

Sulla formula di Taylor.

(Di ONORATO NICCOLETTI, a Pisa.)

In una Nota, inserita nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (*) ho dato per le serie doppie di TAYLOR una formula, che esprime la differenza tra il valore di una funzione $f(x_0 + h, y_0 + k)$ finita e continua insieme con tutte le sue derivate nel campo definito dalle disuguaglianze $0 \leq h < R_1$, $0 \leq k < R_2$, e la somma dei primi $(m+1)(n+1)$ termini della corrispondente serie doppia di TAYLOR:

$$\sum_{\mu, \nu}^{\infty} \frac{1}{\mu! \nu!} \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu}} \right)_{(x_0, y_0)} h^{\mu} \cdot k^{\nu}$$

(pei quali si ha cioè $0 \leq \mu \leq m$, $0 \leq \nu \leq n$); questa differenza vien data come somma di tre integrali, uno doppio, gli altri due semplici.

Questa formula, che, come nella Nota ricordata è detto esplicitamente, può estendersi alle funzioni di un numero qualunque di variabili, è ivi dedotta da una formula generale d'integrazione per parti, relativa a funzioni di n variabili indipendenti. Comunico, in quel che segue, un'altra dimostrazione, di carattere affatto elementare, della formula stessa, che do per il caso generale di una funzione di n variabili indipendenti; ne deduco quindi una formula analoga, più generale, donde segue una proprietà interessante delle serie multiple (reali) di TAYLOR.

1. È noto (e si dimostra molto semplicemente) che sotto ipotesi conosciutissime, che è inutile ricordare, la formula di TAYLOR per una funzione

(*) *Sulle serie doppie di Taylor.* (Rendiconti Lincei, 16 Giugno 1901.)

$f(x)$ di una variabile reale x può scriversi al modo seguente:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \\ &\quad + \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx = \\ &= \sum_{\mu=0}^m \frac{(x_1 - x_0)^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(x_0) + \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

nella quale il *resto* R_m è dato dall'integral definito:

$$R_m = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx. \quad (2)$$

Ove poi all'integrale precedente si applichi convenientemente il teorema del valor medio, la (2) conduce immediatamente alle note forme del resto di SCLÖMICH e ROCHE, di LAGRANGE, di CAUCHY (*).

2. Sia ora $\varphi(xy)$ una funzione delle due variabili reali x ed y , finita e continua con quelle derivate che dovremo considerare per $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$; e poniamo nella (1) (**):

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x, y_0) + \frac{(y_1 - y_0)}{1} \left\{ \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} \right\}_{xy_0} + \dots + \frac{(y_1 - y_0)^n}{n!} \left\{ \frac{\partial^n \varphi(xy)}{\partial y^n} \right\}_{xy_0} + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \frac{\partial^{n+1} \varphi(xy)}{\partial y^{n+1}} dy = \\ &= \sum_{\nu=0}^n \frac{(y_1 - y_0)^\nu}{\nu!} \left\{ \frac{\partial^\nu \varphi(xy)}{\partial y^\nu} \right\}_{xy_0} + \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \frac{\partial^{n+1} \varphi(xy)}{\partial y^{n+1}} dy, \end{aligned}$$

cioè, per la (1) stessa, nella quale sia cambiato f in φ , m in n , x in y , poniamo:

$$f(x) = \varphi(x, y_1).$$

(*) Cf. ad es.: GENOCCHI e PEANO, *Calcolo infinitesimale*, pag. 332.

(**) Col simbolo $\{f\}_{a_1 a_2 \dots a_n}$ indichiamo il valore di una funzione $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ nel punto $(a_1 a_2 \dots a_n)$; più oltre, se $i_1 i_2 \dots i_n$ è una certa permutazione degli indici $1, 2, \dots, n$, col simbolo $\{f\}_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_n}}$ indichiamo il valore che la f prende per $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$, $x_{i_2} = \alpha_{i_2}, \dots, x_{i_n} = \alpha_{i_n}$.

