

# Zur Theorie der Moduln.

Von

ERNST STEINITZ in Charlottenburg.

---

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf diejenigen Moduln, deren Einführung in die Zahlentheorie man Dedekind verdankt. Im elften Supplement zu den von ihm herausgegebenen Dirichlet'schen Vorlesungen findet sich die Theorie der Moduln in ihren Grundzügen dargestellt. Ausserdem kommen hier noch zwei Arbeiten in Betracht: Frobenius: Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten; Frobenius und Stickelberger: Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 86, 88). In der letzteren ist der Zusammenhang zwischen den Moduln und den Gruppen vertauschbarer Elemente klargelegt, und es ist hiernach ein Leichtes, die Resultate, welche in der einen Theorie gewonnen werden, auf die andere zu übertragen. Daher werde ich mich, obgleich es nahe läge, gruppentheoretische Fragen mit in Betracht zu ziehen, auf die Behandlung der Moduln beschränken.

Ich führe zunächst die wichtigsten hierher gehörigen Sätze von Dedekind und Frobenius an in der Form und mit den Bezeichnungen, deren ich mich in der Folge stets bedienen werde.

## § 1.

### Rechteckige Systeme; ihre Eintheilung in Classen.

#### 1. Rechteckige Systeme.

Mit grossen lateinischen Buchstaben werden im Folgenden Systeme von ganzen rationalen Zahlen\*) bezeichnet, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Auf solche Systeme sollen die Operationen: Addition, Subtraction, Multiplication in der Weise angewandt werden, wie dies allgemein üblich ist. Die Ausführbarkeit der Addition und

---

\*) An dieser Voraussetzung, dass die Elemente ganze rationale Zahlen sind, wird stets festgehalten werden.

Subtraction erfordert, dass die rechteckigen Systeme gleich viele Zeilen und gleich viele Columnen enthalten, die Ausführbarkeit der Multiplication, dass die Anzahl der Columnen eines jeden Factors gleich der Anzahl der Zeilen des folgenden ist, das Product hat dann so viele Zeilen wie sein erster und so viele Columnen wie sein letzter Factor.

Die Anzahl der Columnen eines rechteckigen Systems  $A$  heisse sein Grad. Ist derselbe gleich  $n$  und  $0 < k \leq n$ , so heisst der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten  $k^{\text{ten}}$  Grades in  $A$  „der  $k^{\text{te}}$  Determinantentheiler von  $A$ “. Dabei sei noch bemerkt, dass der grösste gemeinsame Theiler gegebener Zahlen positiv genommen und nur dann  $= 0$  gesetzt werden soll, wenn die Zahlen sämmtlich gleich Null sind. Ist die Anzahl  $r$  der Zeilen von  $A < n$ , so sollen doch  $n$  Determinantentheiler gezählt werden, indem bestimmt wird, dass für  $k > r$  der  $k^{\text{te}}$  Determinantentheiler  $= 0$  zu setzen ist. Die Anzahl der von 0 verschiedenen Determinantentheiler eines Rechtecks heisst sein „Rang“.

Ist das System  $A$  quadratisch, so wird es Diagonalsystem genannt, wenn alle Elemente ausserhalb der Diagonale verschwinden. Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Diagonalelemente eines solchen Systems, so soll dasselbe auch mit  $\text{Dg}(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  bezeichnet werden. Dieses Diagonalsystem heisst ein „Hauptsystem“, wenn keines der Elemente  $a$  negativ und ein jedes Divisor des folgenden ist. Ein quadratisches System  $A$  heisst unimodular, wenn seine „Norm“ ( $Nm A$ ) — d. h. der absolute Werth seiner Determinante — gleich 1 ist. Mit dem Buchstaben  $E$  sollen stets nur unimodulare Systeme, mit dem Symbol  $E_+$  solche von der Determinante  $+1$  bezeichnet werden. Ist  $E^0$  das Diagonalsystem  $n^{\text{ten}}$  Grades, dessen sämmtliche Diagonalelemente gleich 1 sind, so bestehen für jedes quadratische System  $n^{\text{ten}}$  Grades  $A$  die Gleichungen  $AE^0 = A$ ,  $E^0A = A$ , und zu jedem unimodularen System  $E$  gehört ein zweites  $E^{-1}$ , für welches  $EE^{-1} = E^{-1}E = E^0$  wird.

## 2. Eintheilung der quadratischen Systeme in Classen.

Wir wollen uns nun zunächst auf die Betrachtung quadratischer Systeme beschränken.

Definition 1. Sind  $A$  und  $B$  quadratische Systeme desselben Grades  $n$ , und lässt  $A$  sich darstellen als ein Product, in welchem  $B$  als Factor enthalten ist, so wird gesagt: „Die Classe des Systems  $A$  (Cl  $A$ ) ist theilbar durch die Classe des Systems  $B$ “.

Ist Cl  $A$  theilbar durch Cl  $B$ , Cl  $B$  theilbar durch Cl  $C$ , so ist, wie man sofort erkennt, auch Cl  $A$  theilbar durch Cl  $C$ .

Definition 2. Zwei Classen heissen gleich, wenn jede durch die andere theilbar ist.

Man überzeugt sich leicht von der Zulässigkeit dieser Definitionen. — Die sämmtlichen quadratischen Systeme werden hiernach in

Classen eingetheilt, jede Classe ist durch ein einziges in ihr enthaltenes System vollständig bestimmt.

Es entstehen nun die Aufgaben: wenn zwei quadratische Systeme  $A$  und  $B$  gegeben sind, zu entscheiden, ob  $\text{Cl } A$  durch  $\text{Cl } B$  theilbar ist, bez. ob die Systeme  $A$  und  $B$  derselben Classe angehören. Diese Fragen werden durch zwei, wohl zuerst von Frobenius entwickelte im Folgenden als Fundamentalsatz I und II bezeichnete Theoreme entschieden.

Fundamentalsatz I. Damit zwei quadratische Systeme  $A$  und  $B$  derselben Classe angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass sie dieselben Determinantentheiler besitzen. Ist diese Forderung erfüllt, so lässt sich  $A$  stets in der Form  $A = EBE'$  und, wenn überdies die Determinanten von  $A$  und  $B$  auch dem Vorzeichen nach übereinstimmen, auch in der Form  $A = E_+BE'_+$  darstellen.

Zu diesem Satze gesellt sich ein zweiter, welcher zugleich eine wichtige Eigenschaft der Determinantentheiler erkennen lässt.

Ia. Jede Classe enthält ein und nur ein Hauptsystem.

Ist  $\text{Dg}(e_1 | e_2 | \dots | e_n)$  ein Hauptsystem und sind  $d_1, d_2, \dots, d_n$  seine Determinantentheiler, so ist  $d_k = e_1 \cdot e_2 \dots e_k$ . Sind daher  $d_1, d_2, \dots, d_n$  die Determinantentheiler irgend eines quadratischen Systems, und sind die ersten  $r$  unter ihnen von 0 verschieden, so sind

$$e_1 = d_1, e_2 = \frac{d_2}{d_1}, \dots, e_r = \frac{d_r}{d_{r-1}}, e_{r+1} = 0, \dots, e_n = 0$$

die Elemente des Hauptsystems seiner Classe, also ist von den Quotienten  $\frac{d_1}{1}, \frac{d_2}{d_1}, \dots, \frac{d_r}{d_{r-1}}$  jeder ein Divisor des folgenden.

Die Diagonalelemente des Hauptsystems heissen die „Elementartheiler“ oder „Invarianten“ seiner Classe oder auch eines jeden Systems dieser Classe. Classen werden im Folgenden durch grosse griechische Buchstaben oder auch durch Angabe ihrer Invarianten bezeichnet, indem, wenn  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Invarianten von  $\text{Cl } A = A$  sind,

$$A = \text{Cl}(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$$

gesetzt wird. Alle Systeme einer Classe  $A$  stimmen im Grade, Range, in der Norm und den Determinantentheilern überein, wesshalb auch vom Grade, Range u. s. w. der Classe  $A$  gesprochen werden kann.

Fundamentalsatz II. Die Classe  $A$  ist dann und nur dann durch die Classe  $B$  theilbar, wenn jede Invariante von  $A$  durch die entsprechende Invariante von  $B$  theilbar ist.

Es mögen nun zur Erleichterung der Ausdrucksweise noch einige einfache Bezeichnungen eingeführt werden. Der grösste gemeinsame Theiler von  $s$  Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_s$  werde mit

$$(a_1, a_2, \dots, a_s)$$

bezeichnet, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches mit

$$[a_1, a_2, \dots a_s].$$

Das letztere ist, sobald eine der Zahlen  $a$  verschwindet,  $= 0$  zu setzen, sonst positiv zu nehmen. — Sind jetzt  $A_1, A_2, \dots A_s$  Classen  $n^{\text{ten}}$  Grades, ist

$$A_i = \text{Cl} (a_{i1} | a_{i2} | \dots a_{in}) \quad (i = 1, \dots s)$$

und wird

$$(a_{1k}, a_{2k}, \dots a_{sk}) = d_k, [a_{1k}, a_{2k}, \dots a_{sk}] = c_k \quad (k = 1, \dots n)$$

gesetzt, so bilden  $d_1, d_2, \dots d_n$  das Invariantensystem einer gewissen Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades, und dasselbe gilt von den Zahlen  $c_1, c_2, \dots c_n$ . Die erste dieser Classen sei mit

$$(A_1, A_2, \dots A_s),$$

die zweite mit

$$[A_1, A_2, \dots A_s]$$

bezeichnet.  $(A_1, A_2, \dots A_s)$  ist der grösste gemeinsame Divisor,  $[A_1, A_2, \dots A_s]$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Classen  $A_1, A_2, \dots A_s$ , d. h. die sämtlichen den Classen  $A_1, \dots A_s$  gemeinsamen Divisoren sind die sämtlichen Divisoren von  $(A_1, \dots A_s)$ , und die sämtlichen den Classen  $A_1, A_2, \dots A_s$  gemeinsamen Vielfachen sind die sämtlichen Vielfachen von  $[A_1, \dots A_s]$ . — Die Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades, deren Invarianten alle gleich 1 sind, welche daher ein Divisor jeder Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades ist, werde mit  $E^{(n)}$  bezeichnet (bez. nur durch  $E$ , wenn der Grad aus dem Zusammenhange ersichtlich ist). — Zwei Classen  $A, B$  heissen relativ prim, wenn  $(A, B) = E$  ist.

### 3. Classen von positiver Norm.

Ist  $A = \text{Cl} (a_1 | a_2 | \dots a_n)$  eine Classe von positiver Norm und  $\text{Nm } A = a$  das Product der relativen Primzahlen  $a', a''$ , so hat  $A$  nur einen Divisor  $A'$  von der Norm  $a'$  und einen Divisor  $A''$  von der Norm  $a''$ . Diese Classen

$$A' = \text{Cl} ((a_1, a') | (a_2, a') | \dots (a_n, a')),$$

$$A'' = \text{Cl} ((a_1, a'') | (a_2, a'') | \dots (a_n, a''))$$

heissen „Componenten“ von  $A$ ,  $A$  ist in die Componenten  $A'$  und  $A''$  „zerlegbar“. Charakteristisch für diese Zerlegbarkeit sind die Relationen

$$(A', A'') = E, [A', A''] = A.$$

Die Zerlegung von  $A$  kann soweit fortgesetzt werden, bis man zu primären Classen gelangt, d. h. zu solchen Classen, deren Norm die Potenz einer Primzahl ist. Bezeichnet man allgemein, unter  $m$  eine

positive ganze Zahl, unter  $p$  eine Primzahl verstehend, mit  $m$  die höchste in  $m$  aufgehende Potenz von  $p$ , und setzt man dementsprechend

$$A_p = \text{Cl} \left( a_1 \Big|_p \ a_2 \Big|_p \ \dots \ a_n \Big|_p \right),$$

so ist  $A_p$  die primäre Componente von  $A$ , welche der Primzahl  $p$  entspricht. Für Primzahlen  $p$ , die in  $\text{Nm } A$  nicht aufgehen, wird  $A_p = E$ . Jede Classe  $A$  von positiver Norm lässt sich nur auf eine Weise in primäre Componenten zerlegen und ist das kleinste gemeinsame Vielfache derselben. Ist  $A$  durch  $B$  theilbar, so ist für jede Primzahl  $p$   $A_p$  durch  $B_p$  theilbar, und wenn für jede Primzahl  $p$   $A_p$  durch  $B_p$  theilbar ist, so ist  $A$  durch  $B$  theilbar. Sind  $A_1, A_2, \dots, A_s, \Delta, \Gamma$  Classen von positiver Norm, so sind die Relationen

$$(A_1, A_2, \dots, A_s) = \Delta, \quad [A_1, A_2, \dots, A_s] = \Gamma$$

bez. äquivalent den Relationensystemen

$$\left( A_1 \Big|_p, A_2 \Big|_p, \dots, A_s \Big|_p \right) = \Delta \Big|_p, \quad \left[ A_1 \Big|_p, A_2 \Big|_p, \dots, A_s \Big|_p \right] = \Gamma \Big|_p.$$

#### 4. Eintheilung der rechteckigen Systeme in Classen.

Um nun auch alle rechteckigen Systeme in die Classen einzureihen, werde festgesetzt, dass jedes rechteckige System  $A$  der Classe angehören soll, welche dieselben Determinantentheiler besitzt wie  $A$ . Werden die Invarianten der Classe  $\text{Cl } A$  auch als Invarianten des Systems  $A$  bezeichnet, so gilt der Satz:

Sind  $A$  und  $B$  rechteckige Systeme, so ist, damit eine Gleichung von der Form

$$A = P \cdot B \cdot Q$$

möglich sei, nothwendig und hinreichend, dass  $\text{Rg } A \leq \text{Rg } B$  und jede positive Invariante von  $A$  durch die entsprechende Invariante von  $B$  theilbar ist.

Falls  $A$  und  $B$  gleichen Grad haben, kommt diese Bedingung darauf hinaus, dass  $\text{Cl } A$  durch  $\text{Cl } B$  theilbar sein muss. Haben die Rechtecke  $A$  und  $B$  gleichen Grad ( $n$ ) und dieselbe Anzahl von Zeilen ( $r$ ) und ist  $\text{Cl } A$  durch  $\text{Cl } B$  theilbar, so sind in einer Gleichung von der Form  $A = P \cdot B \cdot Q$   $P$  und  $Q$  quadratische Systeme, und wenn  $\text{Cl } A = \text{Cl } B$  ist, so kann man es stets so einrichten, dass  $P$  und  $Q$  unimodular werden.

## § 2.

## Moduln.

Ein System von Zahlen heisst nach Dedekind ein „Modul“, wenn die Differenz zweier beliebiger Zahlen des Systems wieder dem System angehört. Der Modul  $\alpha$  heisst theilbar durch den Modul  $\mathfrak{b}$  (ein Vielfaches von  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{b}$  ein Divisor von  $\alpha$ ), wenn jede Zahl von  $\alpha$  auch in  $\mathfrak{b}$  enthalten ist. Gehören die Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$$

dem Modul  $\alpha$  an, so gilt dasselbe von jeder Zahl von der Form

$$(1) \quad \alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_r \alpha_r,$$

worin die Coefficienten  $c$  ganze rationale Zahlen bedeuten. Der Modul  $\alpha$  heisst ein endlicher, wenn man ihm eine endliche Anzahl von Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  entnehmen kann so, dass jede Zahl von  $\alpha$  in der Form (1) darstellbar ist. Von den Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  heisst es dann, dass sie eine Basis von  $\alpha$  bilden, und es werde dies gekennzeichnet, indem

$$\alpha = \text{Md} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

gesetzt wird. Die Basis heisst eine reducirte, wenn der Ausdruck (1) nicht anders verschwinden kann, als indem alle Coefficienten verschwinden. Dann lässt sich jede Zahl  $\alpha$  von  $\alpha$  nur auf eine Weise in die Form (1) bringen, jede Basis von  $\alpha$  besteht aus wenigstens  $r$  Zahlen, und der Modul  $\alpha$  wird ein  $r$ -gliedriger genannt. Jedes Vielfache eines  $r$ -gliedrigen Moduls ist höchstens  $r$ -gliedrig.

Hat man einen  $n$ -gliedrigen Modul

$$\mathfrak{c} = \text{Md} (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

betrachtet man nur Zahlen dieses Moduls, und nimmt man mit diesen Zahlen keine anderen Operationen als Addition und Subtraction vor, so können die Basiselemente  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  als unbestimmte Grössen betrachtet werden. Es kommt dies darauf hinaus, an Stelle der in  $\mathfrak{c}$  enthaltenen Zahlen

$$\eta = c_1 \eta_1 + \dots + c_n \eta_n$$

die Systeme der  $n$  Coefficienten

$$c_1, c_2, \dots, c_n,$$

vermöge deren sich die Zahlen  $\eta$  aus den Zahlen  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  zusammensetzen, zu betrachten. Ein solches Coefficientensystem denken wir uns stets in einer horizontalen Reihe angeordnet. Indem wir dies thun, im Uebrigen aber die bisher gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, haben wir unter einem Modul eine Gesammtheit von Systemen oder „Zeilen“  $\sigma$  zu verstehen, welche sich durch Subtraction reproduciren.

Es sei nun

$$\alpha = \text{Md} (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r)$$

ein beliebiger Modul. Bildet man das Rechteck  $A$ , dessen Zeilen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$  sind, so ist durch dasselbe der Modul  $\alpha$  vollständig bestimmt. Wir bezeichnen das Rechteck  $A$  als eine Basis des Moduls  $\alpha$  und setzen:

$$\alpha = \text{Md } A.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Modul  $\beta = \text{Md } B$  durch den Modul  $\alpha = \text{Md } A$  theilbar sei, besteht offenbar in der Existenz einer Gleichung von der Form

$$B = P \cdot A.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man die in § 1 angegebenen Definitionen und Sätze berücksichtigt:

Sind die Rechtecke  $A_1, A_2, \dots$  Basen eines und desselben Moduls  $\alpha$ , so gehören sie alle derselben Classe an. Diese Classe werden wir zweckmässig als die Classe des Moduls  $\alpha$  bezeichnen, sodass

$$\text{Cl } A_1 = \text{Cl } A_2 = \dots = \text{Cl } \alpha$$

wird. Indem wir nun die früher eingeführten Begriffe von der Classe auf die ihr angehörigen Moduln übertragen, ergibt sich von selbst, was wir unter dem Grade, dem Range, der Norm eines Moduls  $\alpha$  ( $\text{Gd } \alpha$ ,  $\text{Rg } \alpha$ ,  $\text{Nm } \alpha$ ), seinen Determinantentheilern und Invarianten werden zu verstehen haben. Man erkennt, dass der Rang eines Moduls dasselbe ist, was früher als seine Gliedrigkeit bezeichnet wurde, dass also ein Modul vom Range  $r$   $r$ -gliedrig ist. — Theilbarkeit kann natürlich nur zwischen Moduln desselben Grades stattfinden.

Ich führe nun einige wichtige Sätze aus der Theorie der Moduln an, von denen späterhin vielfach wird Gebrauch gemacht werden.

I. Ist  $\text{Rg } \alpha = r$ , so besitzt der Modul  $\alpha$  eine Basis von  $k$  Systemen dann und nur dann, wenn  $k \geq r$  ist. Da  $\text{Gd } \alpha \geq \text{Rg } \alpha$  ist, so besitzt jeder Modul  $n^{\text{ten}}$  Grades auch eine Basis von  $n$  Systemen (quadratische Basis).

II. Jeder Modul  $\alpha$  besitzt eine quadratische Basis von der Form  $AE$ , wo  $A$  das Hauptsystem von  $\text{Cl } \alpha$  ist.

