunden werden können, welche kleiner sind als eine willkürlich gegebene Grösse δ, so ist:

$$\lim \varrho_n = 0.“$$

Beweis. Sei $\varDelta'$, $\varDelta''$, ... eine beliebige Reihe beständig abnehmender, unendlich klein werdender Grössen, z. B. die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Man hebe aus der Reihe $(G.)$ zuerst diejenigen Glieder aus, welche grösser als $\varDelta'$, dann von den übrig gebliebenen diejenigen, welche grösser sind als $\varDelta''$, u. s. f.; bei keiner von diesen Operationen gelangt man zum Ausheben unendlich vieler Glieder, weil sonst eine unendliche Reihe $(G'.)$ vorhanden wäre, deren Glieder sämmtlich grösser sind als eine von Null verschiedene Grösse $\varDelta^{(\nu)}$, was gegen die Voraussetzung ist; die Grössenreihe $(G.)$ ist also von der Beschaffenheit, dass, bei beliebig klein gegebener Grösse $\varDelta^{(\nu)}$, eine endliche Anzahl von Gliedern aus derselben ausgesondert werden kann, so dass die übrig bleibenden sämmtlich kleiner sind als $\varDelta^{(\nu)}$; es ist also $\lim \varrho_n = 0$.

Daraus ergiebt sich als Corollar Folgendes:

„Ist eine unendliche Grössenreihe $(G.)$ gegeben und kann man aus jeder aus $(G.)$ gehobenen Grössenreihe $(G'.)$ eine neue Grössenreihe:

$$(G''.) \qquad \varrho_u, \varrho_v, \varrho_w, \ldots$$

ausheben, in welcher die Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden, so ist:

$$\lim \varrho_n = 0.“$$

§. 4.

Lehrsatz. „Wenn für jeden reellen Werth von x zwischen gegebenen Grenzen $(a < x < b)$:

$$\lim (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0,$$

so ist sowohl:

$$\lim a_n = 0, \quad \text{wie} \quad \lim b_n = 0.“$$

Beweis. Wir wollen $a_n \sin nx + b_n \cos nx$ in die Form bringen $\varrho_n \cos(\varphi_n - nx)$, wo $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und φ_n der zwischen 0 und 2π liegende Bogen sei, dessen Sinus gleich $\frac{a_n}{\varrho_n}$, dessen Cosinus gleich $\frac{b_n}{\varrho_n}$ ist; es ist auf diese Weise nur zu zeigen, dass $\lim \varrho_n = 0$, um alsdann unmittelbar schliessen zu können, dass $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$.

Wir bezeichnen die Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ mit $(G.)$. Sei:

$$(G'.) \qquad \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \ldots$$

irgend eine aus $(G.)$ gehobene unendliche Reihe; dann will ich zeigen, dass sich aus $(G'.)$ eine unendliche Reihe:

$$(G''.) \qquad \varrho_u, \varrho_v, \varrho_w, \ldots$$

ausheben lässt, deren Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Betrachten wir zu dem Ende die unendliche Reihe:

$$(1.)\qquad \varphi_\alpha,\ \varphi_\beta,\ \varphi_\gamma, \ldots;$$

es muss, da die Glieder derselben alle zwischen 0 und 2π liegen, ein Intervall von der Grösse $\frac{\pi}{4}$ angegeben werden können, innerhalb welches unendlich viele Glieder der Reihe (1.) liegen.

Um die Ideen zu fixiren, sei $\left(\Phi \leqq \varphi \leqq \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ ein solches Intervall, (wo also Φ eine bestimmte zwischen 0 und $\frac{7\pi}{4}$ gelegene Grösse ist) und sei:

$$(2.)\qquad \varphi_{\alpha'},\ \varphi_{\beta'},\ \varphi_{\gamma'},\ \ldots$$

eine aus (1.) gehobene unendliche Grössenreihe, deren Glieder sämmtlich in diesem Intervalle liegen.