Avremo :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, y_1) &= \sum_0^m \sum_0^n \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right)_{x_0, y_0} \frac{(x_1 - x_0)^\mu (y_1 - y_0)^\nu}{\mu! \nu!} + \\ &+ \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \left\{ \frac{\partial^{m+1} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1}} \right\}_{x, y_1} dx + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} \left\{ \sum_0^m \frac{(x_1 - x_0)^\mu}{\mu!} \left(\frac{\partial^\mu \varphi(x, y)}{\partial x^\mu} \right)_{x, y} \right\} dy. \end{aligned}$$

Ma per la (1) stessa, fattovi $f(x) = \varphi(x, y)$, si ha :

$$\sum_0^m \frac{(x_1 - x_0)^\mu}{\mu!} \left(\frac{\partial^\mu \varphi(x, y)}{\partial x^\mu} \right)_{x_0, y} = \varphi(x_1, y) - \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \frac{\partial^{m+1} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1}} dx;$$

ne segue, sostituendo sopra, la formula :

$$\varphi(x_1, y_1) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{(x_1 - x_0)^\mu (y_1 - y_0)^\nu}{\mu! \nu!} \left\{ \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right\}_{x_0, y_0} + R_{mn}, \quad (3)$$

dove :

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)^m \left\{ \frac{\partial^{m+1} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1}} \right\}_{x, y_1} dx + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - y)^n \left\{ \frac{\partial^{n+1} \varphi(x, y)}{\partial y^{n+1}} \right\}_{x, y} dy - \\ &- \frac{1}{m! n!} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x_1 - x)^m (y_1 - y)^n \frac{\partial^{m+n+2} \varphi(x, y)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

cioè appunto la formula (B) della Nota sopra ricordata.

3. Per vedere nel modo più semplice come questa formula possa estendersi alle funzioni di un numero qualunque di variabili, è utile, portandovi alcuni evidenti cambiamenti di notazione, scrivere le formole (1) e (3) al

modo seguente :

$$f(b_1) = \frac{(b_1 - a_1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a_1^m} \left\{ \frac{f(a_1)}{b_1 - a_1} \right\} + \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx; \quad (1^*)$$

$$\left. \begin{aligned} f(b_1, b_2) &= \frac{(b_1 - a_1)^{m+1} (b_2 - a_2)^{n+1}}{m! n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n} \left\{ \frac{f(a_1, a_2)}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \right\} + \\ &+ \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m \frac{\partial^{m+1} f(x, b_2)}{\partial x^{m+1}} dx + \frac{1}{n!} \int_{a_2}^{b_2} (b_2 - y)^n \frac{\partial^{n+1} f(b_1, y)}{\partial y^{n+1}} dy - \\ &- \frac{1}{m! n!} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - x)^m (b_2 - y)^n \frac{\partial^{m+n+2} f(x, y)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Introduciamo ora i simboli di operazioni :

$$\left. \begin{aligned} D_1 f(a_1) &= \frac{(b_1 - a_1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a_1^m} \left\{ \frac{f(a_1)}{b_1 - a_1} \right\}; \\ E_1 f(b_1) &= \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m f^{(m+1)}(x) dx; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e nel caso di due variabili indipendenti, poniamo :

$$\left. \begin{aligned} D_1 f(a_1, y) &= \frac{(b_1 - a_1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a_1^m} \left\{ \frac{f(a_1, y)}{b_1 - a_1} \right\}; \\ D_2 f(x, a_2) &= \frac{(b_2 - a_2)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a_2^n} \left\{ \frac{f(x, a_2)}{b_2 - a_2} \right\}; \\ E_1 f(b_1, y) &= \frac{1}{m!} \int_{a_1}^{b_1} (b_1 - x)^m \frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial x^{m+1}} dx; \\ E_2 f(x, b_2) &= \frac{1}{n!} \int_{a_2}^{b_2} (b_2 - y)^n \frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial y^{n+1}} dy; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

con questi simboli le formule (1*) e (3*) si scriveranno rispettivamente :

$$D_1 f(a_1) = (1 - E_1) f(b_1) \quad (1^{**})$$

$$D_1 D_2 f(a_1, a_2) = (1 - E_1)(1 - E_2) f(b_1, b_2) \quad (3^{**})$$

e in queste formule i secondi membri hanno rispettivamente il significato :

$$\begin{aligned}(1 - E_1) f(b_1) &= f(b_1) - E_1 f(b_1) \\ (1 - E_1)(1 - E_2) f(b_1 b_2) &= \\ &= f(b_1 b_2) - E_1 f(b_1 b_2) - E_2 f(b_1 b_2) + E_1 E_2 f(b_1 b_2).\end{aligned}$$

Dalle formule (1**) e (3**) si ha subito, per induzione, la formula generale. Sia $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ una funzione delle n variabili reali $x_1 x_2 \dots x_n$, la quale nel campo definito dalle disuguaglianze :