Die Classe  $E^{(n)}$  besitzt nur einen Modul, derselbe ist ein Divisor jedes Moduls  $n^{\text{ten}}$  Grades; er werde mit  $e^{(n)}$  (bez.  $e$ ) bezeichnet. Jedes unimodulare System  $n^{\text{ten}}$  Grades ist eine Basis von  $e^{(n)}$ . — Satz II kann nun auch so formulirt werden:

IIa. Ist  $\text{Cl } \alpha = A = \text{Cl} (a_1 | a_2 | \dots a_n)$ , so kann man  $n$  Zeilen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$  angeben von der Beschaffenheit, dass

$$\text{Md} (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = e, \quad \text{Md} (a_1 \cdot \alpha_1, a_2 \cdot \alpha_2, \dots a_n \cdot \alpha_n) = \alpha$$

wird. Ist  $\text{Rg } \alpha = r$ , so ist  $\alpha$  auch gleich  $\text{Md} (a_1 \alpha_1, \dots a_r \alpha_r)$ .

III. Ist der Modul  $\alpha$  ein Vielfaches von  $\mathfrak{b}$ , so ist  $\text{Cl } \alpha$  ein Vielfaches von  $\text{Cl } \mathfrak{b}$ ; und wenn die Classe  $A$  ein Vielfaches von  $B$  ist, so besitzt jeder Modul von  $A$  wenigstens einen Divisor innerhalb  $B$  und jeder Modul von  $B$  wenigstens ein Vielfaches innerhalb  $A$ .

IV. Ist  $\alpha$  ein Vielfaches von  $\mathfrak{b}$ ,  $\text{Cl } \alpha$  ein Divisor von  $\text{Cl } \mathfrak{b}$ , so ist  $\alpha = \mathfrak{b}$ .

Sind  $\alpha_1 = \text{Md } A_1, \alpha_2 = \text{Md } A_2, \dots, \alpha_s = \text{Md } A_s$  Moduln desselben Grades  $n$ , so besitzen sie einen grössten gemeinsamen Divisor, d. h. es existirt ein bestimmter Modul  $\mathfrak{b}$  von der Beschaffenheit, dass jeder den Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  gemeinsame Divisor ein Divisor von  $\mathfrak{b}$  ist, und umgekehrt. Das Rechteck, dessen Zeilen die sämtlichen Zeilen der Rechtecke  $A_1, A_2, \dots, A_s$  sind, ist eine Basis dieses Moduls. Die Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  haben aber auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches, d. h. es existirt ein bestimmter Modul  $\mathfrak{c}$  von der Beschaffenheit, dass jedes den Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  gemeinsame Vielfache ein Vielfaches von  $\mathfrak{c}$  ist, und umgekehrt. Einfache Ueberlegungen zeigen, wie man durch eine endliche Anzahl von Operationen eine Basis dieses Moduls  $\mathfrak{c}$  finden kann auch in den Fällen, in welchen unter den Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  solche von verschwindender Norm sich vorfinden. Es werde mit

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s), [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]^*)$$

der grösste gemeinsame Theiler bez. das kleinste gemeinsame Vielfache der Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  bezeichnet.

Dass der Modul  $\alpha$  ein Vielfaches des Moduls  $\mathfrak{b}$  ist, kann durch jede der Gleichungen

$$(\alpha, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}, [\alpha, \mathfrak{b}] = \alpha$$

ausgedrückt werden, aber auch, weil  $(\alpha, \mathfrak{b})$  jedenfalls Divisor von  $\mathfrak{b}$  ist, (zufolge Satz IV) durch die Gleichung

$$\text{Cl } (\alpha, \mathfrak{b}) = \text{Cl } \mathfrak{b}.$$

Hierin hat man ein einfaches Mittel, um zu erkennen, ob von zwei Moduln  $\alpha, \mathfrak{b}$ , deren jeder durch eine Basis gegeben ist, der erste den zweiten zum Divisor hat. Da man nämlich dann auch eine Basis von  $(\alpha, \mathfrak{b})$  hat, so kann man sofort die Classe des Moduls  $(\alpha, \mathfrak{b})$  bestimmen, und hat nur zu sehen, ob dieselbe mit  $\text{Cl } \mathfrak{b}$  identisch ist oder nicht.

V. Zwischen den Normen zweier Moduln  $\alpha, \mathfrak{b}$ , ihres grössten gemeinsamen Theilers und ihres kleinsten gemeinsamen Vielfachen besteht die Beziehung:

$$\text{Nm } \alpha \cdot \text{Nm } \mathfrak{b} = \text{Nm } (\alpha, \mathfrak{b}) \cdot \text{Nm } [\alpha, \mathfrak{b}].$$

Ist  $A$  das Hauptssystem der Classe  $A$ , so heisse der Modul  $\text{Md } A$  der „Hauptmodul“ der Classe  $A$ . — Damit die Classe  $A$  durch  $B$  theilbar

\*) Bei Dedekind  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$  bez.  $\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_s$ .

sei, ist nothwendig und hinreichend, dass der Hauptmodul von  $A$  durch den Hauptmodul von  $B$  theilbar ist. Der grösste gemeinsame Theiler (bez. das kleinste gemeinsame Vielfache) der Hauptmoduln der Classen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  ist der Hauptmodul der Classe  $(A_1, A_2, \dots, A_s)$  (bez.  $[A_1, A_2, \dots, A_s]$ ). Zwei Moduln  $a, b$  heissen relativ prim, wenn  $(a, b) = e$  ist.

## 2. Unimodulare Transformationen.

Sind  $A$  und  $B$  quadratische Systeme  $n^{\text{ten}}$  Grades, ist  $E$  ein unimodulares System desselben Grades und besteht zwischen  $A$  und  $B$  eine Gleichung von der Form

$$(2) \quad A = CB,$$

so folgt

$$(3) \quad AE = CBE.$$

Umgekehrt ist auch (2) eine Folge von (3). Dieses Resultat kann so ausgesprochen werden:

Ist  $\text{Md } A$  theilbar durch  $\text{Md } B$ , so ist  $\text{Md } AE$  theilbar durch  $\text{Md } BE$ , und umgekehrt. — Von den Beziehungen

$$(4) \quad \text{Md } A = \text{Md } B, \quad \text{Md } AE = \text{Md } BE$$

ist daher jede eine Folge der andern. Für jede quadratische Basis  $A$  eines bestimmten Moduls  $\alpha$  stellt also  $AE$  die Basis eines bestimmten zweiten Moduls  $\alpha'$  dar. Wir sagen deshalb:

„Der Modul  $\alpha$  wird durch die unimodulare Transformation  $[E]$  in den Modul  $\alpha'$  übergeführt“

und setzen

$$\alpha' = \alpha E.$$

Die inverse Transformation  $[E^{-1}]$  führt  $\alpha'$  in  $\alpha$  zurück. —

Aus der Aequivalenz der Gleichungen (2), (3) folgt weiter:

VI. Ist der Modul  $\alpha$  durch den Modul  $b$  theilbar, so ist  $\alpha E$  theilbar durch  $bE$ , und umgekehrt.

Durch einfache Ueberlegung schliesst man hieraus:

VII. Der grösste gemeinsame Divisor (das kleinste gemeinsame Vielfache) der Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  wird durch die unimodulare Transformation  $[E]$  in den grössten gem. Theiler (bez. das kleinste gem. Vielfache) der transformirten Moduln übergeführt; oder die Relationen

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)E = (\alpha_1 E, \alpha_2 E, \dots, \alpha_s E),$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]E = [a_1 E, a_2 E, \dots, a_s E]$$

bestehen identisch.

Ist  $A$  eine quadratische Basis des Moduls  $\alpha$ ,  $\alpha E = \alpha'$ , so ist  $\alpha' = \text{Md } AE$ ,  $\text{Cl } \alpha' = \text{Cl } AE = \text{Cl } A = \text{Cl } \alpha$ . Ist umgekehrt  $\alpha' = \text{Md } A'$

ein Modul der Classe  $\text{Cl } \alpha$ ,  $A'$  quadratisch, so kann (Fundamentalsatz I)  $A' = E_1 A E_2$  gesetzt werden, und es folgt

$$\alpha' = \text{Md } E_1 A E_2 = \text{Md } A E_2 = \alpha E_2.$$

Also:

VIII. Ein Modul  $\alpha$  kann durch unimodulare Transformationen in jeden Modul seiner Classe aber in keinen weiteren Modul übergeführt werden.

Hierauf beruht es, dass alle wesentlichen Eigenschaften eines Moduls durch seine Classe bestimmt sind.

Eine der wichtigsten von uns zu lösenden Aufgaben soll in der Bestimmung der Anzahl von Moduln bestehen, welche zu derselben (durch ihr Invariantensystem gegebenen) Classe  $A$  gehören. Wir bezeichnen diese Anzahl, welche eine „Function von  $A$ “ darstellt, mit

$$\psi(A).$$

Man erkennt leicht, dass für Classen, deren Norm verschwindet,  $\psi(A) = \infty$  wird, mit Ausnahme des Falles, dass alle Invarianten von  $A$  verschwinden, in welchem offenbar  $\psi(A) = 1$  zu setzen ist. Wir werden uns daher auf die Bestimmung der Function  $\psi$  für Classen von positiver Norm beschränken können.

### 3. Multiplication der Moduln mit einer Zahl.

Sind  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  Zeilen von je  $n$  ganzen Zahlen und ist  $m$  eine beliebige ganze Zahl, so besteht der Modul  $\text{Md } (m\alpha_1, m\alpha_2, \dots, m\alpha_r)$  aus allen Zeilen, welche aus den Zeilen des Moduls  $\text{Md } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  durch Multiplication mit  $m$  hervorgehen. Wir bezeichnen ihn mit „ $m \cdot \alpha$ “ und wollen  $m > 0$  voraussetzen. Ist alsdann  $\alpha$  durch  $\beta$  theilbar, so folgt, dass  $m\alpha$  durch  $m\beta$  theilbar ist, und umgekehrt. Hat der Modul  $\alpha$  die Invarianten  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , so hat  $m\alpha$  die Invarianten  $ma_1, ma_2, \dots, ma_n$ ; hat andererseits ein Modul  $c$  die Invarianten  $ma_1, ma_2, \dots, ma_n$ , so kann man  $c = m\alpha'$  setzen, und es sind dann  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Invarianten von  $\alpha'$ . Ist daher  $A = \text{Cl } (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  eine beliebige Classe und wird  $\text{Cl } (ma_1 | ma_2 | \dots | ma_n) = mA$  gesetzt, so enthalten die Classen  $A$  und  $mA$  gleich viele Moduln, d. h. es ist

$$\text{IX.} \quad \psi(m \cdot A) = \psi(A).$$

Die Classe  $E$  enthält nur den Modul  $e$ , mithin  $mE$  nur den einzigen Modul  $me$ , so dass für jedes unimodulare System  $E$   $meE = me$  wird.

X. Damit der Modul  $\alpha$  Divisor bez. Vielfaches von  $me$  sei, ist nothwendig (Satz III) und hinreichend, dass  $\text{Cl } \alpha = A$  Divisor bez. Vielfaches von  $mE$  ist.

Ist nämlich die angegebene Bedingung erfüllt, so ist der Hauptmodul  $\alpha'$  von  $A$  Divisor bez. Vielfaches von  $me$ . Sodann kann (Satz VIII)

$\alpha = \alpha' E$  gesetzt werden, woraus folgt, dass  $\alpha$  Divisor bez. Vielfaches von  $m \epsilon E = m \epsilon$  ist. — Ganz ähnlich beweist man den Satz:

XI. Ist  $A$  eine beliebige Classe desselben Grades wie  $E$ ,  $\alpha$  ein beliebiger Modul von  $A$ , so ist

$$\text{Cl}(\alpha, m \epsilon) = (A, m E), \quad \text{Cl}[\alpha, m \epsilon] = [A, m E].$$

#### 4. Moduln von positiver Norm.

XII. Ist  $\alpha$  ein Modul der Classe  $A$ ,  $\text{Nm } \alpha = \text{Nm } A = a > 0$ ,  $a$  das Product der relativen Primzahlen  $\alpha'$  und  $\alpha''$ , und sind  $A'$  und  $A''$  die Componenten von  $A$ , deren Normen bez.  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  sind, so hat  $\alpha$  einen und nur einen Divisor  $\alpha'$  in der Classe  $A'$  und ebenso einen und nur einen Divisor  $\alpha''$  in der Classe  $A''$ , und es ist

$$\alpha = [\alpha', \alpha''].$$

XIII. Sind die Classen der Moduln  $\alpha'$  und  $\alpha''$  relativ prim, so ist

$$\text{Cl}[\alpha', \alpha''] = [\text{Cl } \alpha', \text{Cl } \alpha''].$$

Beweise: Dass unter den in XII angegebenen Voraussetzungen  $\alpha$  einen Divisor  $\alpha'$  in der Classe  $A'$  hat, besagt schon Satz III. Wir wollen nun zeigen, dass  $\alpha$  ausser  $\alpha'$  überhaupt keinen Divisor von der Norm  $\alpha'$  hat. Hätte man nämlich noch einen zweiten solchen Modul  $\alpha_1'$ , so wären  $\alpha'$  und  $\alpha_1'$  Divisoren von  $\alpha$  und (Satz X) von  $\alpha' \epsilon$ , mithin wäre  $[\alpha', \alpha_1']$  ein Divisor von  $(\alpha, \alpha' \epsilon)$ ,  $\text{Cl}[\alpha', \alpha_1']$  ein Divisor von  $\text{Cl}(\alpha, \alpha' \epsilon) = (A, \alpha' E) = A' = \text{Cl } \alpha'$ , und aus Satz IV würde folgen  $[\alpha', \alpha_1'] = \alpha'$ , d. h.:  $\alpha_1'$  ist ein Divisor von  $\alpha'$ . Da aber die Normen von  $\alpha'$  und  $\alpha_1'$  positiv und gleich sind, so folgt  $\alpha_1' = \alpha'$ . Es hat daher  $\alpha$  nur einen Divisor  $\alpha'$  in  $A'$  und ebenso nur einen Divisor  $\alpha''$  in  $A''$ . — Aus dem Umstande, dass die Classen  $A' = \text{Cl } \alpha'$ ,  $A'' = \text{Cl } \alpha''$  relativ prim sind, kann man schon schliessen, dass  $[\alpha', \alpha'']$  der Classe  $A = [A', A'']$  angehört. Setzt man nämlich  $\text{Cl}[\alpha', \alpha''] = A_1$ , so ist  $\text{Nm } A_1 = \text{Nm}[\alpha', \alpha'']$  theilbar durch  $[\alpha', \alpha''] = a$ , andererseits ist (Satz V)

$$\text{Nm } A_1 = \text{Nm}[\alpha', \alpha''] = \frac{\alpha' \cdot \alpha''}{\text{Nm}(\alpha', \alpha'')} = \frac{a}{\text{Nm}(\alpha', \alpha'')}$$

ein Divisor von  $a$ , also  $\text{Nm } A_1 = a$ . Die Moduln  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ , welche nach dem Vorhergehenden dadurch eindeutig bestimmt sind, dass sie die Normen  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  haben und Divisoren von  $[\alpha', \alpha'']$  sind, müssen demnach den Componenten  $A_1'$ ,  $A_1''$  von  $A_1$  angehören, welche den Bedingungen  $\text{Nm } A_1' = \alpha'$ ,  $\text{Nm } A_1'' = \alpha''$  genügen, und diese können mit  $A'$ ,  $A''$  nur dann identisch sein, wenn auch  $A_1 = A$  ist. — Da endlich  $\alpha$  durch  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ , also auch durch  $[\alpha', \alpha'']$  theilbar und  $\text{Cl } \alpha = \text{Cl}[\alpha', \alpha'']$  ist, so folgt

$$\alpha = [\alpha', \alpha''].$$

Hiermit sind die Sätze XII, XIII bewiesen.

XIV. Ist der Modul  $\alpha$  von der Norm  $a (> 0)$  theilbar durch den Modul  $\mathfrak{b}$  von der Norm  $b$ , ist  $a$  das Product der relativen Primzahlen  $a'$  und  $a''$  und sind  $\alpha', \alpha''$  die Divisoren von  $\alpha$ , welche die Normen  $a', a''$  haben, so haben die Moduln  $\mathfrak{b}' = (\alpha', \mathfrak{b})$ ,  $\mathfrak{b}'' = (\alpha'', \mathfrak{b})$  die Normen  $b' = (a', b)$ ,  $b'' = (a'', b)$ , und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist  $\mathfrak{b}$ .

Beweis:  $\text{Nm} [\alpha', \mathfrak{b}] = \frac{a' \cdot b}{\text{Nm} (\alpha', \mathfrak{b})}$  ist Divisor von  $a' \cdot b$  aber auch von  $\text{Nm } \alpha = a = a' \cdot a''$ , also auch von  $a' \cdot (a'', b) = a' \cdot b''$ . Mithin ist  $\text{Nm } \mathfrak{b}' = \text{Nm} (\alpha', \mathfrak{b}) = \frac{a' \cdot b}{\text{Nm} [\alpha', \mathfrak{b}]}$  theilbar durch  $\frac{a' \cdot b}{a' \cdot b''} = \frac{b}{b''} = b'$ . Andererseits ist  $\text{Nm } \mathfrak{b}'$  offenbar Divisor von  $(a', b) = b'$ . Somit wird  $\text{Nm } \mathfrak{b}' = b'$  und ebenso  $\text{Nm } \mathfrak{b}'' = b''$ . Da  $b'$  und  $b''$  relativ prim sind, so folgt nach XII und XIII:  $\text{Nm} [\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''] = [b', b''] = \text{Nm } \mathfrak{b}$ , und da  $\mathfrak{b}$  durch  $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'']$  theilbar ist, so muss jetzt  $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''] = \mathfrak{b}$  sein.

Ist  $\alpha'$  ein Divisor des Moduls  $\alpha$  und  $\text{Cl } \alpha' = A'$  eine Componente von  $\text{Cl } \alpha = A$ , so nennen wir  $\alpha'$  eine „Componente von  $\alpha$ “. Aus XII, XIII ergibt sich, dass jeder Componente von  $A$  eine bestimmte Componente von  $\alpha$ , jeder Zerlegung von  $A$  in zwei Componenten  $A', A''$  eine Zerlegung von  $\alpha$  in zwei Componenten  $\alpha'$  und  $\alpha''$  entspricht, so dass  $[\alpha', \alpha''] = \alpha$  ist. Setzt man für  $\alpha'$  jeden Modul von  $A'$ , für  $\alpha''$  jeden Modul von  $A''$ , so stellt  $[\alpha', \alpha'']$  jeden Modul von  $A$  einmal dar, und mithin besteht die Relation

$$(5) \quad \psi(A) = \psi(A') \cdot \psi(A'').$$

Die Zerlegung des Moduls  $\alpha$  kann fortgesetzt werden, bis man zu seinen primären Componenten gelangt, deren Normen Primzahlpotenzen sind. Wir bezeichnen mit  $\alpha_p$  die der Classe  $A_p$  angehörige Componente von  $\alpha$ . Aus XIV ergibt sich nun der Satz:

XV. Sind  $\alpha$  und  $\mathfrak{b}$  Moduln von positiver Norm, so ist für die Theilbarkeit von  $\alpha$  durch  $\mathfrak{b}$  nothwendig und hinreichend, dass für jede Primzahl  $p$   $\mathfrak{b}_p$  Divisor von  $\alpha_p$  ist.

Hieraus folgt weiter

XVI. Sind  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  Moduln von positiver Norm, so sind die Relationen

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) &= b, \\ [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] &= c \end{aligned}$$

bez. äquivalent den Relationensystemen

$$\begin{aligned} (\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \dots, \alpha_{sp}) &= b_p, \\ [\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \dots, \alpha_{sp}] &= c_p. \end{aligned}$$

Endlich gewinnt man aus (5) noch die Formel:

$$\text{XVII.} \quad \psi(\mathbf{A}) = \prod_p \psi_p(\mathbf{A}),$$

in welcher das Product sich über alle Primzahlen oder auch nur über die in  $Nm \mathbf{A}$  aufgehenden erstreckt, da für die andern  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ ,  $\psi_p(\mathbf{A}) = 1$  wird.

## § 3.

Congruenzen; die Functionen  $\varphi_r$  und  $\varphi$ .