Aus der Zahlenreihe

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \ldots$$

hebe ich eine unendliche Zahlenreihe:

$$(R.)\qquad u,\ v,\ w,\ \ldots$$

aus, welche den Bedingungen des Lemmas im §. 1 entspricht, und bei welcher ausserdem u so gross genommen ist, dass man die im §. 2 definirte Zahlengrösse Ω in das Intervall $\left(\frac{a}{\pi} \cdots \frac{b}{\pi}\right)$, mithin auch in das grössere $\left(\frac{2a}{\pi} \cdots \frac{2b}{\pi}\right)$ verlegen kann. Die unendliche Grössenreihe:

$$(G''.)\qquad \varrho_u,\ \varrho_v,\ \varrho_w,\ \ldots,$$

welche offenbar aus $(G'.)$ gehoben ist, ist es nun, von welcher ich nachweisen werde, dass ihre Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Vorerst hebe ich hervor, dass die Glieder der mit $(G''.)$ parallel laufenden Reihe:

$$(F.)\qquad \varphi_u,\ \varphi_v,\ \varphi_w,\ \ldots$$

in dem Intervalle $\left(\Phi \ldots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ enthalten sind, und unterscheide die beiden Fälle, dass dieses Intervall eine der beiden Grössen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ enthält oder keine von ihnen enthält.

Erster Fall:

I. In dem Intervalle $\left(\Phi \ldots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$ liegt weder $\frac{\pi}{2}$ noch $\frac{3\pi}{2}$. Ich kann eine von Null verschiedene Grösse ε angeben, so dass $\cos\varphi$ seinem absoluten Werthe nach grösser als ε ist für jeden Werth von φ im Intervalle $\left(\Phi \ldots \Phi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Man bestimme nach den Vorschriften des §. 2 eine Zahlengrösse Ω, so beschaffen, dass:

1) Ω zwischen $\frac{a}{\pi}$ und $\frac{b}{\pi}$ zu liegen kommt,

2) $\Omega n-(2z_n+1)=\pm\Theta_n$ unendlich klein wird, wenn man für n die steigenden Zahlen der Reihe (R.) setzt.

Setzt man in der mit den Reihen (G''.) und (F.) parallel laufenden:

$$(P.)\qquad \varrho_u\cos(\varphi_u-ux),\quad \varrho_v\cos(\varphi_v-vx),\quad \varrho_w\cos(\varphi_w-wx),\quad \ldots$$

$x=\pi\Omega$, so ist klar, dass die Cosinusse der Reihe (P.), von einem gewissen Index an, sämmtlich ihrem absoluten Werthe nach grösser sind als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Die Glieder selbst der Reihe (P.) werden der Voraussetzung gemäss, welche im Theorem liegt, für jeden Werth von x in den Grenzen a und b, mithin auch für $x=\pi\Omega$, mit wachsendem Index unendlich klein; daraus folgt, dass die Glieder der Reihe (G''.) mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Zweiter Fall.

II. In dem Intervalle $\left(\Phi\ldots\Phi+\frac{\pi}{4}\right)$ liegt entweder $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$; dann liegt in dem Intervalle $\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\ \ldots\ \Phi+\frac{3\pi}{4}\right)$ kein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, und ich kann eine von Null verschiedene Grösse ε' angeben, so dass $\cos\varphi$ seinem absoluten Betrage nach grösser ist als ε' für jeden Werth von φ im Intervalle $\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\ldots\Phi+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Man bestimme nach den Vorschriften des §. 2 eine Zahlengrösse Ω, so beschaffen, dass:

1) Ω zwischen $\frac{2a}{\pi}$ und $\frac{2b}{\pi}$ zu liegen kommt,

2) $\Omega n-(2z_n+1)=\pm\Theta_n$ unendlich klein wird, wenn man für n die steigenden Zahlen der Reihe (R.) setzt.

Setzt man in der Reihe:

$$(P.)\qquad \varrho_u\cos(\varphi_u-ux),\quad \varrho_v\cos(\varphi_v-vx),\quad \ldots$$

$x=\frac{\pi}{2}\Omega$, so ist klar, dass die Cosinusse in derselben, von einem gewissen Index an, sämmtlich ihrem absoluten Werthe nach grösser sind als $\frac{\varepsilon'}{2}$.

Von den Gliedern selbst der Reihe (P.) gilt das Nämliche wie unter I.; sie werden mit wachsendem Stellenzeiger für jeden Werth von x in den

Grenzen a und b, mithin auch für $x = \frac{\pi}{2}\Omega$ unendlich klein; es folgt also auch in diesem Falle, dass die Glieder der Reihe $(G''.)$ mit wachsendem Index unendlich klein werden. —

Wir haben somit gezeigt, dass, wenn $(G'.)$ irgend eine aus $(G.)$ ausgehobene unendliche Reihe ist, man aus dieser eine Reihe $(G''.)$ ausheben kann, deren Glieder mit wachsendem Index unendlich klein werden.

Dem Corollar des §. 3 zufolge reicht dies aus, um schliessen zu können:

$$\lim \varrho_n = 0.$$

Berlin, den 20. März 1870.