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sia finita e continua con quelle derivate che dovremo considerare. Poniamo allora :

$$\left. \begin{aligned} 1. f(x_1 x_2 \dots x_n) &= f(x_1 x_2 \dots x_n) \\ D_i f(x_1 \dots x_{i-1} a_i x_{i+1} \dots x_n) &= \\ &= \frac{(b_i - a_i)^{m_i+1}}{m_i!} \cdot \frac{\partial^{m_i}}{\partial a_i^{m_i}} \left\{ \frac{f(x_1 \dots x_{i-1} a_i x_{i+1} \dots x_n)}{b_i - a_i} \right\}; \\ E_i f(x_1 \dots x_{i-1} b_i x_{i+1} \dots x_n) &= \\ &= \frac{1}{m_i!} \int_{a_i}^{b_i} (b_i - x_i)^{m_i} \frac{\partial^{m_i+1} f(x_1 \dots x_n)}{\partial x_i^{m_i+1}} dx_i; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

per i teoremi d'inversione delle derivazioni e della derivazione ed integrazione sotto il segno integrale, sono le D_i , E_k simboli operatori a due a due permutabili per $i \neq k$. Con queste notazioni, noi diciamo che *varrà la formula* :

$$D_1 D_2 \dots D_n f(a_1 a_2 \dots a_n) = (1 - E_1)(1 - E_2) \dots (1 - E_n) f(b_1 b_2 \dots b_n), \quad (8)$$

nella quale i due prodotti simbolici hanno il senso già sopra dichiarato.

Poichè la (8) è vera per $n = 1$, $n = 2$, essa sarà dimostrata in generale, quando, suppostala vera fino ad un valore n , si dimostri per il successivo $n + 1$. In questa ipotesi, in luogo di $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ sostituiamo nei due membri della (8) rispettivamente :

$$D_{n+1} f(x_1 x_2 \dots x_n, a_{n+1}) = (1 - E_{n+1}) f(x_1 x_2 \dots x_n, b_{n+1})$$

(uguaglianza vera a causa della (1**)); per la permutabilità dei simboli D

ed E con indici diversi, avremo:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \dots D_n D_{n+1} f(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) = \\ = (1 - E_1)(1 - E_2) \dots (1 - E_n)(1 - E_{n+1}) f(b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}), \end{aligned}$$

cioè la (8) stessa, cambiata di n in $n+1$. Essa è dunque vera in generale.

Abbandonando i simboli operatori così utili per la dimostrazione, scriviamo esplicitamente la (8). Avremo la formula generale cui volevamo arrivare:

$$\begin{aligned} f(b_1 b_2 \dots b_n) = \sum_0^{m_1} \dots \sum_0^{m_n} \frac{1}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \right\}_{(a)} (b_1 - a_1)^{\mu_1} (b_2 - a_2)^{\mu_2} \dots (b_n - a_n)^{\mu_n} + \\ + R_{m_1 m_2 \dots m_n}, \end{aligned} \quad (9)$$

dove:

$$\begin{aligned} R_{m_1 m_2 \dots m_n} = \sum_{i_1} \frac{1}{m_{i_1}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+1} f}{\partial x_i^{m_{i_1}+1}} \right\}_{(x_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} - \\ - \sum_{(i_1 i_2)} \frac{1}{m_{i_1}! m_{i_2}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} (b_{i_2} - x_{i_2})^{m_{i_2}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + m_{i_2} + 2} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \partial x_{i_2}^{m_{i_2}+1}} \right\}_{(x_{i_1} x_{i_2} b_{i_3} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} dx_{i_2} + \dots + \\ + (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{m_{i_k}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}; b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} \dots dx_{i_k} + \dots + \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n!} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^n (b_i - x_i)^{m_i} \cdot \\ \cdot \left(\frac{\partial^{\sum_{i=1}^n m_i + n} f}{\partial x_1^{m_1+1} \dots \partial x_n^{m_n+1}} \right)_{(x_1 \dots x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n; \end{aligned} \quad (10)$$

e nella (10) il simbolo $\sum_{(i_1 \dots i_k)}$ sta ad indicare che la somma relativa è estesa a tutte le combinazioni della classe k degli indici $1, 2, \dots, n$, e in ciascuno

dei termini della somma la $(i_{k+1} \dots i_n)$ indica la combinazione *complementare* (della classe $n - k$) della $(i_1 i_2 \dots i_k)$.