Zwei Zeilen  $\sigma, \sigma'$  von je  $n$  Elementen heissen congruent nach dem Modul  $n^{\text{ten}}$  Grades  $\alpha$  —

$$\sigma \equiv \sigma' \pmod{\alpha} —$$

wenn  $\sigma - \sigma'$  dem Modul  $\alpha$  angehört. Sind  $R, R'$  Rechtecke  $n^{\text{ten}}$  Grades von je  $r$  Zeilen, so bedeutet

$$R \equiv R' \pmod{\alpha},$$

dass jede Zeile von  $R$  der entsprechenden Zeile von  $R'$  congruent ist. Jede Zeile von  $n$  Elementen repräsentirt einen bestimmten Rest des Moduls  $\alpha$  in dem Sinne, dass congruente Zeilen als Repräsentanten desselben Restes angesehen werden. Ebenso repräsentirt ein Rechteck  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $r$  Zeilen einen bestimmten  $r$ -zeiligen Rest von  $\alpha$ . Aus der Congruenz

$$R \equiv R' \pmod{\alpha}$$

folgt

$$RE \equiv R'E \pmod{\alpha E},$$

wenn  $E$  ein beliebiges unimodulares System bezeichnet. Die unimodulare Transformation  $[E]$ , welche  $\alpha$  in  $\alpha E$  überführt, führt also gleichzeitig jeden Rest von  $\alpha$  in einen bestimmten Rest von  $\alpha E$  über. Da die Transformation eindeutig umkehrbar ist, so wird durch dieselbe eine eindeutige Beziehung zwischen den Resten von  $\alpha$  und  $\alpha E$  hergestellt. Hieraus und aus § 2, VIII folgt, dass für alle Moduln einer Classe die Anzahl der Reste von bestimmter Zeilenzahl gleich gross ist. Die Betrachtung des Hauptmoduls einer Classe  $\mathbf{A}$  zeigt, dass falls  $Nm \mathbf{A} \neq 0$  ist, die Anzahl der einzeiligen Reste eines Moduls von  $\alpha$  gleich  $Nm \mathbf{A}$  ist, und folglich ist die Anzahl der  $r$ -zeiligen Reste gleich  $(Nm \mathbf{A})^r$ . Ist dagegen  $Nm \mathbf{A} = 0$ , so ist offenbar die Anzahl der Reste unendlich gross.

Fügt man zu einer Basis des Moduls  $\alpha$  die Zeilen eines Rechtecks  $R$  hinzu, so entsteht eine Basis des Moduls

$$(\alpha, Md R),$$

den wir der Kürze halber nur mit

$$(\alpha, R)$$

bezeichnen wollen.  $(\alpha, R)$  ist Divisor von  $\alpha$ . Ist  $R \equiv R' \pmod{\alpha}$  so wird

$$(\alpha, R') = (\alpha, R).$$

Es werde jetzt  $\text{Nm } \alpha > 0$  vorausgesetzt und es stelle die Gleichung

$$\alpha = [\alpha', \alpha'']$$

eine Componentenzerlegung von  $\alpha$  dar, sodass  $(\alpha', \alpha'') = e$  ist. Jedem Reste  $R$  von  $\alpha$  entspricht alsdann ein bestimmter Rest  $R'$  von  $\alpha'$  und ein Rest  $R''$  von  $\alpha''$ , welche den Congruenzen

$$(1) \quad R \equiv R' \pmod{\alpha'}, \quad R \equiv R'' \pmod{\alpha''}$$

genügen. Umgekehrt ergibt sich leicht, (indem man z. B. die Anzahlen der Reste der Moduln  $\alpha, \alpha', \alpha''$  vergleicht,) dass zu jeder Combination aus einem Reste von  $\alpha'$  und einem Reste von  $\alpha''$  mit gleicher Zeilenanzahl ein Rest  $R$  von  $\alpha$  gehört, welcher durch die Congruenzen (1) bestimmt wird. — Wir beweisen nun den Satz:

I. Stellt die Gleichung

$$\alpha = [\alpha', \alpha'']$$

eine Componentenzerlegung von  $\alpha$  dar und bestehen zwischen den Resten  $R, R', R''$  von  $\alpha, \alpha', \alpha''$  die Congruenzen (1), so besteht zwischen den Moduln

$$\mathfrak{b} = (\alpha, R), \quad \mathfrak{b}' = (\alpha', R'), \quad \mathfrak{b}'' = (\alpha'', R'')$$

die Gleichung

$$\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''].$$

Beweis: Es ist

$$\mathfrak{b}' = (\alpha', R') = (\alpha', R) = ((\alpha, \alpha'), R) = (\alpha', (\alpha, R)) = (\alpha', \mathfrak{b}),$$

ebenso  $\mathfrak{b}'' = (\alpha'', \mathfrak{b})$ , also (§ 2, XIV)  $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''] = \mathfrak{b}$ .

Es bezeichne nun  $r$  eine positive ganze Zahl, und es werde die Anzahl der  $r$ -zeiligen Reste von  $\alpha$ , für welche

$$(\alpha, R) = e$$

wird, gleich

$$\varphi_r(\alpha)$$

gesetzt. Da für jeden Rest  $R$  und für jedes unimodulare System  $E$  die Relation

$$(\alpha E, R E) = (\alpha, R) E$$

besteht, so hat für alle Moduln derselben Classe die Function  $\varphi_r$  denselben Werth. Es ist also  $\varphi_r(\alpha)$  allein eine Function der Classe von  $\alpha$ ; wir setzen deshalb, wenn  $\text{Cl } \alpha = \mathbf{A}$  ist,

$$\varphi_r(\alpha) = \varphi_r(\mathbf{A}).$$

Indem wir uns nun der Bestimmung der Function  $\varphi_r(\mathbf{A})$  zuwenden, schliessen wir den Fall, dass  $\text{Nm } \mathbf{A} = 0$  ist, aus.

Stellt wieder

$$\alpha = [\alpha', \alpha'']$$

eine Componentenzerlegung von  $\alpha$  dar, und wird für  $R$  jeder  $r$ -zeilige Rest von  $\alpha$ , für  $R', R''$  jede Combination aus einem  $r$ -zeiligen Rest von  $\alpha'$  und einem ebensolchen von  $\alpha''$  gesetzt, so jedoch, dass  $R, R', R''$  durch die Congruenzen (1) verbunden sind, so ergibt sich aus I, dass die Gleichung

$$(2) \quad (\alpha, R) = e$$

äquivalent ist dem Gleichungssystem

$$(3) \quad (\alpha', R') = e, \quad (\alpha'', R'') = e.$$

Da nun (2) durch  $\varphi_r(\alpha)$  Reste  $R$ , (3) durch  $\varphi_r(\alpha') \cdot \varphi_r(\alpha'')$  Combinationen  $R', R''$  erfüllt wird, so folgt

$$\varphi_r(\alpha) = \varphi_r(\alpha') \cdot \varphi_r(\alpha''),$$

oder, wenn  $\text{Cl } \alpha' = A', \text{Cl } \alpha'' = A''$  gesetzt wird,

$$\varphi_r(A) = \varphi_r(A') \cdot \varphi_r(A'').$$

Durch Fortsetzung der Zerlegung von  $A$  bis auf primäre Componenten erhält man

$$\text{II.} \quad \varphi_r(A) = \prod_p \varphi_r(A_p).$$

Somit können wir uns darauf beschränken die Function  $\varphi_r$  für primäre Classen zu bestimmen,

Es sei  $A$  das Hauptsystem der primären Classe  $A = A_p$ , also  $\text{Md } A = \alpha = \alpha_p$  ihr Hauptmodul. Wir wollen annehmen, dass von den Invarianten  $A$  nur die  $q$  letzten durch  $p$  theilbar, die  $n - q$  ersten also gleich 1 seien. Soll für ein  $r$ -zeiliges Rechteck  $R$   $(\alpha, R) = e$  werden, so müssen in dem aus den Zeilen von  $A$  und  $R$  gebildeten Rechteck die Determinanten  $n^{\text{ten}}$  Grades die Einheit zum grössten gemeinsamen Theiler haben. Offenbar ist dies nur möglich, wenn  $r \geq q$  ist. Für  $r < q$  wird daher  $\varphi_r(A) = 0$ . Wir setzen jetzt  $r \geq q$  voraus. Damit  $(\alpha, R) = e$  werde, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten  $q^{\text{ten}}$  Grades, welche man den letzten  $q$  Columnen von  $R$  entnehmen kann, nicht sämmtlich durch  $p$  theilbar sind. — Der Modul  $(\alpha, p e)$  ist der Hauptmodul der Classe  $(A, p E)$ , deren erste  $n - q$  Invarianten gleich 1, deren letzte  $q$  Invarianten gleich  $p$  sind. Genügt das Rechteck  $R$  der Bedingung  $(\alpha, R) = e$ , so ist auch  $(\alpha, p e, R) = e$ ; umgekehrt folgt aus  $(\alpha, p e, R) = e$ , dass  $(\alpha, R) = e$  sein muss. Bedenkt man ferner, dass unter den Repräsentanten eines bestimmten  $r$ -zeiligen Restes von  $(\alpha, p e)$  genau  $\left(\frac{\text{Nm } \alpha}{p^q}\right)^r$  nach dem Modul  $\alpha$  incongruente Reste sich befinden, so erhält man die Beziehung

$$(4) \quad \varphi_r(\alpha) = \left(\frac{\text{Nm } \alpha}{p^q}\right)^r \cdot \varphi_r(\alpha, p e).$$

Zwei Rechtecke  $R_1, R_2$  sind modulo  $(\alpha, p\epsilon)$  congruent, wenn die von ihren  $q$  letzten Columnen gebildeten Rechtecke  $R_1', R_2'$  modulo  $p$  congruent sind. (Die Bezeichnung, dass zwei Rechtecke von gleichem Grade und gleicher Zeilenanzahl nach einer Zahl als Modul congruent sind, drückt aus, dass je zwei entsprechende Elemente dieser Rechtecke nach dieser Zahl congruent sind.) Mithin stellt  $\varphi_r(\alpha, p\epsilon)$  die Anzahl der mod.  $p$  incongruenten Rechtecke von  $r$  Zeilen und  $q (\leq r)$  Columnen dar, in denen nicht alle Determinanten  $q^{\text{ten}}$  Grades durch  $p$  theilbar sind. Diese Anzahl ist aber, wie eine einfache Berechnung ergibt\*), gleich

$$p^{qr} \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{r-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{r-q+1}}\right)$$

und mithin wird unter Berücksichtigung von (4)

$$(5) \quad \varphi_r(A) = (\text{Nm } A)^r \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{r-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{r-q+1}}\right).$$

Diese Gleichung bleibt auch für  $q > r$  richtig, da in diesem Falle der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) verschwindet.

Somit haben wir den folgenden Satz:

III. Ist  $A = A$  eine primäre Classe und sind  $q$  ihrer Invarianten durch  $p$  theilbar, (die übrigen also gleich 1), so ist

$$\varphi_r(A) = (\text{Nm } A)^r \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{r-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{r-q+1}}\right).$$

Es ist bemerkenswerth, dass der Ausdruck für  $\varphi_r(A)$  den Grad der Classe  $A$  gar nicht enthält. Wir wollen nun aber noch eine Function in die Rechnung einführen, bei welcher dieser Grad eine Rolle spielt: Ist  $n$  der Grad von  $A$ , so soll für  $\varphi_n(A)$  auch kurzweg  $\varphi(A)$  geschrieben werden. Für die Function  $\varphi$  gilt die Relation

$$\text{IIa.} \quad \varphi(A) = \prod_p \varphi_p(A).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\vartheta(p, k) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdots \left(\frac{1}{p^k}\right) \quad (k > 0)$$

$$\vartheta(p, 0) = 1,$$

so ergibt sich aus Satz III der folgende:

IIIa. Ist  $A = A$  eine primäre Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades, und sind  $q$  ihrer Invarianten durch  $p$  theilbar (die ersten  $n - q$  also gleich 1), so ist

$$\varphi(A) = (\text{Nm } A)^n \cdot \frac{\vartheta(p; n)}{\vartheta(p; n - q)}.$$

\*) Vergl. C. Jordan. *Traité des substitutions* Nr. 123.

## § 4.

Isomorphismus; die Function  $\chi$ .

## Definition des Isomorphismus.

Lässt sich zwischen den Resten  $\varrho$  eines Moduln  $a$  und den Resten  $\varrho'$  eines Moduln  $a'$  eine solche eindeutige Beziehung herstellen, dass, wenn  $\varrho_i, \varrho'_i$  und  $\varrho_k, \varrho'_k$  zwei Paare zugeordneter Reste sind, stets  $\varrho_i + \varrho_k, \varrho'_i + \varrho'_k$  ebenfalls ein Paar zugeordneter Reste bilden, so wird die getroffene Zuordnung eine „isomorphe“ Beziehung zwischen  $a$  und  $a'$  genannt. Zwei Moduln  $a, a'$ , welche (wenigstens) eine isomorphe Beziehung zulassen, heißen „zu einander isomorph“\*). Die Beziehung des Isomorphismus ist also stets eine wechselseitige.

Sind  $\varrho_1, \varrho_2, \dots$  die sämtlichen Reste von  $a$ ,  $\varrho'_1, \varrho'_2, \dots$  (in dieser Reihenfolge) die isomorph zugeordneten Reste von  $a'$ , so werde die vorliegende isomorphe Beziehung durch

$$\varrho_i || \varrho'_i$$

bezeichnet. Aus der Definition des Isomorphismus folgt leicht, dass allgemein

$$\sum_i c_i \varrho_i, \quad \sum_i c_i \varrho'_i$$

entsprechende Reste von  $a$  und  $a'$  sind. Ist  $a'$  isomorph zu  $a''$  und stellt

$$\varrho'_i || \varrho''_i$$

eine isomorphe Beziehung zwischen  $a'$  und  $a''$  dar, so ist

$$\varrho_i || \varrho''_i$$

eine isomorphe Beziehung zwischen  $a$  und  $a''$ , welche „aus  $\varrho_i || \varrho'_i$  und  $\varrho'_i || \varrho''_i$  zusammengesetzt“ heisst. Setzt man die isomorphe Beziehung  $\varrho_i || \varrho'_i$  nach einander mit den sämtlichen verschiedenen isomorphen Beziehungen von  $a'$  zu  $a''$  zusammen, so erhält man ebensoviele isomorphe Beziehungen zwischen  $a$  und  $a''$ , und mit diesen sind alle erschöpft. Bezeichnet man demnach mit

$$\chi(a || a')$$

die Anzahl der zwischen zwei Moduln  $a$  und  $a'$  bestehenden isomorphen Beziehungen, so gilt der Satz:

Ist  $a$  isomorph zu  $a'$ ,  $a'$  isomorph zu  $a''$ , so ist  $a$  isomorph zu  $a''$  und

$$\chi(a || a'') = \chi(a' || a'') = \chi(a || a').$$

Die Moduln  $a, a', a''$  brauchen natürlich nicht alle verschieden zu sein. Nimmt man  $a = a''$  an, so erhält man — den Isomorphismus von  $a$  und  $a'$  vorausgesetzt —

$$\chi(a || a') = \chi(a || a) = \chi(a' || a').$$

\*) Die Bezeichnung isomorph ist der Gruppentheorie entnommen.

Eine isomorphe Beziehung eines Moduls  $\alpha$  auf sich selbst kann als eine Permutation unter seinen Resten gedeutet werden. Die so erhaltenen Permutationen bilden eine Gruppe;  $\chi(\alpha || \alpha)$ , wofür wir auch einfach

$$\chi(\alpha)$$

schreiben, ist die Ordnung dieser Gruppe.

Es soll nun näher untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Moduln  $\alpha$  und  $\alpha'$  isomorph sind. Man sieht leicht ein, dass dies der Fall ist, wenn sie derselben Classe angehören. Ist nämlich alsdann  $[E]$  eine unimodulare Transformation, welche  $\alpha$  in  $\alpha'$  überführt, so wird (§ 2) durch dieselbe auch jeder Rest von  $\alpha$  in einen Rest von  $\alpha'$  verwandelt und auf diese Weise eine eindeutige Beziehung zwischen den Resten von  $\alpha$  und  $\alpha'$  hergestellt, die man als eine isomorphe sofort erkennt.

Umgekehrt möge jetzt gezeigt werden, dass zwei isomorphe Moduln *desselben Grades*  $\alpha, \alpha'$  auch derselben Classe angehören müssen. Dabei kann auf Grund der vorangegangenen Betrachtungen, unbeschadet der Allgemeinheit des Beweises, vorausgesetzt werden, dass  $\alpha$  und  $\alpha'$  innerhalb ihrer Classen die Hauptmoduln sind. Es möge ferner der Fall, dass die Normen von  $\alpha$  und  $\alpha'$  verschwinden, ausgeschlossen werden, da derselbe für unseren Zweck nicht in Betracht kommt. Bezeichnet

$$\varrho_i || \varrho'_i$$

eine isomorphe Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\alpha'$ , ist  $m$  irgend eine ganze Zahl, und setzt man für  $\varrho_i, \varrho'_i$  successive alle Reste von  $\alpha, \alpha'$ , so gehört das System  $m\varrho_i$  ebenso oft dem Modul  $\alpha$  an, als das System  $m\varrho'_i$  dem Modul  $\alpha'$  angehört. Die Berechnung der gesuchten Anzahl gestaltet sich aber, wenn  $\alpha, \alpha'$  als Hauptmoduln vorausgesetzt werden, besonders einfach. Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Invarianten von  $\alpha, a'_1, a'_2, \dots, a'_n$  diejenigen von  $\alpha'$ , so erkennt man sogleich, dass die Anzahl der Reste  $\varrho_i$ , für welche  $m\varrho_i$  in  $\alpha$  enthalten ist, gleich

$$(m, a_1) \cdot (m, a_2) \cdot \dots \cdot (m, a_n)$$

wird, und ebenso ergibt sich für die Anzahl der Reste  $\varrho'_i$ , für welche  $m\varrho'_i$  dem Modul  $\alpha'$  angehört, der Ausdruck

$$(m, a'_1) \cdot (m, a'_2) \cdot \dots \cdot (m, a'_n).$$

Demnach muss für jede Zahl  $m$  die Gleichung

$$(m, a_1) (m, a_2) \cdot \dots \cdot (m, a_n) = (m, a'_1) (m, a'_2) \cdot \dots \cdot (m, a'_n)$$

bestehen, und dies kann, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, nur der Fall sein, wenn

$$a_1 = a'_1, a_2 = a'_2, \dots, a_n = a'_n$$

ist, wenn also  $\alpha$  und  $\alpha'$  derselben Classe angehören.

Sehr wohl aber können zwei Moduln verschiedenen Grades isomorph sein; die Frage nach dem Isomorphismus zweier Moduln wird durch folgenden Satz erledigt.

I. Zwei Moduln sind dann und nur dann isomorph, wenn ihre Invariantensysteme nach Ausscheidung der Invarianten, welche sich auf 1 reduciren, identisch sind.

Um zu beweisen, dass die ausgesprochene Bedingung eine hinreichende ist, nehmen wir an, es habe der Modul  $\alpha$  die Invarianten

$$a_1 = 1, \dots a_r = 1, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots a_n,$$

der Modul  $\alpha'$  die Invarianten

$$a'_1 = a_{r+1}, a'_2 = a_{r+2}, \dots a'_{n-r} = a_n,$$

dann ist zu zeigen, dass  $\alpha$  und  $\alpha'$  isomorph sind. Wir dürfen dabei  $\alpha$  und  $\alpha'$  als Hauptmoduln voraussetzen, und unter dieser Annahme gestaltet sich der Beweis sehr einfach. Bilden nämlich jetzt

$$q_1, q_2, \dots$$

ein vollständiges Restsystem in Bezug auf  $\alpha$ , und wird unter  $q'_i$  die Zeile verstanden, welche aus  $q_i$  durch Fortlassung der ersten  $r$  Elemente hervorgeht, so ergibt sich ohne Weiteres, dass

$$q'_1, q'_2, \dots$$

ein vollständiges Restsystem von  $\alpha'$  bilden, und dass durch

$$q_i \parallel q'_i$$

eine isomorphe Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\alpha'$  dargestellt wird. Verbindet man das soeben erhaltene Resultat mit dem früheren, wonach Moduln gleichen Grades nur dann isomorph sind, wenn sie zu derselben Classe gehören, so wird die Nothwendigkeit der im Satze I ausgesprochenen Bedingung klar.

Für die Function  $\chi$  können aus diesem Satze einige einfache Folgerungen gezogen werden. Zunächst zeigt es sich, dass für alle Moduln  $\alpha$  einer Classe A  $\chi$  denselben Werth hat, sodass das Symbol  $\chi(\alpha)$  zweckmässig wird durch

$$\chi(A)$$

ersetzt werden können. Sodann hat man den Satz:

II. Wenn die Invariantensysteme der Classen A und A' nach Ausscheidung der sich auf 1 reducirenden Invarianten identisch sind, so ist

$$\chi(A) = \chi(A').$$

## § 5.

Zusammenhang zwischen den Functionen  $\varphi, \chi, \psi$ .

Die von uns betrachteten Functionen  $\varphi, \chi, \psi$  stehen in einem sehr einfachen Zusammenhange, welcher durch die folgende Betrachtung klar wird.

Ist  $A$  eine Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades,  $\alpha$  ein Modul von  $A$ ,  $R$  ein  $r$ -zeiliger Rest von  $\alpha$ , so besteht, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, der Satz: Damit

$$(1) \quad (\alpha, R) = e$$

sei, ist nothwendig und hinreichend, dass man zu jeder Zeile  $\rho$  von  $n$  Elementen eine Zeile  $\sigma$  von  $r$  Elementen finden könne, welche der Congruenz

$$(2) \quad \sigma R \equiv \rho \pmod{\alpha}$$

genügt. — Nehmen wir nun an, die Gleichung (1) sei erfüllt und es sei  $r = n$ , dann bilden die sämtlichen  $\sigma$ , für welche  $\sigma R$  in  $\alpha$  enthalten ist, einen Modul  $\alpha'$  vom Grade  $n$ , die sämtlichen  $\sigma$ , welche einer Congruenz von der Form (2), worin  $\rho$  als gegeben zu betrachten ist, genügen, sind Repräsentanten eines bestimmten Restes von  $\alpha'$ , und umgekehrt: für alle Repräsentanten eines bestimmten Restes von  $\alpha'$  stellt  $\sigma R$  einen und denselben Rest von  $\alpha$  dar. Man erhält daher eine eindeutige Beziehung zwischen den Resten von  $\alpha$  und  $\alpha'$ , indem man jedem Rest  $\sigma$  von  $\alpha'$  den Rest  $\sigma R$  von  $\alpha$  entsprechen lässt, und diese Beziehung ist, wie man leicht sieht, eine isomorphe. Daraus folgt, dass der Modul  $\alpha'$  der Classe  $A$  angehört (§ 4, I). Wir wollen sagen, der Rest  $R$  von  $\alpha$  gehöre zum Modul  $\alpha'$  und wollen die durch  $R$  vermittelte isomorphe Beziehung mit  $[R]$  bezeichnen.

Ist  $R'$  ebenfalls ein  $n$ -zeiliger der Bedingung (1) genügender Rest von  $\alpha$ , aber von  $R$  verschieden, so kann  $R'$  wohl zu demselben Modul  $\alpha$  gehören, aber die isomorphe Beziehung  $[R']$  ist von  $[R]$  verschieden. Anderenfalls nämlich müsste für jede Zeile  $\sigma$  die Congruenz

$$\sigma R \equiv \sigma R' \pmod{\alpha}$$

bestehen, und hieraus würde man, indem man für  $\sigma$  nach einander die Zeilen des Systems

$$E^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

setzt, die Congruenz

$$R' \equiv R \pmod{\alpha}$$

folgern.

Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass, wenn man für  $R$  jeden  $n$ -zeiligen der Bedingung (1) genügenden Rest von  $\alpha$  setzt, durch das Symbol  $[R]$  jede zwischen  $\alpha$  und irgend einem Modul  $\alpha'$  von  $A$  mögliche isomorphe Beziehung einmal dargestellt wird. Ist nämlich eine solche Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\alpha'$  gegeben, werden durch dieselbe den durch die  $n$  Zeilen von  $E^0$  repräsentirten Resten von  $\alpha'$  die Reste  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$  von  $\alpha$  zugeordnet und ist  $R$  der von diesen gebildete  $n$ -zeilige Rest, so ergibt die Definition des Isomorphismus, dass dem Rest  $\sigma$  von  $\alpha'$  der Rest  $\sigma R$  von  $\alpha$  entsprechen muss. Da somit jeder Rest von  $\alpha$  in der Form  $\sigma R$  darstellbar ist, so ergibt sich zunächst, dass  $R$  der Bedingung

$$(\alpha, R) = e$$

genügt, und sodann weiter, dass die vorliegende isomorphe Beziehung mit der durch das Symbol  $[R]$  bezeichneten identisch ist.

Das Resultat dieser Betrachtungen ist, dass jeder der Reste  $R$ , deren Anzahl gleich  $\varphi(A)$  ist, zu einem bestimmten der  $\psi(A)$  Moduln der Classe  $A$  gehört, und dass zu jedem Modul  $\alpha'$  von  $A$   $\chi(A)$  Reste  $R$  gehören, so viele nämlich, als isomorphe Beziehungen zwischen  $\alpha$  und  $\alpha'$  existiren. So gelangt man zu der wichtigen Relation

$$I. \quad \varphi(A) = \chi(A) \cdot \psi(A).$$

Aus dieser und den Formeln (§ 3, II; § 2, XVII) erhält man noch die Beziehung

$$\chi(A) = \prod_p \chi_p(A),$$

welche sich natürlich auch leicht direct nachweisen liesse.

## § 6.

### Bestimmung der Functionen $\psi$ und $\chi$ .

Auf Grund der Sätze § 2, IX; § 4, II; § 5, I ist es nun leicht, die Functionen  $\psi$  und  $\chi$  zunächst als Quotienten aus Producten von  $\varphi$ -Functionen darzustellen.

Ist  $A = \text{Cl} (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  irgend eine Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades von positiver Norm, und setzt man

$$\begin{aligned} A' &= \text{Cl} \left( 1 \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \frac{a_3}{a_1} \left| \dots \frac{a_n}{a_1} \right. \right), \\ A_i &= \text{Cl} \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \left| \frac{a_{i+2}}{a_i} \right| \dots \frac{a_n}{a_i} \right) \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ A'_i &= \text{Cl} \left( 1 \left| \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \right| \frac{a_{i+3}}{a_{i+1}} \left| \dots \frac{a_n}{a_{i+1}} \right. \right), \end{aligned}$$

sodass  $A, A'_i$  Classen vom Grade  $n - i$  sind, so wird

$$\begin{aligned}
 A &= a_1 \cdot A', & A_i &= \frac{a_{i+1}}{a_i} \cdot A_i', \\
 \psi(A) &= \psi(A'), & \psi(A_i) &= \psi(A_i'), & (\S 2, IX), \\
 \psi(A') &= \frac{\varphi(A')}{\chi(A')}, & \psi(A_i') &= \frac{\varphi(A_i')}{\chi(A_i')}, & (\S 5, I), \\
 \chi(A') &= \chi(A_1), & \chi(A_i') &= \chi(A_{i+1}), & (\S 4, II), \\
 \chi(A_1) &= \frac{\varphi(A_1)}{\psi(A_1)}, & \chi(A_{i+1}) &= \frac{\varphi(A_{i+1})}{\psi(A_{i+1})}, & (\S 5, I),
 \end{aligned}$$

mithin

$$\psi(A) = \frac{\varphi(A')}{\varphi(A_1)} \psi(A_1), \quad \psi(A_i) = \frac{\varphi(A_i')}{\varphi(A_{i+1})} \psi(A_{i+1}).$$

Da  $\psi(A_{n-1}) = 1$  ist, so folgt aus diesen Relationen

$$\begin{aligned}
 I. & \quad \psi(A) = \frac{\varphi(A') \varphi(A_1') \dots \varphi(A_{n-2}')}{\varphi(A_1) \varphi(A_2) \dots \varphi(A_{n-1})}, \\
 II. & \quad \chi(A) = \frac{\varphi(A) \varphi(A_1) \dots \varphi(A_{n-1})}{\varphi(A') \varphi(A_1') \dots \varphi(A_{n-2}')}.
 \end{aligned}$$

Die weitere Ausrechnung, welche wir nur für die Function  $\psi$  durchführen wollen, erfordert, zunächst den Fall der primären Classe zu erledigen. Es sei also

$$\text{Cl}(a_1 | a_2 | \dots | a_n) = A = A_p = \text{Cl}(p^{r_1} | p^{r_2} | \dots | p^{r_n})$$

und somit

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n.$$

Mit  $e_1, e_2, \dots, e_k$  seien die verschiedenen unter den Exponenten  $r$  in ihrer natürlichen Reihenfolge bezeichnet. Kommt  $e_1$   $s_1$  mal,  $e_2$   $s_2$  mal,  $\dots, e_k$   $s_k$  mal unter den Exponenten  $r$  vor, so ist

$$(1) \quad s_1 + s_2 + \dots + s_k = n.$$

Unter den Differenzen  $r_m - r_l$ , in denen  $m > l$  ist, ist die Differenz  $e_i - e_h$  ( $i > h$ )  $s_h \cdot s_i$  mal enthalten. Somit ist

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sum_{i>h} (e_i - e_h) s_i \cdot s_h = \sum_{m>l} r_m - r_l \\
 & = (1-n)r_1 + (3-n)r_2 + (5-n)r_3 + \dots + (n-3)r_{n-1} + (n-1)r_n.
 \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$s_1 + s_2 + \dots + s_i = t_i, \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

$$A' = \text{Cl}\left(\frac{a_1}{a_1} \left| \frac{a_2}{a_2} \right| \dots \left| \frac{a_{t_1}}{a_{t_1}} \right| \left| \frac{a_{t_1+1}}{a_{t_1}} \right| \left| \dots \right| \left| \frac{a_n}{a_{t_1}} \right.\right),$$

$$A_i = \text{Cl}\left(\frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i}} \left| \frac{a_{t_i+2}}{a_{t_i}} \right| \dots \left| \frac{a_n}{a_{t_i}} \right.\right),$$

$$A_{i'} = \text{Cl}\left(\frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i+1}} \left| \dots \right| \left| \frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i+1}} \right| \left| \frac{a_{t_i+1+1}}{a_{t_i+1}} \right| \left| \dots \right| \left| \frac{a_n}{a_{t_i+1}} \right.\right)$$

so folgt aus

$$(3) \quad \begin{aligned} p^{s_1} &= a_1 = a_2 = \dots = a_{t_1}, \\ p^{s_2} &= a_{t_1+1} = \dots = a_{t_2}, \\ &\vdots \\ p^{s_k} &= a_{t_{k-1}+1} = \dots = a_{t_k}, \end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned} \psi(A) &= \psi(A') = \frac{\varphi(A')}{z(A')} = \frac{\varphi(A')}{\varphi(A_1)} \psi(A_1), \\ \psi(A_i) &= \psi(A'_i) = \frac{\varphi(A'_i)}{z(A'_i)} = \frac{\varphi(A'_i)}{\varphi(A_{i+1})} \psi(A_{i+1}) \end{aligned}$$

wird. Berücksichtigt man, dass  $\psi(A_{k-1}) = 1$  ist, so erhält man

$$(4) \quad \psi(A) = \frac{\varphi(A') \cdot \varphi(A'_1) \dots \varphi(A'_{k-2})}{\varphi(A_1) \cdot \varphi(A_2) \dots \varphi(A_{k-1})}.$$

Es haben aber die Classen  $A'$ ,  $A_i$ ,  $A'_i$  bez. die Grade  $n$ ,  $n - t_i$ ,  $n - t_i$ , während die Anzahlen ihrer durch  $p$  theilbaren Invarianten bez. gleich  $n - t_1$ ,  $n - t_i$ ,  $n - t_{i+1}$  sind; folglich ist (§ 3, IIIa)

$$\begin{aligned} \varphi(A') &= (\text{Nm } A')^n \frac{\mathfrak{D}(p; n)}{\mathfrak{D}(p; t_1)} = (\text{Nm } A')^n \frac{\mathfrak{D}(p; n)}{\mathfrak{D}(p; s_1)}, \\ \varphi(A_i) &= (\text{Nm } A_i)^{n-t_i} \mathfrak{D}(p; n - t_i) \\ \varphi(A'_i) &= (\text{Nm } A'_i)^{n-t_i} \frac{\mathfrak{D}(p; n - t_i)}{\mathfrak{D}(p; t_{i+1} - t_i)} = (\text{Nm } A_i)^{n-t_i} \frac{\mathfrak{D}(p; n - t_i)}{\mathfrak{D}(p; s_{i+1})} \end{aligned}$$

also nach (4)

$$(5) \quad \psi(A) = \frac{(\text{Nm } A')^n \cdot (\text{Nm } A'_1)^{n-t_1} \dots (\text{Nm } A'_{k-2})^{n-t_{k-2}}}{(\text{Nm } A_1)^{n-t_1} \cdot (\text{Nm } A_2)^{n-t_2} \dots (\text{Nm } A_{k-1})^{n-t_{k-1}}} \cdot \frac{\mathfrak{D}(p; n)}{\mathfrak{D}(p; s_1) \mathfrak{D}(p; s_2) \dots \mathfrak{D}(p; s_k)}.$$

Nun ist

$$\frac{(\text{Nm } A'_{i-1})^{n-t_{i-1}}}{(\text{Nm } A_i)^{n-t_i}} = \left( \frac{\text{Nm } A'_{i-1}}{\text{Nm } A_i} \right)^{n-t_i} \cdot (\text{Nm } A'_{i-1})^{t_i-t_{i-1}} = (\text{Nm } A'_{i-1})^{t_i-t_{i-1}},$$

daher

$$(6) \quad \begin{aligned} &\frac{(\text{Nm } A')^n (\text{Nm } A_1)^{n-t_1} \dots (\text{Nm } A'_{k-2})^{n-t_{k-2}}}{(\text{Nm } A_1)^{n-t_1} (\text{Nm } A_2)^{n-t_2} \dots (\text{Nm } A_{k-1})^{n-t_{k-1}}} \\ &= \left( \frac{\text{Nm } A'}{\text{Nm } A_1} \right)^{t_1} \left( \frac{\text{Nm } A'_1}{\text{Nm } A_2} \right)^{t_2} \dots \left( \frac{\text{Nm } A'_{k-3}}{\text{Nm } A'_{k-2}} \right)^{t_{k-2}} (\text{Nm } A'_{k-2})^{t_{k-1}}. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{\text{Nm } A'_{i-1}}{\text{Nm } A'_i} = \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^{n-t_i}, \quad \text{Nm } A'_{k-2} = \left( \frac{a_{i_k}}{a_{i_{k-1}}} \right)^{n-t_{k-1}},$$

$$(7) \quad \prod_{i=1}^{k-2} \left( \frac{\text{Nm } A'_{i-1}}{\text{Nm } A'_i} \right)^{t_i} \cdot (\text{Nm } A'_{k-2})^{t_{k-1}} = \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^{(n-t_i) t_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^{i(n-i)} = \prod_{i=1}^n a_i^{2i-1-n}.$$

Aus (5), (6), (7) erhält man jetzt

$$\text{III.} \quad \psi(A) = a_1^{1-n} \cdot a_2^{2-n} \cdot a_3^{3-n} \cdot \dots \cdot a_{n-1}^{n-3} \cdot a_n^{n-1}$$

$$\cdot \frac{\mathfrak{P}(p; n)}{\mathfrak{P}(p; s_1) \mathfrak{P}(p; s_2) \dots \mathfrak{P}(p; s_k)}$$

oder, unter Berücksichtigung von (2), (3)

$$\text{IIIa.} \quad \psi(A) = p^{\sum_{i>k} s_i s_h (e_i - e_h)} \cdot \frac{\mathfrak{P}(p; n)}{\mathfrak{P}(p; s_1) \mathfrak{P}(p; s_2) \dots \mathfrak{P}(p; s_k)}.$$

Führt man eine Function  $g(x; n, m)$ \*) ein durch die Gleichung

$$(8) \quad g(x; n, m) = \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1}) \dots (1-x^{n-m+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)}$$

worin  $n$  eine ganze,  $m$  eine positive ganze Zahl bedeute, so ist

$$(9) \quad g(x; n, m) = g(x; n-1, m) + x^{n-m} g(x; n-1, m-1),$$

und diese Gleichung gilt auch für beliebiges ganzzahliges  $m$ , wenn festgesetzt wird, dass

$$(10) \quad g(x; n, 0) = 1,$$

$$(11) \quad g(x; n, m) = 0 \quad (m < 0)$$

sein soll. Es gilt ferner die Beziehung

$$(12) \quad g(x; n, m) = x^{m(n-m)} \cdot g\left(\frac{1}{x}; n, m\right).$$

Aus den Gleichungen (9), (10), (11) folgt, dass  $g(x; n, m)$  für  $n \geq 0$  eine ganze Function von  $x$  ist, welche nur ganzzahlige nichtnegative Coefficienten besitzt. Für  $n \geq m \geq 0$  besteht zwischen den Functionen  $g$  und  $\mathfrak{P}$  die Relation

$$(13) \quad g\left(\frac{1}{x}; n, m\right) = \frac{\mathfrak{P}(x; n)}{\mathfrak{P}(x; m) \mathfrak{P}(x; n-m)}.$$

\*) Es ist dieselbe, welche in der Gauss'schen Abhandlung 'Summatio quarundam serierum singularium' mit  $(n, m)$  bezeichnet wird.

Wird zur Abkürzung

$$(14) \quad \psi(A) = p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h)} \cdot \bar{\psi}(A) = a_1^{1-n} \cdot a_2^{3-n} \dots a_n^{n-1} \bar{\psi}(A)$$

gesetzt, so ergeben sich für die Functionen  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  die folgenden Ausdrücke

$$(15) \quad \bar{\psi}(A) = \frac{\vartheta(p; n)}{\vartheta(p; s_1) \vartheta(p; n - s_1)} \cdot \frac{\vartheta(p; n - s_1)}{\vartheta(p; s_2) \vartheta(p; n - s_1 - s_2)} \cdot \frac{\vartheta(p; n - s_1 - s_2)}{\vartheta(p; s_3) \vartheta(p; n - s_1 - s_2 - s_3)} \dots$$

$$= g\left(\frac{1}{p}; n, s_1\right) \cdot g\left(\frac{1}{p}; n - s_1, s_2\right) \dots g\left(\frac{1}{p}; n - s_1 - \dots - s_{k-2}, s_{k-1}\right),$$

$$(16) \quad \psi(A) = p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h)} \bar{\psi}(A) = p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h - 1)} \cdot p^{\sum_{i>h} s_i s_h} \cdot \bar{\psi}(A)$$

$$= p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h - 1)} \cdot p^{s_1(n - s_1)} g\left(\frac{1}{p}; n, s_1\right) \cdot p^{s_2(n - s_1 - s_2)} \cdot g\left(\frac{1}{p}; n - s_1, s_2\right) \dots$$

$$\text{III b. } \psi(A) = p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h - 1)} \cdot g(p; n, s_1) \cdot g(p; n - s_1, s_2) \dots g(p; n - s_1 - \dots - s_{k-2}, s_{k-1}).$$

Aus dieser Darstellung erkennt man, dass  $\psi(A)$  eine ganze Function von  $p$  ist, ferner, dass der Coefficient der höchsten Potenz von  $p$  gleich 1 ist und dass die übrigen Coefficienten ganze nichtnegative Zahlen sind.

Hat man eine beliebige Classe A von positiver Norm, so wird durch § 2, XVII die Berechnung von  $\psi(A)$  auf den Fall der primären Classe zurückgeführt. Setzt man

$$\prod_p \bar{\psi}_p(A) = \bar{\psi}(A),$$

so ergibt sich

$$\psi(A) = \prod_p \left( a_p^{1-n} \cdot a_p^{3-n} \dots a_p^{n-1} \cdot \bar{\psi}_p(A) \right)$$

$$= a_1^{1-n} \cdot a_2^{3-n} \dots a_n^{n-1} \cdot \bar{\psi}(A),$$

sodass Gleichung (14) allgemeine Geltung besitzt.