4. Per le (9) e (10) la differenza tra il valore della $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ nel punto $(b_1 b_2 \dots b_n)$ e la somma dei *primi* $(m_1 + 1) (m_2 + 1) \dots (m_n + 1)$ termini della corrispondente serie di TAYLOR

$$\sum_0^{\infty} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \frac{1}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} \cdot \left\{ \frac{\partial^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \right\}_{(a)} (b_1 - a_1)^{\mu_1} (b_2 - a_2)^{\mu_2} \dots (b_n - a_n)^{\mu_n} \quad (11)$$

(pei quali cioè si ha $\mu_i \leq m_i$) è espressa come somma di $2^n - 1$ integrali (di cui $\binom{n}{r}$ sono r -pli), i quali portano su opportune funzioni, che si hanno in guisa determinata dalla funzione data.

Ci si forma una chiara idea della forma del *resto* $R_{m_1 \dots m_n}$, ricorrendo al linguaggio della geometria ad n dimensioni. Riguardiamo infatti le $x_1 x_2 \dots x_n$ quali coordinate cartesiane dei punti di un S_n e in questo consideriamo il parallelepipedo ad n dimensioni colle faccie parallele agli iperpiani coordinati, di cui due vertici opposti sono nei punti $(a_1 a_2 \dots a_n), (b_1 b_2 \dots b_n)$. Dalla (10) segue allora immediatamente che il resto $R_{m_1 m_2 \dots m_n}$ è uguale alla somma di tanti integrali definiti estesi a tutti gli S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) di questo parallelepipedo che contengono il vertice $(b_1 b_2 \dots b_n)$, presi positivamente o negativamente secondochè k è dispari o pari; per ciascuno di questi integrali la funzione sotto il segno è determinata completamente dai valori della $f(x_1 \dots x_n)$ sull' S_k cui l'integrale è esteso. Questo fa intendere anche come la formula (9) possa ancora dedursi direttamente da una formula più generale d'integrazione per parti, nella quale è fondamentale la considerazione del parallelepipedo sopra indicato (*).

5. Dalle (9), (10) si deducono dei risultati degni di nota. Poniamo nella (10):

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{m_{i_k}} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}, b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k}, \quad (12)$$

(*) Cf. *nota citata*, p. 468.

con che la (10) diventa

$$R_{m_1 \dots m_n} = \sum_1^n (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} A_{i_1 i_2 \dots i_k}; \quad (13)$$

decomponendo ogni esponente m_{i_ρ} nella somma di due

$$m_{i_\rho} = \mu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} + \nu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)},$$

(di cui $\mu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} > 0$), l'integrale k -plo $A_{i_1 \dots i_k}$ può scriversi anche al modo seguente:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{\mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} - 1} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{\mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} - 1} \\ (b_{i_1} - x_{i_1})^{\nu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} + 1} \dots (b_{i_k} - x_{i_k})^{\nu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} + 1} \\ \left\{ \frac{\partial m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} f \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}; b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} \dots dx_{i_k};$$

ed anche applicando ripetutamente il teorema del valor medio:

$$A_{i_1 \dots i_k} = \left\{ \frac{1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} \{m_{i_1} - \mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} + 1\} \dots 1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} \{m_{i_k} - \mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)} + 1\}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}! \cdot \mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} \dots \mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)}} \cdot (b_{i_1} - a_{i_1})^{m_{i_1} + 1} \dots (b_{i_k} - a_{i_k})^{m_{i_k} + 1} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{\partial m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} f \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} (b_{i_\rho} - a_{i_\rho}); b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} \right\}_{(\rho=1, 2, \dots, k)} \quad (12^*)$$

che, sostituita nella (13) porta alla *forma del resto di SCLÖMICH e ROCHE*. In questa formula (12*) le $\theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)}$ sono opportune quantità comprese tra zero ed uno; $0 < \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} < 1$. Facendo nelle (12*), (13) $\mu_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} = m_{i_\rho} + 1$ si ottiene la *forma del resto di LAGRANGE*:

$$R_{m_1 \dots m_n} = \sum_1^n (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(b_{i_1} - a_{i_1})^{m_{i_1} + 1} \dots (b_{i_k} - a_{i_k})^{m_{i_k} + 1}}{(m_{i_1} + 1)! \dots (m_{i_k} + 1)!} \cdot \left\{ \frac{\partial m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1} + 1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k} + 1}} f \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} (b_{i_\rho} - a_{i_\rho}); b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} \quad (14)$$