Wendet man die gewonnenen Resultate auf den Fall  $n = 2$  an, so erhält man für  $A = \text{Cl}(a_1 | a_2)$

$$\begin{aligned}\psi(A) &= \frac{a_2}{a_1} \bar{\psi}(A) = \frac{a_2}{a_1} \prod_p \bar{\psi}\left(\frac{A}{p}\right) \\ &= \frac{a_2}{a_1} \prod_{\left(p, \frac{a_2}{a_1}\right)=p} \frac{\vartheta(p; 2)}{(\vartheta(p; 1))^2} = \frac{a_2}{a_1} \prod_{\left(p, \frac{a_2}{a_1}\right)=p} \left(1 + \frac{1}{p}\right),\end{aligned}$$

wo das Product sich auf die in  $\frac{a_2}{a_1}$  aufgehenden Primzahlen erstreckt.

Beispiel: Für

$$a_1 = 3, a_2 = 90$$

ist

$$\frac{a_2}{a_1} = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\psi(A) = 30 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = 72.$$

Für

$$n = 3, A = \text{Cl}(a_1 | a_2 | a_3)$$

ist

$$\begin{aligned}\psi(A) &= \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \bar{\psi}(A) = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \prod_{\left(p, \frac{a_3}{a_1}\right)=p} \frac{\vartheta(p; 3)}{\vartheta(p; 1)\vartheta(p; 2)} \cdot \prod_{\left(p, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right)=p} \frac{\vartheta(p; 2)}{\vartheta(p; 1)\vartheta(p; 1)} \\ \psi(A) &= \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \cdot \prod_{\left(p, \frac{a_3}{a_1}\right)=p} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \prod_{\left(p, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right)=p} \left(1 + \frac{1}{p}\right),\end{aligned}$$

wo das erste Product sich auf die in  $\frac{a_3}{a_1}$ , das zweite auf die in  $\frac{a_2}{a_1}$  und  $\frac{a_3}{a_2}$  zugleich aufgehenden Primzahlen erstreckt.

Beispiel: Für

$$a_1 = 2, a_2 = 210, a_3 = 6930$$

ist

$$\frac{a_3}{a_1} = 3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, \quad \frac{a_2}{a_1} = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad \frac{a_3}{a_2} = 33 = 3 \cdot 11.$$

$$\psi(A) = (3465)^2 \cdot \frac{13}{9} \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{57}{49} \cdot \frac{133}{121} \cdot \frac{4}{3} = 36\,661\,716.$$

## § 7.

**Einführung einiger Functionen, welche von mehreren Classen abhängen.**

Die Function  $\psi$  bildet die Grundlage für die Bestimmung anderer Functionen, welche für die Theorie der Moduln von Wichtigkeit sind und welche im Folgenden behandelt werden sollen. Dabei wollen wir nur Moduln und Classen von positiver Norm in Betracht ziehen.

Ein Modul  $\alpha$  von positiver Norm hat, wie man leicht erkennt, nur eine endliche Anzahl von Divisoren, welche sich (§ 2, III) auf diejenigen Classen vertheilen, welche Divisoren von  $\text{Cl } \alpha$  sind. Wir wollen

nun diejenigen Divisoren von  $\alpha$  ins Auge fassen, welche einer bestimmten Classe  $B$  angehören. Sind

$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_l$$

diese Moduln und bezeichnet  $E$  ein unimodulares System, so sind (§ 2, VI)

$$\mathfrak{b}_1 E, \mathfrak{b}_2 E, \dots, \mathfrak{b}_l E$$

die sämtlichen Divisoren von  $\alpha E$  innerhalb der Classe  $B$ . Hieraus folgt, dass die Anzahl der Divisoren von  $\alpha$  innerhalb  $B$  nur von den Classen  $A = \text{Cl } \alpha$  und  $B$  abhängt. Wir bezeichnen diese Anzahl mit

$$t(A|B).$$

In gleicher Weise erkennt man, dass die Anzahl der Vielfachen, welche ein Modul  $\mathfrak{b}$  der Classe  $B$  innerhalb der Classe  $A$  besitzt, allein eine Function der Classen  $A$  und  $B$  ist. Sie sei mit

$$v(A|B)$$

bezeichnet. Die Anzahl der Modulpaare  $\alpha_i, \mathfrak{b}_k$ , welche den Bedingungen

$$\text{Cl } \alpha_i = A, \text{Cl } \mathfrak{b}_k = B, (\alpha_i, \mathfrak{b}_k) = \mathfrak{b}_k$$

genügen, wird durch jeden der Ausdrücke  $\psi(A) \cdot t(A|B)$ ,  $\psi(B) \cdot v(A|B)$  dargestellt, also ist

$$\text{I.} \quad \psi(A) \cdot t(A|B) = \psi(B) \cdot v(A|B).$$

Ferner ergeben sich aus § 2, XV die Formeln

$$\text{II.} \quad t(A|B) = \prod_p t(A|B)_p$$

$$\text{III.} \quad v(A|B) = \prod_p v(A|B)_p.$$

Nach § 2, III wissen wir, dass  $t(A|B)$  und  $v(A|B)$  von 0 verschieden oder gleich 0 sind, je nachdem  $A$  durch  $B$  theilbar ist oder nicht. Endlich gelten für jede Classe  $A$  die Beziehungen (§ 2, IV)

$$\text{IV.} \quad t(A|A) = v(A|A) = 1.$$

Zu anderen Classenfunctionen wird man durch die folgenden Betrachtungen geführt.

Sind die Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , welche nicht alle verschieden zu sein brauchen, Divisoren eines Moduls  $c$ , so ist auch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$  ein Divisor von  $c$ . Man kann sich nun die Aufgabe stellen, zu gegebenem  $c$   $s$  Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  so zu bestimmen, dass

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = c$$

wird, eine Aufgabe, die natürlich immer und im Allgemeinen auf vielfache Weise lösbar ist. Etwas Anderes aber ist es, wenn man die

Bedingung stellt, dass jeder der Moduln  $\alpha_i$  einer bestimmten gegebenen Classe  $A_i$  angehören soll. Aus § 2, VII folgt der Satz: Ist es für irgend einen Modul  $c$  der Classe  $\Gamma$  möglich, ihn als kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $s$  Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  darzustellen, welche bez. den Classen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  angehören, so ist dasselbe für jeden Modul der Classe  $\Gamma$  möglich. Allgemeiner: Die Anzahl der Systeme von je  $s$  Moduln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , welche den Bedingungen

$$\text{Cl } \alpha_1 = A_1, \text{Cl } \alpha_2 = A_2, \dots, \text{Cl } \alpha_s = A_s; [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] = c$$

genügen, ist für jeden Modul  $c$  der Classe  $\Gamma$  die nämliche. Wir bezeichnen diese Anzahl mit

$$\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, A_2, \dots, A_s),$$

sie stellt eine Function der Classen  $\Gamma, A_1, \dots, A_s$  dar, die in Bezug auf  $A_1, \dots, A_s$  symmetrisch ist. Die Frage, ob ein Modul  $c$  der Classe  $\Gamma$  sich darstellen lasse als kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $s$  Moduln  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , welche bez. den Classen  $A_1, \dots, A_s$  angehören, fällt hiernach zusammen mit der Frage, ob  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) > 0$  ist. Die Entscheidung hierüber lässt sich natürlich in jedem gegebenen Falle durch eine endliche Anzahl von Versuchen herbeiführen. Es handelt sich aber darum, ob man nicht allgemeine, leicht zu übersehende Beziehungen aufstellen könne, deren Bestehen zwischen den Classen  $\Gamma, A_1, \dots, A_s$  die notwendige und hinreichende Bedingung für das Nichtverschwinden der Function  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s)$  darstellt.

Nun erkennt man zunächst, dass  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s)$  nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn  $\Gamma$  durch jede der Classen  $A_1, \dots, A_s$  theilbar ist. Betrachtet man daher die Classen  $A_1, \dots, A_s$  als gegeben, so stellt ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches  $\Gamma' = [A_1, \dots, A_s]$  gewissermassen das Minimum unter denjenigen Classen  $\Gamma$  dar, für welche  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) > 0$  ausfällt, indem nämlich erstens  $\bar{\gamma}(\Gamma'; A_1, \dots, A_s) > 0$  ist, weil der Hauptmodul von  $\Gamma'$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Hauptmoduln von  $A_1, \dots, A_s$  ist, und zweitens jede der Bedingung  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) > 0$  genügende Classe  $\Gamma$  ein Vielfaches von  $\Gamma'$  ist. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass unter den in Rede stehenden Classen  $\Gamma$  auch ein Maximum existirt, d. h. eine unter ihnen, sie heisse  $\Gamma''$ , ist durch alle theilbar. Die Bildungsweise der Classe  $\Gamma''$  soll bald angegeben werden.

Zu ganz analogen Resultaten wird man bei den Untersuchungen über den grössten gemeinsamen Theiler von Moduln geführt. Wir bezeichnen mit

$$\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots, A_s)$$

die Anzahl der Systeme von je  $s$  Moduln  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , welche bez. den Classen  $A_1, \dots, A_s$  entnommen sind und einen gegebenen Modul  $b$  der Classe  $\Delta$  zum grössten gemeinsamen Theiler haben. Betrachtet man

die Classen  $A_1, \dots, A_s$  als gegeben, so liegen die sämmtlichen Classen  $\Delta$ , für welche  $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots, A_s) > 0$  ist, zwischen einem Maximum  $\Delta'$  und einem Minimum  $\Delta''$ , sodass

$$\bar{\delta}(\Delta'; A_1, \dots, A_s) > 0, \quad \bar{\delta}(\Delta''; A_1, \dots, A_s) > 0$$

und jede andere Classe der betrachteten Art Divisor von  $\Delta'$  und Vielfaches von  $\Delta''$  ist. Hierbei ist  $\Delta'$  offenbar der grösste gemeinsame Theiler der Classen  $A_1, \dots, A_s$ .

Um zu den Classen  $\Gamma, \Delta''$  zu gelangen, hat man folgendermassen zu verfahren. Es sei

$$A_i = \text{Cl}(a_{i1} | a_{i2} | \dots | a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Man bilde aus den sämmtlichen  $s \cdot n$  Invarianten

$$a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{s1}, \dots, a_{sn}$$

der Classen  $A_1, \dots, A_s$  ein Diagonalsystem  $K$  und bestimme dessen Classe  $K$ . Diese ist vom Grade  $s \cdot n$  und offenbar unabhängig von der Reihenfolge der Classen  $A_1, \dots, A_s$ . Die ersten  $n$  Invarianten von  $K$  bilden das Invariantensystem einer Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades, welche wir den „Grenztheiler“ der Classen  $A_1, \dots, A_s$  nennen und mit

$$(|A_1, \dots, A_s|)$$

bezeichnen. Ebenso bilden die letzten  $n$  Invarianten von  $K$  das Invariantensystem einer Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades. Dieselbe heisse das „Grenzvielfache“ der Classen  $A_1, \dots, A_s$  und sei mit

$$[|A_1, \dots, A_s|]$$

bezeichnet. Sie bildet das oben erwähnte Maximum für die Classen  $\Gamma$ , bei denen  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) > 0$  ist, und ebenso ist der Grenztheiler von  $A_1, \dots, A_s$  das Minimum der Classen  $\Delta$ , für welche  $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots, A_s) > 0$  wird. Es ist nicht schwer, den Nachweis hierfür zu geben, ohne auf eine allgemeine Bestimmung der Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  einzugehen. Es erhebt aber jetzt die Frage, ob auch umgekehrt für alle zwischen  $[|A_1, \dots, A_s|]$  und  $(|A_1, \dots, A_s|)$  gelegenen Classen  $\Gamma$  und für alle zwischen  $(A_1, \dots, A_s)$  und  $(|A_1, \dots, A_s|)$  gelegenen Classen  $\Delta$  die Functionen  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s)$  und  $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots, A_s) > 0$  ausfallen. Die Entscheidung hierüber ist mir erst durch ein eingehendes Studium der Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  möglich gewesen; er hat sich gezeigt, dass die angeregte Frage zu bejahen ist. Damit hat man alsdann den folgenden Doppelsatz gewonnen, welcher namentlich auch für die Theorie der Gruppen von vertauschbaren Elementen von Interesse ist:

V. a. Damit ein Modul  $c$  der Classe  $\Gamma$  sich darstellen lasse als kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $s$  Moduln  $a_1, \dots, a_s$ , welche bez. den Classen  $A_1, \dots, A_s$  angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass

$\Gamma$  zwischen dem Grenzviefachen und dem kleinsten gemeinsamen Viefachen der Classen  $A_1, \dots A_s$  liegt.

b. Damit ein Modul  $\delta$  der Classe  $\Delta$  sich darstellen lasse als grösster gemeinsamer Theiler von  $s$  Moduln  $a_1, \dots a_s$ , welche bez. den Classen  $A_1, \dots A_s$  angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass  $\Delta$  zwischen dem grössten gemeinsamen Theiler und dem Grenztheiler der Classen  $A_1, \dots A_s$  liegt.

Im Folgenden wird der Nachweis dieses Satzes vollständig durch die Untersuchungen über die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  erledigt.

Aus § 2, XVI folgen die Relationen

$$\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots A_s) = \prod_p \bar{\gamma}(\Gamma_p; A_1, \dots A_s)$$

VI.

$$\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots A_s) = \prod_p \bar{\delta}(\Delta_p; A_1, \dots A_s).$$

Man ersieht hieraus auch leicht, dass man, um den Nachweis von V zu führen, nur nöthig hat, ihn für primäre Classen zu erbringen.

### § 8.

Die Functionen  $t$  und  $v$  dargestellt durch die Function  $\psi$ .

Wir wenden uns nun einer näheren Betrachtung der Functionen  $t(A|B)$  und  $v(A|B)$  zu und wollen zunächst zeigen, wie sich dieselben mit Hilfe von  $\psi$ -Functionen darstellen lassen. Es kann dies in verschiedener Weise geschehen.

Es sei  $A = \text{Cl}(a_1 | a_2 | \dots a_n)$ ,  $B = \text{Cl}(b_1 | b_2 | \dots b_n)$ ,  $\alpha$  ein beliebiger Modul von  $A$ , endlich seien

$$(1) \quad b_1, b_2, \dots b_{\psi(B)}$$

die sämtlichen Moduln von  $B$ . Der Modul  $\alpha$  ist durch  $a_1 \cdot e$  theilbar (§ 2, X); ist also  $\alpha$  durch  $b_k$  theilbar, so ist  $\alpha$  auch theilbar durch  $[a_1 e, b_k]$ , und umgekehrt. Die Moduln

$$(2) \quad [a_1 e, b_1], [a_1 e, b_2], \dots [a_1 e, b_{\psi(B)}]$$

gehören sämtlich der Classe  $[a_1 E, B]$  an (§ 2, XI), und eine einfache Ueberlegung zeigt, dass jeder Modul von  $[a_1 E, B]$  in der Reihe (2) gleich oft, mithin  $\frac{\psi(B)}{\psi([a_1 E, B])}$  mal vorkommt. Da  $\alpha$  durch  $t(A|[a_1 E, B])$  Moduln der Classe  $[a_1 E, B]$  theilbar ist, so erhält man den Satz.

I. Ist  $\alpha_1$  die erste Invariante der Classe  $A$ , so ist

$$t(A|B) = \frac{\psi(B)}{\psi([a_1 E, B])} \cdot t(A|[a_1 E, B]).$$

Ferner gilt der Satz:

II. Haben die Classen

$$A = \text{Cl} (a_1 | a_2 | \dots a_n) \text{ und } B = \text{Cl} (b_1 | b_2 | \dots b_n)$$

dieselbe erste Invariante  $a_1 = b_1$  und wird

$$A' = \text{Cl} (a_2 | \dots a_n), B' = \text{Cl} (b_2 | \dots b_n)$$

gesetzt, so ist

$$t(A|B) = t(A'|B').$$

Beweis: Es sei  $A$  das Hauptssystem von  $A$ ,  $\alpha$  seine erste Zeile,  $\text{Md } A = \alpha$ ,  $\alpha'$  der Hauptmodul von  $A'$ ,  $\mathfrak{b} = \text{Md } B$ . irgend ein Divisor von  $\alpha$  innerhalb der Classe  $B$ . Ist

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

und werden mit  $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$  die Zeilen von  $B$  bezeichnet, so ist zunächst  $\mathfrak{b} = \text{Md} (\beta_1, \dots \beta_n)$  und, weil  $\alpha$  durch  $\mathfrak{b}$  theilbar ist, mithin die Zeile  $\alpha$  dem Modul  $\mathfrak{b}$  angehört,  $\mathfrak{b} = \text{Md} (\alpha, \beta_1, \dots \beta_n)$ . Aus  $\text{Cl } B = B$ ,  $a_1 = b_1$  folgt, dass die Elemente  $b_{ik}$  sämmtlich durch  $a_1$  theilbar sind. Setzt man nun  $b_{i1} = m_i a_1$  ( $i = 1, \dots n$ ),  $\beta_i - m_i \alpha = \gamma_i$ , so wird  $\mathfrak{b} = \text{Md} (\alpha, \gamma_1, \dots \gamma_n)$ . In  $\gamma_i$  ist das erste Element  $= 0$ ; bezeichnet  $\gamma'_i$  die nach Weglassung dieser Null zurückbleibende Zeile von  $n - 1$  Elementen, so ist  $\mathfrak{b}' = \text{Md} (\gamma'_1, \dots \gamma'_n)$  ein Modul  $(n - 1)^{\text{ten}}$  Grades. Ist

$$(3) \quad B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & \dots & b'_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{n-11} & \dots & b'_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

irgend eine quadratische Basis dieses Moduls, so ist

$$(4) \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} a_1 & 0^* & \dots & 0 \\ 0 & b'_{11} & \dots & b'_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b'_{n-11} & \dots & b'_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $\mathfrak{b}$ . Aus  $\text{Cl } \bar{B} = B$  folgt leicht  $\text{Cl } \mathfrak{b}' = \text{Cl } B' = B'$ , und aus der Theilbarkeit von  $\alpha$  durch  $\mathfrak{b}$  ergibt sich, dass  $\alpha'$  durch  $\mathfrak{b}'$  theilbar ist. Umgekehrt ist Folgendes leicht zu ersehen: Hat man zwei quadratische Systeme  $B', \bar{B}$ , wie sie durch (3) und (4) dargestellt werden, und ist  $\text{Md } B' = \mathfrak{b}'$  Divisor von  $\alpha'$ ,  $\text{Cl } B' = B'$ , so folgt, dass  $\text{Md } \bar{B} = \mathfrak{b}$  Divisor von  $\alpha$ ,  $\text{Cl } \bar{B} = B$  ist. Endlich erkennt man, dass in der angegebenen Weise der Modul  $\mathfrak{b}'$  durch den Modul  $\mathfrak{b}$  und ebenso der Modul  $\mathfrak{b}$  durch den Modul  $\mathfrak{b}'$  eindeutig bestimmt ist. Es hat also

$\alpha$  in der Classe  $B$  ebensoviele Divisoren wie  $\alpha'$  in der Classe  $B'$ , d. h. es ist

$$t(A|B) = t(A'|B').$$

Es sei jetzt  $A = \text{Cl}(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  theilbar durch  $B = \text{Cl}(b_1 | b_2 | \dots | b_n)$  und es werde

$$(5) \quad \begin{cases} \text{Cl}(a_{i+1} | a_{i+2} | \dots | a_n) = A_i, \\ \text{Cl}([a_i, b_{i+1}] | [a_i, b_{i+2}] | \dots | [a_i, b_n]) = B_i, \\ \text{Cl}([a_{i+1}, b_{i+1}] | [a_{i+1}, b_{i+2}] | \dots | [a_{i+1}, b_n]) = \bar{B}_i, \\ (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

gesetzt. Dann ist

$$\bar{B}_i = [a_{i+1}E, B_i]$$

und daher (Satz I)

$$t(A_i | B_i) = \frac{\psi(B_i)}{\psi(\bar{B}_i)} \cdot t(A_i | \bar{B}_i),$$

ferner ist  $[a_{i+1}, b_{i+1}] = a_{i+1}$ , woraus (Satz II)

$$t(A_i | \bar{B}_i) = t(A_{i+1} | B_{i+1})$$

folgt. Berücksichtigt man endlich, dass  $t(A_{n-1} | B_{n-1}) = 1$  ist, so gelangt man zu der Formel

$$\text{III.} \quad t(A|B) = \frac{\psi(B)\psi(B_1)\dots\psi(B_{n-2})}{\psi(\bar{B})\psi(\bar{B}_1)\dots\psi(\bar{B}_{n-2})}.$$

Die Function  $v(A|B)$  lässt sich unter Anwendung zweier Sätze, welche ein dualistisches Analogon zu den unter I und II angegebenen bilden, ebenfalls als Quotient aus Producten von  $\psi$ -Functionen darstellen. Dasselbe kann aber auch erreicht werden, indem man die Formeln § 7, I und die soeben für die Function  $t(A|B)$  gefundene anwendet. Man erhält dann

$$\text{IV.} \quad v(A|B) = \frac{\psi(A)\psi(B_1)\dots\psi(B_{n-2})}{\psi(\bar{B})\psi(\bar{B}_1)\dots\psi(\bar{B}_{n-2})}.$$

Die weitere Ausrechnung der Functionen  $t(A|B)$  und  $v(A|B)$ , bei welcher wir uns auf primäre Classen beschränken können, soll erst an späterer Stelle erfolgen.

## § 9.

Darstellung der Function  $\bar{\gamma}$  durch  $t$ -Functionen, der Function  $\bar{\delta}$  durch  $v$ -Functionen.

Nachdem in § 8 gezeigt worden ist, wie sich die Functionen  $t$  und  $v$  durch  $\psi$ -Functionen ausdrücken lassen, soll nunmehr dargethan werden, wie man mit Hülfe der Functionen  $t$  und  $v$  die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  darstellen kann.

Es seien  $A_1, \dots, A_s, \Gamma, \Delta$  beliebige Classen  $n^{\text{ten}}$  Grades, und

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_{\psi(A_i)}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

die sämmtlichen Moduln von  $A_i$ . Die Anzahl der Systeme zu je  $s$  Moduln

$$(1) \quad \alpha_{2_1}^{(1)}, \alpha_{2_2}^{(2)}, \dots, \alpha_{2_s}^{(s)},$$

welche bez. den Classen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  angehören, beträgt

$$\psi(A_1) \cdot \psi(A_2) \dots \psi(A_s).$$

Die Anzahl der Systeme (1), für welche das kleinste gemeinsame Vielfache

$$(2) \quad [\alpha_{2_1}^{(1)}, \alpha_{2_2}^{(2)}, \dots, \alpha_{2_s}^{(s)}]$$

gleich einem bestimmten Modul einer Classe  $\Theta$  wird, ist durch die Function  $\bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots, A_s)$  dargestellt. Ist daher  $c$  irgend ein Modul von  $\Gamma$ , so ist die Anzahl derjenigen Systeme (1), für welche (2) irgend ein der Classe  $\Theta$  angehöriger Divisor von  $c$  wird, gleich

$$t(\Gamma|\Theta) \cdot \bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots, A_s).$$

Um endlich die Anzahl aller Systeme (1) zu erhalten, für welche (2) irgend ein Divisor von  $c$  wird, hat man nur die Summe

$$\sum_{\Theta} t(\Gamma|\Theta) \bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots, A_s)$$

zu bilden, in welcher  $\Theta$  alle Classen  $n^{\text{ten}}$  Grades durchläuft. Bedenkt man aber, dass der Modul (2) stets und nur dann Divisor von  $c$  wird, wenn alle Moduln des Systems (1) Divisoren von  $c$  sind, so erkennt man, dass die zuletzt berechnete Anzahl auch durch den Ausdruck

$$t(\Gamma|A_1) \cdot t(\Gamma|A_2) \dots t(\Gamma|A_s)$$

dargestellt wird. Man erhält daher die Relation

$$I. \quad \sum_{\Theta} t(\Gamma|\Theta) \cdot \bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots, A_s) = t(\Gamma|A_1) \dots t(\Gamma|A_s).$$

Diese (für jedes System von Classen  $\Gamma, A_1, \dots, A_s$  geltende) Relation reicht nun vollkommen hin, um die Function  $\bar{\gamma}$  zu definiren.

Zunächst erkennt man aus I, dass  $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s)$  verschwindet, wenn  $\Gamma$  nicht Vielfaches jeder der Classen  $A_1, \dots, A_s$  ist. In diesem Falle nämlich verschwindet das Product auf der rechten Seite von I. Setzen wir jetzt unsere Behauptung für alle Divisoren von  $\Gamma$  mit Ausnahme von  $\Gamma$  selbst als bewiesen voraus, so verschwindet für jedes von  $\Gamma$  verschiedene  $\Theta$  ein Factor des Productes unter dem Summenzeichen, während  $t(\Gamma|\Gamma) = 1$  wird. Man erhält daher

$$\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) = 0.$$

Hieraus folgt, dass man für jede Classe  $\Gamma$  der Relation I die Form geben kann:

$$(3) \quad \sum_{\substack{(\Theta, \Gamma) = \Theta \\ (\Theta, \Gamma') = \Gamma'}} t(\Gamma | \Theta) \cdot \bar{v}(\Theta; A_1, \dots, A_s) = t(\Gamma | A_1) \dots t(\Gamma | A_s),$$

wo  $\Gamma'$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Classen  $A_1, \dots, A_s$  bezeichnet und die Summation sich auf alle zwischen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  (mit Einschluss der Grenzen) liegende Classen  $\Theta$  erstreckt, wie dies durch die unter das Summenzeichen gesetzten Bedingungen

$$(\Theta, \Gamma) = \Theta, \quad (\Theta, \Gamma') = \Gamma'$$

gekennzeichnet ist. Ist daher  $\Gamma = \Gamma'$ , so erhält man einfach

$$\bar{v}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) = t(\Gamma | A_1) \dots t(\Gamma | A_s),$$

ist aber  $\Gamma$  ein Vielfaches von  $\Gamma'$ , jedoch von  $\Gamma'$  verschieden, so denken wir uns der Berechnung von  $\bar{v}(\Gamma; A_1, \dots, A_s)$  die Berechnung derjenigen (nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Ausdrücke  $\bar{v}(\Theta; A_1, \dots, A_s)$  vorangegangen, in denen  $\Theta$  zwischen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  liegt und von  $\Gamma$  verschieden ist. Man erhält dann aus (3)

$$\text{Ia. } \bar{v}(\Gamma; A_1, \dots, A_s) = t(\Gamma | A_1) \dots t(\Gamma | A_s) - \sum_{\substack{(\Theta, \Gamma) = \Theta \\ (\Theta, \Gamma') = \Gamma' \\ \Theta \neq \Gamma}} t(\Gamma | \Theta) \bar{v}(\Theta; A_1, \dots, A_s)$$

und hier stehen auf der rechten Seite nur bekannte Grössen.

In gleicher Weise erhält man für  $\bar{\delta}$ , wenn

$$(A_1, \dots, A_s) = \Delta'$$

gesetzt wird:

$$\text{II. } \sum_{\Theta} v(\Theta | \Delta) \bar{\delta}(\Theta; A_1, \dots, A_s) = v(A_1 | \Delta) \dots v(A_s | \Delta)$$

$$\text{IIa. } \bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots, A_s) = v(A_1 | \Delta) \dots v(A_s | \Delta) - \sum_{\substack{(\Theta, \Delta) = \Delta \\ (\Theta, \Delta') = \Theta \\ \Theta \neq \Delta}} v(\Theta | \Delta) \bar{\delta}(\Theta; A_1, \dots, A_s).$$

Die Recursionsformeln Ia, IIa zeigen, dass man die Functionen  $\bar{v}$  und  $\bar{\delta}$  aus  $t$ - bez.  $v$ -Functionen durch die Operationen Addition, Subtraction, Multiplication zusammensetzen kann. Diese Darstellung ist aber wesentlich complicirter als die Darstellung der Functionen  $t$  und  $v$  durch  $\psi$ -Functionen. Während nämlich bei dieser die Anzahl der darstellenden  $\psi$ -Functionen durch den Grad  $n$  der betrachteten Classen beschränkt ist, ist die Anzahl der bei der Darstellung der Functionen  $\bar{v}(\Gamma; A_1, \dots, A_s)$ ,  $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots, A_s)$  verwandten  $t$ - und  $v$ -Functionen zwar in jedem einzelnen Falle eine endliche, sie ist aber, wenn

auch der Grad  $n$  und die Zahl  $s$  gegeben sind, an keine obere Grenze gebunden. Ferner wird durch die hier in den Formeln auftretende Subtraction die Beantwortung der Frage nach dem Verschwinden der  $\bar{\gamma}$ - und  $\bar{\delta}$ -Function sehr erschwert. Diese Schwierigkeiten werden beseitigt, indem es gelingt, die für die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  gewonnenen Ausdrücke umzuformen in Producte von Functionen, welche eine leichtere Uebersicht gestatten.

§ 10.

Vorbereitende Betrachtungen.

1. Wir beschränken uns von nun an auf die Betrachtung primärer Classen. Eine solche Classe

$$A = Cl(p^{r_1} | p^{r_2} | \dots | p^{r_n})$$

ist vollkommen bestimmt durch das Exponentensystem

$$(1) \quad r_1, r_2, \dots, r_n$$

und die Primzahl  $p$ . Denken wir uns nur das Exponentensystem (1) gegeben, so haben wir es mit einer sog. „halbbestimmten“ primären Classe zu thun. Unter den kleinen griechischen Buchstaben sind im Folgenden stets halbbestimmte primäre Classen zu verstehen. Ist  $\alpha$  eine solche Classe und (1) das System ihrer Exponenten, so schreiben wir auch

$$\alpha = cl(r_1 | r_2 | \dots | r_n).$$

Ist wie in § 6

$$\begin{aligned} r_1 &= \dots = r_{s_1} = e_1 \\ r_{s_1+1} &= \dots = r_{s_1+s_2} = e_2 \\ &\vdots \\ r_{n-s_k+1} &= \dots = r_n = e_k, \\ e_1 &< e_2 < \dots < e_k, \end{aligned}$$

so erhält man (§ 6, III; a, b)

$$\begin{aligned} (2) \quad \psi(\alpha) &= p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h)} \frac{\vartheta(p; n)}{\vartheta(p; s_1) \vartheta(p; s_2) \dots \vartheta(p; s_k)} \\ &= p^{\sum_{i>h} s_i s_h (e_i - e_h - 1)} \cdot g(p; n, s_1) g(p; n - s_1, s_2) \dots g(p; n - s_1 - \dots - s_{k-2}, s_{k-1}). \end{aligned}$$

als ganze Function der unbestimmten Primzahl  $p$ .

Werden mehrere Classen  $\alpha, \beta \dots$  gleichzeitig betrachtet, so ist, vorausgesetzt, dass für alle die unbestimmte Primzahl  $p$  dieselbe ist. Hiernach ist klar, was Ausdrücke wie „ $\alpha$  ist theilbar durch  $\beta$ “ u. a. bedeuten. Hat man  $s$  Classen

und ist

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

$$\alpha_i = \text{cl} (a_{i1} | a_{i2} | \dots | a_{in}) \quad (i=1, \dots, s),$$

$$\gamma' = [\alpha_1, \dots, \alpha_s] = \text{cl} (c_1' | \dots | c_n')$$

ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches

$$\delta' = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \text{cl} (d_1' | \dots | d_n')$$

ihr grösster gemeinsamer Theiler, so ist  $c_k'$  ( $k=1, \dots, n$ ) die grösste,  $d_k'$  die kleinste der Zahlen  $a_{1k}, \dots, a_{sk}$ . Ferner ergibt sich aus der in § 7 gegebenen Definition leicht, wie man das Grenzwiefache  $\gamma'' = [|\alpha_1, \dots, \alpha_s|]$  und den Grenztheiler  $\delta'' = (|\alpha_1, \dots, \alpha_s|)$  der Classen  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  zu ermitteln hat: Man ordne die  $n \cdot s$  Exponenten von  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  nach ihrer Grösse (sodass sie eine nirgends abnehmende Reihe bilden). Sind  $d_1'', \dots, d_n''$  die  $n$  kleinsten,  $c_1'', \dots, c_n''$  die  $n$  grössten, so ist

$$\gamma'' = \text{cl} (c_1'' | \dots | c_n''), \quad \delta'' = \text{cl} (d_1'' | \dots | d_n'').$$

Dass  $\alpha$  durch  $\beta$  theilbar ist, drücken wir durch die Ungleichung  $\alpha \geq \beta$  oder  $\beta \leq \alpha$  aus; die Bezeichnungen  $\alpha > \beta$ ,  $\beta < \alpha$  schliessen die Gleichheit der Classen  $\alpha$  und  $\beta$  aus.

Ist die Ungleichung  $\alpha \geq \beta$  nicht erfüllt, so verschwinden  $t(\alpha|\beta)$  und  $v(\alpha|\beta)$  identisch, d. h. für jedes  $p$ . Sonst ergibt sich die Bedeutung von  $t(\alpha|\beta)$  und  $v(\alpha|\beta)$  aus den Formeln § 8, III, IV, ebenso wie die der Functionen  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ,  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  aus den Formeln § 9, Ia, IIa. Alle diese Functionen sind, wie man leicht erkennt, ganze Functionen von  $p$ . Die Darstellung gewinnt an Anschaulichkeit, wenn wir hierbei  $p$  als eine im reellen Gebiete beliebig veränderliche Grösse betrachten. Wir bringen dies äusserlich zum Ausdruck, indem wir den Buchstaben  $p$  durch  $x$  ersetzen.

2. Somit haben wir jetzt

$$\psi(\alpha) = x^{\sum_{i>h} s_i e_h (e_i - e_h)} \frac{\vartheta(x; n)}{\vartheta(x; s_1) \dots \vartheta(x; s_k)}$$

$$= x^{\sum_{i>h} s_i i_h (e_i - e_h - 1)} g(x; n, s_1) \dots g(x; n - s_1 - \dots - s_{k-2}, s_{k-1}),$$

wo  $s_1, \dots, s_k, e_1, \dots, e_k$  ihre frühere Bedeutung haben. Sind also die Exponenten von  $\alpha$  nicht numerisch gegeben, so muss man, um den Ausdruck  $\psi(\alpha)$  bilden zu können, noch die Zahlen  $s_1, \dots, s_k$  haben, d. h. es muss von zwei aufeinanderfolgenden Exponenten noch gesagt sein, ob sie gleich sind oder nicht. Noch grösseren Unbequemlichkeiten ist man bei den Functionen  $t$  und  $v$  ausgesetzt, und die Behandlung der Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  wird dadurch ganz unübersichtlich. Man kann diese Schwierigkeiten beseitigen, indem man die Exponenten

durch andere Grössen ersetzt, welche unter dem Namen „Indices“ in die Betrachtung eingeführt werden mögen.

Als „Reihe der Indices“ einer Classe  $\alpha$  bezeichnen wir eine unendliche Reihe ganzer Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

deren  $h^{\text{tes}}$  Element  $a_h$  angiebt, wie viele Exponenten von  $\alpha$  kleiner als  $h$  sind. So gehören z. B. zu den Classen

$$\text{cl } (2 \mid 3 \mid 3 \mid 5 \mid 8); \quad \text{cl } (0 \mid 4 \mid 7)$$

die Reihen

$$0, 0, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, \dots; \quad 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, \dots;$$

Man erkennt leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

1) Die Reihe der Indices einer Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades  $\alpha$  ist eine unendliche niemals abnehmende Reihe ganzer nicht negativer Zahlen, welche bis zur Zahl  $n$  ansteigt.

2) Umgekehrt ist jede Reihe, welche die unter 1) angegebenen Eigenschaften besitzt, Reihe der Indices für eine gewisse Classe  $\alpha$  vom Grade  $n$ .

3) Der Definition zufolge giebt der  $h^{\text{te}}$  Index von  $\alpha$  an, wie viele Exponenten  $< h$  sind.

4) Umgekehrt giebt der  $h^{\text{te}}$  Exponent von  $\alpha$  an, wie viele Indices  $< h$  sind.

Man kann sich die Reihe der Indices  $a_1, a_2, \dots$  einer Classe  $\alpha$  auch nach der negativen Seite hin fortgesetzt denken. Es ist dann  $a_0 = 0, a_{-1} = 0, a_{-2} = 0, \dots$  zu setzen.

Wir fügen nun zu den Sätzen 1) bis 4) noch die folgenden, deren Beweis ebenfalls leicht ist.

5) Sind  $\alpha$  und  $\beta$  Classen vom Grade  $n$ ,  $a_h$  (wo für  $h$  jede ganze Zahl zu setzen ist) die Indices von  $\alpha$ ,  $b_h$  die Indices von  $\beta$ , so ist die Ungleichung  $\alpha \geq \beta$  dann und nur dann erfüllt, wenn für jedes  $h$ ,  $a_h \leq b_h$  ist.

Es seien jetzt

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

Classen  $n^{\text{ten}}$  Grades und es werde

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] &= \gamma', & (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) &= \delta', \\ [|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s|] &= \gamma'', & (|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s|) &= \delta'' \end{aligned}$$

gesetzt; mit  $a_h^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ),  $c_h', d_h', c_h'', d_h''$  seien die Indices der Classen  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ),  $\gamma', \delta', \gamma'', \delta''$  bezeichnet. Aus 5) folgt:

6) Der  $h^{\text{te}}$  Index  $c_h'$  des kleinsten gemeinsamen Vielfachen  $\gamma'$  von  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  ist gleich dem kleinsten, der  $h^{\text{te}}$  Index  $d_h'$  des grössten gemeinsamen Theilers  $\delta'$  von  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  gleich dem grössten unter den  $h^{\text{ten}}$  Indices  $a_h^{(1)}, \dots, a_h^{(s)}$  von  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ .

Für die Reihen der Indices des Grenzviefachen und des Grenztheilers erhält man den Satz:

7) Der  $h^{\text{te}}$  Index  $c_h''$  des Grenzviefachen  $\gamma''$  der Classen  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  ist gleich der grösseren der beiden Zahlen

$$0 \text{ und } n - \sum_{i=1}^s (n - a_h^{(i)}) = \left( \sum_{i=1}^s a_h^{(i)} \right) - (s-1)n,$$

der  $h^{\text{te}}$  Index  $d_h''$  ihres Grenztheilers  $\delta''$  gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$n \text{ und } \sum_{i=1}^s a_h^{(i)}.$$

Dabei sind mit  $a_h^{(i)}$  die Indices von  $\alpha_i$  bezeichnet worden.

Aus 4) ergibt sich leicht:

8) Zwischen den Indices  $a_h$  und den Exponenten  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  einer Classe  $\alpha$  besteht unter anderen die Relation

$$(1-n)\bar{a}_1 + (3-n)\bar{a}_2 + (5-n)\bar{a}_3 + \dots + (n-1)\bar{a}_n = \sum_h a_h(n-a_h).$$

Die Grenzen, bis zu welchen die Summation erstreckt werden muss, brauchen nicht angegeben zu werden, da die Relation jedenfalls richtig ist, wenn man  $h$  alle ganzen Zahlen durchlaufen lässt.