ponendo invece tutte le $\mu_{i\rho}$ uguali ad uno, si ha la forma di CAUCHY:

$$\left. \begin{aligned} R_{m_1 \dots m_n} &= \\ &= \sum_1^n (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \cdot \\ &\quad \cdot (b_{i_1} - a_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k} - a_{i_k})^{m_{i_k}} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} (b_{i_\rho} - a_{i_\rho}); \quad b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} \cdot \\ &\quad \quad \quad (\rho = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Se in questa poniamo:

$$b_{i\rho} = a_{i\rho} + h_{i\rho},$$

essa assume la forma:

$$\left. \begin{aligned} R_{m_1 \dots m_n} &= \sum_1^n (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} h_{i_\rho}; \quad a_{i_{k+1}} + h_{i_{k+1}} \dots a_{i_n} + h_{i_n})} \cdot \\ &\quad \quad \quad (\rho = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (15^*)$$

Questa forma del resto è particolarmente importante. Ripetendo su essa (con lievi modificazioni) il ragionamento tenuto nella nota ricordata (p. 470 e ss.) per le funzioni di due variabili indipendenti, si ottengono le condizioni *necessarie* e *sufficienti* perchè la serie di TAYLOR per la funzione $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ relativa al punto iniziale $(a_1 \dots a_n)$ converga *assolutamente* nel campo definito delle disuguaglianze $|x_i - a_i| < R_i$ e in questo campo abbia per somma la funzione stessa. È perciò necessario e sufficiente che le $2^n - 1$ espressioni che compariscono nella (15*):

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(1 - \theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1 - \theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + \dots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_\rho} = a_{i_\rho} + \theta_{i_\rho}^{(i_1 \dots i_k)} h_{i_\rho}; \quad a_{i_{k+1}} + h_{i_{k+1}} \dots a_{i_n} + h_{i_n})} \cdot \\ &\quad \quad \quad (\rho = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

tendano *uniformemente* allo zero, ove in esse le $h_{i\rho}$ e le $\theta_{i\rho}^{(i_1 \dots i_k)}$ si riguardino come variabili *indipendenti*, assoggettate solo alle disuguaglianze

$$|h_i| < R_i, \quad 0 \leq \theta_{i\rho}^{(i_1 \dots i_k)} \leq 1,$$

ed il resto $\bar{R}_{p_1 p_2 \dots p_k}$ ha la forma:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{p_1 p_2 \dots p_k} = & \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i!} \int_0^1 (1-t_i)^{p_i} \frac{\partial^{p_i+1} F(1 \dots 1, t_i, 1 \dots 1)}{\partial t_i^{p_i+1}} dt_i - \\ & - \sum_{(i_1 i_2)} \frac{1}{p_{i_1}! p_{i_2}!} \int_0^1 \int_0^1 (1-t_{i_1})^{p_{i_1}} (1-t_{i_2})^{p_{i_2}} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial^{p_{i_1}+p_{i_2}+2} F(1 \dots 1, t_{i_1} \dots t_{i_2}, 1 \dots 1)}{\partial t_{i_1}^{p_{i_1}+1} \partial t_{i_2}^{p_{i_2}+1}} dt_{i_1} dt_{i_2} + \dots + \\ & + (-1)^{k-1} \frac{1}{p_1! \dots p_k!} \int_0^1 \dots \int_0^1 (1-t_1)^{p_1} \dots (1-t_k)^{p_k} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial^{p_1+\dots+p_k+k} F(t_1 t_2 \dots t_k)}{\partial t_1^{p_1+1} \dots \partial t_k^{p_k+1}} dt_1 dt_2 \dots dt_k. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Questa è appunto la formula che volevamo ottenere. Facendo in essa $k=n$, $\nu_1=\nu_2=\dots=\nu_n=1$, si ha di nuovo la (9) (con un semplice cambiamento di variabili): ponendovi invece $k=1$, $\nu=n$, si ha la formula:

$$\left. \begin{aligned} f(b_1 b_2 \dots b_n) = & f(a_1 a_2 \dots a_n) + U_1 + U_2 + \dots + U_m + \\ & + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \frac{d^{n+1} F(t)}{dt^{m+1}} dt, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

nella quale con U_i abbiamo indicato il complesso dei termini della serie (11) che hanno la dimensione i , e la quale perciò coincide colla ordinaria forma della formula di TAYLOR per le funzioni di n variabili, quando il resto si esprima mediante un integrale definito.