3. In § 6 ist die Function  $g(x; n, m)$  eingeführt und für alle ganzzahligen Werthe von  $n$  und  $m$  definirt worden. Wir stellen hier einige Formeln und Sätze, welche diese Function betreffen und welche wir später brauchen, zusammen.

$$1) g(x; n, m) = \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1}) \dots (1-x^{n-m+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)} \text{ für } m > 0.$$

$$2) g(x; n, 0) = 1.$$

$$3) g(x; n, m) = 0 \text{ für } m < 0.$$

$$4) g(x; 0, m) = 0 \text{ für } m \geq 0, \quad g(x; 0, 0) = 1.$$

$$5) g(x; n, m) = g(x; n-1, m) + x^{n-m} g(x; n-1, m-1).$$

$$6) g(x; n, m) = g(x; n-1, m-1) + x^m g(x; n-1, m).$$

$$7) g(x; n, m) = x^{m(n-m)} g\left(\frac{1}{x}; n, m\right).$$

$$8) g(x; s, q) \cdot g(x; s-q, r) = g(x; s, r) \cdot g(x; s-r, q).$$

$$9) g(x; -n, m) = (-1)^m x^{-mn - \frac{m(m-1)}{2}} g(x; n+m-1, m).$$

$$10) g(x; n, m) = g(x; n, n-m) \text{ für } n \geq 0.$$

$$11) g\left(\frac{1}{x}; n, m\right) = \frac{\vartheta(x; n)}{\vartheta(x; m) \vartheta(x; n-m)} \text{ für } n \geq m \geq 0.$$

12) In allen Fällen giebt die Entwicklung von  $g$  nach Potenzen

von  $x$  nur eine endliche Anzahl positiver und negativer Potenzen und sind die Coefficienten ganze nicht negative Zahlen.

13) Für  $n \geq 0$  ist  $g(x; n, m)$  eine ganze Function von  $x$ , für  $n > 0, m \geq 0$  verschwindet dieselbe nicht identisch.

§ 11.

Die Functionen  $\psi(\alpha), t(\alpha|\beta), v(\alpha|\beta)$ , dargestellt mit Hilfe der Indices.

Hat die Classe

$$\alpha = \text{cl} (\bar{a}_1 | \bar{a}_2 | \dots | \bar{a}_n)$$

die Indices  $a_h$ , so stellt  $a_h - a_{h-1}$  die Anzahl derjenigen Exponenten dar, welche gleich  $h - 1$  sind. Berücksichtigt man daher, dass  $\vartheta(x; 0) = 1$  ist, so erhält man nach § 6, III die Formel

$$(1) \quad \psi(\alpha) = x^{(1-n)\bar{a}_1 + (2-n)\bar{a}_2 + \dots + (n-1)\bar{a}_n} \cdot \frac{\vartheta(x; \alpha)}{\prod_h \vartheta(x; a_h - a_{h-1})}.$$

Es ist aber (§ 10, 2, 8)

$$x^{(1-n)\bar{a}_1 + (2-n)\bar{a}_2 + \dots + (n-1)\bar{a}_n} = x^{\sum_h^{(n-a_h)} a_h},$$

ferner

$$\begin{aligned} \vartheta(x; n) &= \prod_h \frac{\vartheta(x; n - a_{h-1})}{\vartheta(x; n - a_h)} = \prod_h \frac{\vartheta(x; a_h)}{\vartheta(x; a_{h-1})}, \\ \frac{\vartheta(x; n)}{\prod_h \vartheta(x; a_h - a_{h-1})} &= \prod_h \frac{\vartheta(x; n - a_{h-1})}{\vartheta(x; n - a_h) \vartheta(x; a_h - a_{h-1})} \\ &= \prod_h \frac{\vartheta(x; a_h)}{\vartheta(x; a_{h-1}) \vartheta(x; a_h - a_{h-1})} \\ &= \prod_h g\left(\frac{1}{x}; n - a_{h-1}, n - a_h\right) \\ &= \prod_h g\left(\frac{1}{x}; a_h, a_{h-1}\right) \quad (\S 10, 3, 11), \end{aligned}$$

und daher unter Berücksichtigung von § 10, 3, 7)

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \psi(\alpha) &= x^{\sum_h^{(n-a_h)} a_h} \prod_h g\left(\frac{1}{x}; n - a_{h-1}, n - a_h\right) \\ &= x^{\sum_h^{(n-a_h)} a_h} \prod_h g\left(\frac{1}{x}; a_h, a_{h-1}\right) \\ &= x^{\sum_h^{(n-a_h)} a_{h-1}} \prod_h g(x; n - a_{h-1}, n - a_h) \\ &= x^{\sum_h^{(n-a_h)} a_{h-1}} \prod_h g(x; a_h, a_{h-1}). \end{aligned}$$

Ist von den Classen

$$\alpha = \text{cl } (a_1' | \dots | a_n'),$$

$$\beta = \text{cl } (b_1' | \dots | b_n') = \beta_0$$

die erste durch die zweite theilbar, so ist (§ 8, III)

$$(2) \quad t(\alpha | \beta) = \frac{\psi(\beta) \cdot \varphi(\beta_1) \dots \psi(\beta_{n-2})}{\varphi(\bar{\beta}) \cdot \psi(\bar{\beta}_1) \dots \psi(\bar{\beta}_{n-2})} = \frac{\psi(\beta) \cdot \psi(\beta_1) \dots \psi(\beta_{n-1})}{\psi(\bar{\beta}) \cdot \psi(\bar{\beta}_1) \dots \psi(\bar{\beta}_{n-1})}.$$

Dabei ergibt sich die Bedeutung der Classen

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_0, \beta_i, \bar{\beta}_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

aus § 8, (5). Wir bezeichnen mit

$$a_h, b_h = b_h^{(0)}, \bar{b}_h^{(0)}, b_h^{(i)}, \bar{b}_h^{(i)} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

die Indices der Classen

$$\alpha, \beta = \beta_0, \bar{\beta} = \bar{\beta}_0, \beta_i, \bar{\beta}_i$$

und erhalten, weil  $\beta_i$  und  $\bar{\beta}_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) vom Grade  $n-i$  sind,

$$\psi(\beta_i) = x^{\sum_h^{(n-i-b_h^{(i)})} b_h^{(i)}} \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h^{(i)}, b_{h-1}^{(i)}\right),$$

$$\psi(\bar{\beta}_i) = x^{\sum_h^{(n-i-\bar{b}_h^{(i)})} \bar{b}_h^{(i)}} \prod_h g\left(\frac{1}{x}; \bar{b}_h^{(i)}, \bar{b}_{h-1}^{(i)}\right)$$

also nach (2)

$$(3) \quad t(\alpha | \beta) = x^{\sum_h \sum_{i=0}^{n-1} \{ (n-i-b_h^{(i)}) b_h^{(i)} - (n-i-\bar{b}_h^{(i)}) \bar{b}_h^{(i)} \}} \prod_h \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g\left(\frac{1}{x}; b_h^{(i)}, b_{h-1}^{(i)}\right)}{g\left(\frac{1}{x}; \bar{b}_h^{(i)}, \bar{b}_{h-1}^{(i)}\right)}.$$

Wir wollen den eben gefundenen Ausdruck so umformen, dass er nur die Indices von  $\alpha$  und  $\beta$  enthält.

Für  $a_h < i$  ist der Exponent von  $\alpha$   $a_i' \geq h$ , daher werden, wie aus § 8, (5) zu ersehen,  $b_h^{(i)} = 0$ ,  $\bar{b}_h^{(i)} = 0$ ,

$$\text{für } a_h = i \text{ ist } a_i' < h \leq a_{i+1}'$$

mithin

$$\bar{b}_h^{(i)} = 0, \quad b_h^{(i)} = b_h - i = b_h - a_h,$$

$$\text{für } a_h > i \text{ ist } a_{i+1}' < h,$$

daher wird

$$b_h^{(i)} = \bar{b}_h^{(i)} = b_h - i.$$

Hieraus folgt

$$(n-i-b_h^{(i)}) b_h^{(i)} - (n-i-\bar{b}_h^{(i)}) \bar{b}_h^{(i)} = 0 \text{ für } i \geq a_h,$$

$$= (n-b_h)(b_h-a_h) \text{ für } i = a_h,$$

$$(4) \quad \sum_h \sum_{i=0}^{n-1} (n-i-b_h^{(i)}) b_h^{(i)} - (n-i-\bar{b}_h^{(i)}) \bar{b}_h^{(i)} = \sum_h (n-b_h)(b_h-a_h).$$

Die Summe rechts ist über alle  $h$  zu erstrecken, für welche  $a_h$  einen der Werthe  $0, 1, \dots, n-1$  hat; da aber  $a_h$  ausserdem nur noch gleich  $n$  sein kann und in diesem Falle auch  $b_h = n$  wird, so brauchen wir dem  $h$  keine Beschränkung aufzuerlegen. Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{g\left(\frac{1}{x}; b_h^{(i)}, b_{h-1}^{(i)}\right)}{g\left(\frac{1}{x}; \bar{b}_h^{(i)}, \bar{b}_{h-1}^{(i)}\right)} = 1 \quad \text{für } i \geq a_{h-1}, \\ & = g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}\right) \quad \text{für } i = a_{h-1}, \end{aligned}$$

$$(5) \quad \prod_h \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g\left(\frac{1}{x}; b_h^{(i)}, b_{h-1}^{(i)}\right)}{g\left(\frac{1}{x}; \bar{b}_h^{(i)}, \bar{b}_{h-1}^{(i)}\right)} = \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad t(\alpha|\beta) &= x^{\sum_h (n-b_h)(b_h-a_h)} \cdot \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}\right) \\ &= x^{\sum_h (n-b_h)(b_{h-1}-a_{h-1})} \prod_h g(x; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}) \\ &= x^{\sum_h (n-b_h)(b_h-a_h)} \cdot \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_h - b_{h-1}\right) \\ &= x^{\sum_h (n-b_h)(b_{h-1}-a_{h-1})} \prod_h g(x; b_h - a_{h-1}, b_h - b_{h-1}) \\ & \quad (\S 10, 3, 10). \end{aligned}$$

Nach § 7, I hat man jetzt

$$(6) \quad v(\alpha|\beta) = \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\beta)} t(\alpha|\beta) = x^{\sum_h \{(n-a_h)a_h - (n-b_h)b_h + (n-b_h)(b_h-a_h)\}} \cdot \prod_h \frac{g\left(\frac{1}{x}; a_h, a_{h-1}\right) g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}\right)}{g\left(\frac{1}{x}; b_h, b_{h-1}\right)}.$$

Es ist aber

$$(7) \quad x^{\sum_h \{(n-a_h)a_h - (n-b_h)b_h + (n-b_h)(b_h-a_h)\}} = x^{\sum_h (b_h-a_h)a_h},$$

und nach § 10, 3, 11) der Ausdruck hinter dem Productzeichen gleich

$$\frac{\vartheta(x; a_h) \vartheta(x; b_{h-1}) \vartheta(x; b_h - b_{h-1})}{\vartheta(x; a_{h-1}) \vartheta(x; a_h - a_{h-1}) \vartheta(x; b_h)} \cdot \frac{\vartheta(x; b_h - a_{h-1})}{\vartheta(x; b_{h-1} - a_{h-1}) \vartheta(x; b_h - b_{h-1})}$$

Da nun

$$\prod_h \frac{\vartheta(x; a_h)}{\vartheta(x; a_{h-1})} = \vartheta(x; n), \quad \prod_h \frac{\vartheta(x; b_{h-1})}{\vartheta(x; b_h)} = \frac{1}{\vartheta(x; n)},$$

$$\prod_h \frac{\vartheta(x; b_h - a_{h-1})}{\vartheta(x; a_h - a_{h-1}) \vartheta(x; b_{h-1} - a_{h-1})} = \prod_h \frac{\vartheta(x; b_h - a_{h-1})}{\vartheta(x; a_h - a_{h-1}) \vartheta(x; b_h - a_h)}$$

$$= \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_h - a_h\right),$$

so geht (6) über in

$$\text{III. } v(\alpha|\beta) = x^h \sum^{(b_h - a_h) a_h} \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_h - a_h\right)$$

$$= x^h \sum^{(b_h - a_h) a_{h-1}} \prod_h g(x; b_h - a_{h-1}, b_h - a_h)$$

$$= x^h \sum^{(b_h - a_h) a_h} \prod_h g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, a_h - a_{h-1}\right)$$

$$= x^h \sum^{(b_h - a_h) a_{h-1}} \prod_h g(x; b_h - a_{h-1}, a_h - a_{h-1}).$$

Alle diese Ausdrücke sind unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass  $\alpha \geq \beta$  ist. Ist aber diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann man  $h$  so wählen, dass  $b_{h-1} < a_{h-1} \leq b_h$  ist, dann wird

$$g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}\right) = 0,$$

$$g(x; b_h - a_{h-1}, b_{h-1} - a_{h-1}) = 0,$$

$$g\left(\frac{1}{x}; b_h - a_{h-1}, b_h - b_{h-1}\right) = 0,$$

$$g(x; b_h - a_{h-1}, b_h - b_{h-1}) = 0,$$

die vier unter II angegebenen Ausdrücke verschwinden also identisch, und dasselbe gilt von den vier Ausdrücken III. Da nun in dem hier besprochenen Fall tatsächlich  $t(\alpha|\beta) = 0$ ,  $v(\alpha|\beta) = 0$  ist, so bestehen die angegebenen Formeln ohne jede Einschränkung.

## § 12.

Die Grade der Functionen  $\psi$ ,  $t$ ,  $v$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\delta}$ .

Da es im Folgenden nirgends mehr nöthig sein wird, Classen verschiedenen Grades neben einander zu betrachten, so sei jetzt festgesetzt, dass der Grad aller vorkommenden Classen mit  $n$  bezeichnet werde.

Die Formeln § 11, I zeigen, dass  $\psi(\alpha)$  eine ganze Function von  $x$  mit ganzzahligen Coefficienten ist, dass der Coefficient der höchsten Potenz von  $x$  gleich 1 und der Grad von  $\psi(\alpha)$  gleich

$$(1) \quad \sum_h (n - a_h) a_h$$

ist, wenn mit  $a_h$  die Indices von  $\alpha$  bezeichnet werden. Ist  $\beta$  ein Divisor von  $\alpha$ , so sind (§ 11, II, III)  $t(\alpha|\beta)$ ,  $v(\alpha|\beta)$  ebenfalls ganze Functionen von  $x$  mit ganzzahligen Coefficienten, und es ist auch bei ihnen der Coefficient der höchsten Potenz von  $x$  gleich 1. Als die Grade der Functionen  $t(\alpha|\beta)$ ,  $v(\alpha|\beta)$  ergeben sich, wenn mit  $b_h$  die Indices von  $\beta$  bezeichnet werden, die Ausdrücke

$$(2) \quad \sum_h (n - b_h)(b_h - a_h),$$

$$(3) \quad \sum_h (b_h - a_h) a_h.$$

Für die Functionen  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ,  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  haben wir nach § 9, IIa, IIIa die Relationen

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = t(\gamma|\alpha_1) \dots t(\gamma|\alpha_s) - \sum_{\gamma' \leq \mu < \gamma} t(\gamma|\mu) \bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \\ \bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = v(\alpha_1|\delta) \dots v(\alpha_s|\delta) - \sum_{\delta' \leq \mu > \delta} v(\mu|\delta) \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \end{cases}$$

worin  $\gamma' = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ ,  $\delta' = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  ist und die Summation über alle diejenigen Classen  $\mu$  zu erstrecken ist, welche den unter den Summenzeichen angegebenen Bedingungen genügen. Aus (4) und den Eigenschaften der Functionen  $t$  und  $v$  ersieht man, dass  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  ganze Functionen von  $x$  mit ganzzahligen Coefficienten sind, ferner, dass  $\bar{\gamma}$  verschwindet, wenn die Bedingung  $\gamma \geq \gamma'$  nicht erfüllt ist, dass  $\bar{\delta}$  verschwindet, wenn die Bedingung  $\delta \leq \delta'$  nicht erfüllt ist.

Wir wollen zunächst den Grad von  $\bar{\delta}$  näher untersuchen und setzen  $\delta \leq \delta'$  voraus. Der Coefficient der höchsten Potenz von  $x$  kann in keiner  $\bar{\delta}$ -Function negativ sein, weil die Function für keinen Prim-

zahlwerth von  $\alpha$  negativ sein kann, indem sie alsdann eine gewisse Anzahl darstellt. Aus (4) folgt daher, dass der Grad von  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  höchstens gleich dem Grade von  $v(\alpha_1 | \delta) \dots v(\alpha_s | \delta)$  d. i. — wenn mit  $a_h^{(i)}$ ,  $d_h$  die Indices von  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, s$ ),  $\delta$  bezeichnet werden —

$$(5) \quad \sum_{i=1}^s \sum_h (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)}$$

sein kann und dass nur die beiden folgenden Fälle möglich sind:

Entweder sind die Grade der Functionen

$$(6) \quad v(\mu | \delta) \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

( $\delta' \geq \mu > \delta$ ) sämmtlich kleiner als der Ausdruck (5); dann erreicht  $\bar{\delta}$  den angegebenen Maximalgrad und der Coefficient der höchsten Potenz ist 1. Oder es steigt von den Functionen (6) eine bis zum Grade

$$\sum_{i=1}^s \sum_h (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)}$$

an, dann bleibt der Grad von  $\bar{\delta}$  hinter diesem Ausdruck zurück.

Wir wollen beweisen, dass die Function  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  den angegebenen Maximalgrad (5) dann und nur dann erreicht, wenn die Classe  $\delta$ , welche bereits als Divisor von  $\delta'$  vorausgesetzt wurde, ein Vielfaches des Grenztheilers  $\delta''$  der Classen  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  ist. — Bezeichnen wir zu diesem Zweck mit  $m_h$  die Indices der variablen Classe  $\mu$ , so ergibt sich als Maximum für den Grad von

$$v(\mu | \delta) \cdot \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

der Ausdruck

$$(7) \quad \sum_h (d_h - m_h) m_h + \sum_{i=1}^s \sum_h (m_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)} \\ = \sum_{i=1}^s \sum_h (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)} - \sum_h \left\{ (d_h - m_h) \left( \left( \sum_{i=1}^s a_h^{(i)} \right) - m_h \right) \right\}.$$

Es wird ferner (§ 10, 2, 7) u. 5))  $\delta$  dann und nur dann ein Vielfaches von  $\delta''$  sein, wenn für jedes  $h$

$$(8) \quad d_h \leq \sum_{i=1}^s a_h^{(i)}$$

ist.

Ist nun diese Ungleichung beständig erfüllt, so folgt aus  $\mu > \delta$ , dass kein Glied der Summe

$$(9) \quad \sum_h \left\{ (d_h - m_h) \left( \left( \sum_{i=1}^s a_h^{(i)} \right) - m_h \right) \right\}$$

negativ wird. Dagegen muss wenigstens ein positives Glied in der Summe vorkommen, da die Gleichheit von  $\mu$  und  $\delta$  ausgeschlossen ist, also wenigstens für ein  $h$  die Differenz  $d_h - m_h$  und somit auch

$$\left( \sum_{i=1}^s a_h^{(i)} \right) - m_h > 0$$

ausfällt. In dem betrachteten Falle ist daher der Ausdruck (7) für jedes  $\mu$  kleiner als der Ausdruck (5).

Wenn dagegen die Bedingungen (8) nicht durchweg erfüllt sind, so setzen wir

$$[\delta, \delta''] = \mu',$$

dann ist der Index  $m'_h$  von  $\mu'$  gleich der kleineren der beiden Zahlen

$\sum_{i=1}^s a_h^{(i)}$  und  $d_h$ , und die Classe  $\mu'$  kommt, weil  $\delta' \geq \mu' > \delta''$  ist, unter

den Classen  $\mu$  vor. Aus  $m'_h \leq \sum_{i=1}^s a_h^{(i)}$  folgt nach dem soeben Bewiesenen, dass die Function  $\bar{\delta}(\mu'; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  wirklich bis zum Grade

$$\sum_{i=1}^s \sum_h (m'_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)}$$

die Function

$$v(\mu' | \delta) \cdot \bar{\delta}(\mu'; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

bis zum Grade

$$\sum_{i=1}^s \sum_h (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)} - \sum_h \left\{ (d_h - m'_h) \left( \left( \sum_{i=1}^s a_h^{(i)} \right) - m'_h \right) \right\}$$

ansteigt, und da überdies das Product

$$(d_h - m'_h) \left( \left( \sum_{i=1}^s a_h^{(i)} \right) - m'_h \right)$$

für jedes  $h$  verschwindet, so wird der Grad von

$$v(\mu' | \delta) \cdot \bar{\delta}(\mu'; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

gleich

$$\sum_{i=1}^s \sum_h (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)}.$$

In ganz ähnlicher Weise ergeben sich für die Function

$$\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

die folgenden Resultate:

Ist  $\gamma$  ein Vielfaches von  $\gamma' = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$  so ist  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  höchstens vom Grade

$$(10) \quad \sum_{i=1}^s \sum_h (n - a_h^{(i)}) (a_h^{(i)} - c_h),$$

wo mit  $c_h$  die Indices von  $\gamma$  bezeichnet worden sind. Die Function  $\bar{\gamma}$  erreicht diesen Grad, wenn  $\gamma$  Divisor von  $\gamma'' = [|\alpha_1, \dots, \alpha_s|]$  ist, und der Coefficient der höchsten Potenz von  $x$  ist alsdann  $= 1$ ; in den anderen Fällen wird der Maximalgrad nicht erreicht.