È chiaro poi come sulla (18) possa eseguirsi una trasformazione analoga a quella che dalla (9) ha condotto alle forme del resto di SCLÖMICH e ROCHE, di LAGRANGE e di CAUCHY.

7. Le considerazioni che seguono, relative alle serie multiple, servono a porre in più chiara luce il significato e la portata della formula (18).

Come è noto, una serie n -pla, (i cui termini dipendono cioè da n indici):

$$\sum U_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} (\mu_i = 1, 2 \dots) \quad (22)$$

dicesi *convergente* quando la somma $S_{m_1 m_2 \dots m_n}$ dei primi m_1, m_2, \dots, m_n ter-

mini della serie stessa (pei quali cioè si ha $\mu_i \leq m_i$) tende ad un limite determinato e finito S , *somma* della serie, quando *tutti* gli indici m_i si facciano tendere *insieme* all'infinito, affatto indipendentemente l'uno dall'altro.

Ma sulla serie (22) può procedersi ancora altrimenti. Se ne può ad es. cercare la somma per *linee*, facendo nella somma $S_{m_1 m_2 \dots m_n}$ tendere ciascun indice m_i *separatamente* e *successivamente* all'infinito; o, più generalmente, distribuiti gli indici m_1, m_2, \dots, m_n in gruppi, si può in $S_{m_1 \dots m_n}$ far tendere *separatamente* e *successivamente* all'infinito gli indici di ogni singolo gruppo, sostituendo in tal guisa alla ricerca di un limite n -plo la ricerca successiva di n limiti semplici, o, più generalmente, di più limiti, ciascuno dei quali abbia una molteplicità inferiore ad n .

Sulla serie multipla (22) si può ancora operare al modo seguente:

Distribuiamo gli n indici m_1, m_2, \dots, m_n in k gruppi ($k \leq n$) rispettivamente di $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k$ elementi (con $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$) e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu_1}$ gli elementi del primo gruppo, $\beta_1, \dots, \beta_{\nu_2}$ quelli del secondo, $\dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_k}$ quelli dell'ultimo gruppo. Riunendo allora in un solo tutti quei termini della serie, per i quali ciascuna delle somme:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\nu_1}; \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu_2}, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\nu_k}$$

ha un valore determinato, dalla serie n -pla data otteniamo una serie k -pla, della quale potremo cercare la somma o direttamente o con uno qualunque dei processi sopra descritti.

È senz'altro evidente come dalla convergenza della serie data non segua affatto, in generale, l'esistenza di uno qualunque dei limiti sopra indicati e, quando anche esistano, tanto meno la loro uguaglianza colla somma S della serie. Vi è però una classe importantissima di serie, per cui una tale proprietà ha luogo, ed è quella delle serie *assolutamente convergenti*, le quali cioè restano convergenti quando ad ogni termine si sostituisca il suo valore assoluto; queste serie convergono infatti *incondizionatamente*, cioè *indipendentemente dall'ordine dei termini*, e per esse uno qualunque dei processi di addizione sopra descritti conduce sempre allo stesso limite S , somma della serie (*).

(*) Cf. A. PRINGSHEIM, *Zur Theorie der Doppelreihen* (Münchener Berichte, 1897, H. 1, s. 101 u. ff).

Ora la formula (18), come è chiaro senz'altro, esprime la somma dei primi $(p_1 + 1) \dots (p_k + 1)$ termini della serie k -pla, che si ottiene dalla serie (11) di TAYLOR per la funzione $f(x_1 \dots x_n)$, quando gli n indici $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ si distribuiscano nei k gruppi (19) del n.º 6, e si riuniscano in uno solo quei termini, per i quali gli indici di ciascun gruppo hanno una somma costante. In ciò appunto sta, secondo noi, il significato e l'importanza di essa formula, in quanto essa permette di assegnare in forma finita per un'intiera classe di serie (a parte la loro convergenza o meno) la somma dei primi termini di una qualunque delle serie dedotte dalla data al modo indicato. Se questo accada ancora per altre classi di serie, a me non è noto, nè credo sia stato mai finora studiato.

Contigliano, li 13 Febbraio 1902.