Da die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  in den Fällen, in welchen der angegebene Maximalgrad erreicht wird, nicht identisch verschwinden, so müssen sie, sobald  $x$  eine gewisse positive Grösse überschreitet, stets positiv bleiben. Es wird sich später zeigen, dass dies schon für  $x > 1$  eintritt, dass daher die Functionen für keinen Primzahlwerth von  $x$  verschwinden. Ferner wird es sich herausstellen, dass in den übrigen Fällen, für welche bisher nur gezeigt wurde, dass jener Maximalgrad nicht erreicht wird, die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  identisch verschwinden.

Damit ist alsdann der Beweis des Satzes § 7, V vollständig geführt. Um aber dahin zu gelangen, genügt es nicht, die Grade der Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  zu betrachten. Wir müssen ihre Natur näher untersuchen und wollen zunächst diejenigen Functionen ins Auge fassen, aus denen sich, wie später nachgewiesen wird, die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  durch Multiplication unter Hinzufügung eines Factors, der nur eine Potenz von  $x$  ist, herstellen lassen, in derselben Weise, wie die Functionen  $\psi, t, v$  mit Hilfe der  $g$ -Functionen ausgedrückt wurden.

### § 13.

#### Die $\omega$ -Functionen.

1. Wir bezeichnen mit

$$\omega(x|k|e|q_1, r_1; q_2, r_2; \dots, q_s, r_s)$$

die Summe

$$(1) \quad \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} \cdot g(x; e, m) g(x; q_1 - m, r_1) g(x; q_2 - m, r_2) \dots g(x; q_s - m, r_s).$$

$x$  heisst das Argument,  $k$  der erste,  $e$  der zweite Parameter der  $\omega$ -Functionen,  $q_1$  und  $r_1$  bilden das erste,  $q_2$  und  $r_2$  das zweite, ...  $q_s$  und  $r_s$  das  $s^{\text{te}}$  Parameterpaar. Alle Parameter sollen ganze Zahlen sein, und die Summe erstreckt sich über alle ganzen Zahlen  $m$ . Ist  $e \geq 0$ , — und auf diesen Fall können wir uns hier beschränken — so ist nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Summe von 0 ver-

schieden. Die  $\omega$ -Function ist dann eine rationale Function von  $x$ , welche nur für  $x = 0$  und  $x = \infty$  möglicherweise unendlich werden kann.

Die Function (1) soll eine „eigentliche“  $\omega$ -Function heissen, wenn kein Parameter negativ und ferner

$$q_i \geq \begin{cases} e \\ r_i \end{cases} \quad (i=1, \dots, s)$$

ist. In diesem Falle heisst der Ausdruck

$$k + r_1 + \dots + r_s - e$$

die kritische Zahl der  $\omega$ -Function; ihre Bedeutung werden wir bald kennen lernen.

2. Wir behandeln zunächst die  $\omega$ -Function ohne Parameterpaare

$$\omega(x|k|e) = \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} \cdot g(x; e, m).$$

Es ist

$$(2) \quad \omega(x|k|0) = 1$$

und für  $e > 0$  folgt aus

$$g(x; e, m) = g(x; e-1, m-1) + x^m g(x; e-1, m)$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega(x|k|e) &= \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} g(x; e-1, m-1) \\ &+ \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - (k-1)m} \cdot g(x; e-1, m). \end{aligned}$$

Da nun

$$\frac{m(m-1)}{2} - km = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (k-1)(m-1) - k$$

also

$$\begin{aligned} &\sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} \cdot g(x; e-1, m-1) \\ &= -x^{-k} \sum_m (-1)^{m-1} x^{\frac{(m-1)(m-2)}{2} - (k-1)(m-1)} \cdot g(x; e-1, m-1) \\ &= -x^{-k} \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - (k-1)m} \cdot g(x; e-1, m) \end{aligned}$$

ist, so erhält man aus (3)

$$(4) \quad \omega(x|k|e) = (1-x^{-k}) \omega(x|k-1|e-1)$$

und weiter, unter Berücksichtigung von (2),

$$(5) \quad \omega(x|k|e) = (1-x^{-k})(1-x^{-k+1}) \dots (1-x^{-k+e-1}).$$

Die betrachtete  $\omega$ -Function sei nun eine eigentliche, also

$$k \geq 0, \quad e \geq 0.$$

Dann ist  $k - e$  die kritische Zahl und man sieht aus (5), dass die Function identisch verschwindet, wenn die kritische Zahl negativ ist, dass sie dagegen anderenfalls für jedes  $x > 1$  einen positiven (von 0 verschiedenen) Werth hat.

3. Für die  $\omega$ -Function mit  $s$  Parameterpaaren, von welcher wir zunächst nur voraussetzen wollen, dass ihr zweiter Parameter  $e$  nicht negativ ist, erhält man durch Anwendung der Relation

$$g(x; q_s - m, r_s) = g(x; q_s - 1 - m, r_s - 1) + x^{r_s} g(x; q_s - 1 - m, r_s)$$

die Formel

$$(6) \quad \begin{aligned} &\omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_s, r_s) \\ &= x^{r_s} \cdot \omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_{s-1}, r_{s-1}; q_s - 1, r_s) \\ &+ \omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_{s-1}, r_{s-1}; q_s - 1, r_s - 1) \end{aligned}$$

und hieraus allgemeiner

$$(7) \quad \begin{aligned} &\omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_s, r_s) \\ &= \sum_{i=0}^t C'_i \omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_{s-1}, r_{s-1}; q_s - i, r_s - i), \end{aligned}$$

wo  $t$  irgend eine ganze nicht negative Zahl bezeichnet. Der Coefficient  $C'_i$  ist, wie man durch Induction leicht findet, gleich

$$x^{(r_s - i)(t - i)} \cdot g(x; t, i),$$

das, worauf es uns ankommt, ist, dass er für jeden positiven Werth von  $x$  selbst positiv ist.

4. Wir betrachten den besonderen Fall, dass  $q_s = e$  ist, und setzen  $e \geq 0$  voraus. Aus

$$g(x; e, m) \cdot g(x; e - m, r_s) = g(x; e, r_s) \cdot g(x; e - r_s, m)$$

ergiebt sich:

$$(8) \quad \begin{aligned} &\omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_{s-1}, r_{s-1}; e, r_s) \\ &= g(x; e, r_s) \omega(x|k|e - r_s|q_1, r_1; \dots q_{s-1}, r_{s-1}). \end{aligned}$$

Die  $\omega$ -Function auf der rechten Seite enthält ein Parameterpaar weniger. Der Factor  $g(x; e, r_s)$  verschwindet, wenn  $r_s < 0$  oder  $> e$  ist; sonst hat er für positives  $x$  einen positiven Werth.

5. Es sei jetzt

$$\omega(x|k|e|q_1, r_1; \dots q_s, r_s)$$

eine eigentliche  $\omega$ -Function. Dann ist  $q_s - e \geq 0$ , und wenn wir

Formel (7) für  $t = q_s - e$  und darauf Formel (8) zur Anwendung bringen, so erhalten wir

$$(9) \quad \omega(x|k|e|q_1, r_1, \dots, q_s, r_s) \\ = \sum_{l=0}^{q_s - e} C'_l g(x; e, r_s - l) \cdot \omega(x|k|e - r_s + l|q_1, r_1; \dots, q_{s-1}, r_{s-1}).$$

Setzt man  $r_s - l = h$ , so wird demnach

$$(10) \quad \omega(x|k|e|q_1, r_1, \dots, q_s, r_s) \\ = \sum_{\substack{0 \\ r_s + e - q_s \}}^{\leq h \leq \begin{matrix} e \\ r_s \end{matrix}} C'_{r_s - h} g(x; e, h) \cdot \omega(x|k|e - h|q_1, r_1; \dots, q_{s-1}, r_{s-1}) \\ = \sum_{\substack{0 \\ r_s + e - q_s \}}^{\leq h \leq \begin{matrix} e \\ r_s \end{matrix}} C_h \cdot \omega(x|k|e - h|q_1, r_1; \dots, q_{s-1}, r_{s-1}).$$

Die Summe erstreckt sich über alle  $h$ , welche den Bedingungen

$$\left. \begin{matrix} 0 \\ r_s + e - q_s \end{matrix} \right\} \leq h \leq \begin{matrix} e \\ r_s \end{matrix}$$

genügen, und die Coefficienten  $C$  haben für jedes positive  $x$  einen positiven Werth. Die  $\omega$ -Functionen auf der rechten Seite von (10) sind eigentliche und enthalten nur  $k - 1$  Parameterpaare. Es ist daraus zu ersehen, dass man jede eigentliche  $\omega$ -Function linear und homogen durch eigentliche  $\omega$ -Functionen ohne Parameterpaare so ausdrücken kann, dass alle Coefficienten für positives  $x$  positiv werden.

Die kritische Zahl der betrachteten  $\omega$ -Function ist

$$k + r_1 + \dots + r_s - e,$$

die Function

$$\omega(x|k|e - h|q_1, r_1; \dots, q_{s-1}, r_{s-1})$$

hat die kritische Zahl

$$k + r_1 + \dots + r_{s-1} + h - e,$$

welche für alle in Betracht kommenden Werthe von  $h$

$$\leq k + r_1 + \dots + r_s - e$$

ist. Daraus folgt, dass eine eigentliche  $\omega$ -Function mit negativer kritischer Zahl sich linear und homogen durch ebensolche  $\omega$ -Functionen ohne Parameterpaare ausdrücken lässt und mithin verschwindet.

Wir wollen nun annehmen, dass die kritische Zahl

$$k + r_1 + \dots + r_s - e \geq 0$$

sei. Auf der rechten Seite von (10) verschwinden die  $\omega$ -Functionen mit negativer kritischer Zahl, es bleibt aber wenigstens noch eine  $\omega$ -Function zurück, deren kritische Zahl nicht negativ ist, diejenige

nämlich, welche man erhält, wenn man  $h$  gleich der kleineren der beiden Zahlen  $e$  und  $r$ , setzt. Man erkennt hieraus, dass man in diesem Falle die  $\omega$ -Function durch eigentliche  $\omega$ -Functionen ohne Parameterpaare mit nicht negativer kritischer Zahl linear und homogen ausdrücken kann, und dass in diesem Ausdruck wenigstens eine derartige Function wirklich vorkommt. Da ferner die auftretenden Coefficienten für positives  $x$  selbst positiv sind, die  $\omega$ -Functionen aber, sobald  $x > 1$  ist, so hat auch  $\omega(x|h|e|q_1, r_1; \dots, q_s, r_s)$  für  $x > 1$  einen positiven Werth.

Damit sind wir zu dem wichtigen Resultat gelangt:

I. Eine eigentliche  $\omega$ -Function, deren kritische Zahl  $< 0$  ist, verschwindet identisch.

II. Eine eigentliche  $\omega$ -Function, deren kritische Zahl  $\geq 0$  ist, hat für  $x > 1$  einen positiven Werth.

#### § 14.

Die Functionen  $\bar{t}$  und  $\bar{v}$ .

Für  $e > 0$  ist

$$(1) \quad 0 = \omega(x|0|e) = \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot g(x; e, m).$$

Sind daher  $a, b, c$  ganze Zahlen, welche den Bedingungen

$$(2) \quad 0 \leq c \leq a < b$$

genügen, so geht, wenn man  $e$  durch  $b - a$  und  $m$  durch  $b - m$  ersetzt, Gleichung (1) über in

$$\sum_m (-1)^{b-m} x^{\frac{(b-m)(b-m-1)}{2}} \cdot g(x; b-a, b-m) = 0,$$

und man erhält durch Multiplication mit

$$x^{c(b-a)} \cdot g(x; b-c, a-c)$$

und unter Berücksichtigung der Identitäten

$$g(x; b-a, b-m) g(x; b-c, a-c) = g(x; m-c, a-c) g(x; b-c, b-m) \\ = g(x; m-c, m-a) g(x; b-c, b-m)$$

die Relation

$$(3) \quad \sum_m (-1)^{b-m} x^{\frac{(b-m)(b-m-1)}{2} + c(b-a)} \\ \cdot g(x; m-c, m-a) g(x; b-c, b-m) = 0.$$

Es seien nun  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Classen, deren Indices mit  $a_k, b_k$  bezeichnet werden mögen. Die Summe

$$(4) \quad F_h = \sum_{m_h} (-1)^{b_h - m_h} \cdot x^{\frac{(b_h - m_h)(b_h - m_h - 1)}{2} + (m_h - a_h)a_{h-1} + (b_h - m_h)b_{h-1}} \\ \cdot g(x; m_h - a_{h-1}, m_h - a_h) \cdot g(x; b_h - b_{h-1}, b_h - m_h)$$

hat dann für jedes  $h$ , wenn  $m_h$  alle ganzen Zahlen durchläuft, nur eine endliche Anzahl nicht verschwindender Glieder. Man sieht ferner, dass  $F_h = 1$  wird, wenn  $h \leq 0$  oder grösser ist als alle Exponenten von  $\alpha$  und  $\beta$ .

Da man sich bei der Summation auf diejenigen Werthe von  $m_h$  beschränken kann, welche den Bedingungen

$$(5) \quad b_h \geq m_h \geq \begin{cases} b_{h-1} \\ a_h \end{cases}$$

genügen, so verschwindet  $F_h$  für  $a_h > b_h$ .  $F_h$  verschwindet aber auch, wenn  $a_{h-1} = b_{h-1}$  und zugleich  $a_h < b_h$  ist. Denn alsdann geht, wenn man  $a_{h-1} = b_{h-1} = c$ ,  $a_h = a$ ,  $b_h = b$  setzt, der Ausdruck (4) in (3) über und die Bedingung (2) ist erfüllt. Ist dagegen  $a_{h-1} = b_{h-1}$ ,  $a_h = b_h$ , so ergibt sich  $F_h = 1$ . Das Product

$$\prod_h F_h$$

hat daher den Werth 1 oder 0, je nachdem die Classen  $\alpha$  und  $\beta$  gleich oder verschieden sind. Aus der in § 7 für die Functionen  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  gegebenen Definition folgt für den Fall, dass die Anzahl  $s$  der in  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ,  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  vorkommenden Classen  $\alpha$  sich auf 1 reducirt,  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha) = 1$  oder  $= 0$ ,  $\bar{\delta}(\delta; \alpha) = 1$  oder  $= 0$ , je nachdem  $\gamma$  und  $\alpha$ , bez.  $\delta$  und  $\alpha$  gleich oder verschieden sind. Man kann daher das für  $\prod_h F_h$  erhaltene Resultat ausdrücken durch die Gleichung

$$(6) \quad \prod_h F_h = \bar{\delta}(\alpha; \beta).$$

Aus (4) folgt

$$(7) \quad \prod_h F_h = \sum_{\dots m_0, m_1, \dots} \left\{ \left( (-1)^{\sum_h (b_h - m_h)} \cdot x^{\sum_h \left( \frac{(b_h - m_h)(b_h - m_h - 1)}{2} + (b_h - m_h)b_{h-1} \right)} \right. \right. \\ \left. \cdot \prod_h g(x; b_h - b_{h-1}, b_h - m_h) \right) \\ \left. \cdot \left( x^{\sum_h (m_h - a_h)a_{h-1}} \cdot \prod_h g(x; m_h - a_{h-1}, m_h - a_h) \right) \right\}.$$

Man erhält ein Glied dieser Summe, indem man dem  $m_h$  für jedes  $h$  einen bestimmten Werth nach Belieben beilegt. Man darf sich aber auf solche Werthenreihen für  $m_h$  beschränken, welche den Bedingungen (5) genügen, andere Werthenreihen liefern verschwindende Glieder und dürfen also nach Willkür hinzugenommen oder fortgelassen werden. Man erhält daher die Summe (7) vollständig, wenn man alle diejenigen Werthenreihen  $m_h$  berücksichtigt, welche den Bedingungen

$$(8) \quad \begin{aligned} b_h &\geq m_h \geq a_h, \\ m_h &\geq m_{h-1}, \end{aligned}$$

oder gar alle diejenigen, welche den Bedingungen

$$(9) \quad m_h \geq m_{h-1} \geq 0, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} m_h = n$$

genügen. Die letzteren besagen genau, dass die  $m_h$  die Indices einer Classe  $\mu$  vom Grade  $n$  bilden, während durch (8) noch ausgedrückt wird, dass diese Classe die Ungleichung

$$\alpha \geq \mu \geq \beta$$

erfüllt. Unter der Voraussetzung, dass die  $m_h$  die Indices einer Classe  $\mu$  bilden, ist der zweite Factor unter dem Summenzeichen in (7) nichts anderes als unsere Function  $v(\alpha | \mu)$ , während der erste eine wohldefinierte Function von  $\beta$  und  $\mu$  darstellt, die mit  $\bar{v}(\mu | \beta)$  bezeichnet werden mag

$$(10) \quad \bar{v}(\mu | \beta) = (-1)^h \sum^{(b_h - m_h)} \prod_h x^{\frac{(b_h - m_h)(b_h - m_h - 1)}{2} + (b_h - m_h)b_{h-1}} \cdot g(x; b_h - b_{h-1}, b_h - m_h).$$

Die Gleichung (6) geht hiernach über in

$$(11) \quad \sum_{\mu} v(\alpha | \mu) \bar{v}(\mu | \beta) = \bar{\delta}(\alpha; \beta),$$

wo die Summe über alle Classen  $\mu$  oder nur die zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  gelegenen zu erstrecken ist.

Aus (11) folgt

$$(12) \quad \begin{aligned} \sum_{\nu} \sum_{\mu} v(\alpha | \nu) \bar{v}(\nu | \mu) v(\mu | \beta) &= \sum_{\mu} \bar{\delta}(\alpha; \mu) v(\mu | \beta), \\ \sum_{\nu} \sum_{\mu} v(\alpha | \nu) \bar{v}(\nu | \mu) v(\mu | \beta) &= v(\alpha | \beta), \end{aligned}$$

ferner

$$(13) \quad \bar{v}(\alpha | \beta) = \bar{\delta}(\alpha; \beta) - \sum_{\mu < \alpha} v(\alpha | \mu) \bar{v}(\mu | \beta).$$

Die Summe rechts erstreckt sich über die Classen  $\mu$ , welche  $< \alpha$  sind;

ist also für alle diese Classen  $\bar{v}(\mu|\beta)$  bekannt, so lehrt (13),  $\bar{v}(\alpha|\beta)$  zu berechnen. Demnach ist durch die Relation (11) die Function  $\bar{v}(\alpha|\beta)$  vollkommen defnirt.

Ist  $\alpha$  kein Vielfaches von  $\beta$ , so ist  $\bar{v}(\alpha|\beta) = 0$ ; man ersieht dies aus (13), wenn man für  $\mu < \alpha$  die Gleichung  $\bar{v}(\mu|\beta) = 0$  als bewiesen annimmt.

Sodann zeigt (13), dass für  $\alpha = \beta$   $\bar{v}(\alpha|\beta) = 1$  wird. In beiden Fällen hat man:

$$(14) \quad \sum_{\mu} \bar{v}(\alpha|\mu) v(\mu|\beta) = \bar{\delta}(\alpha; \beta).$$

Indem wir nun für den noch nicht betrachteten Fall  $\alpha > \beta$  die Richtigkeit von (14) beweisen wollen, können wir wieder für jede Classe  $v < \alpha$  die Gleichung

$$\sum_{\mu} \bar{v}(v|\mu) v(\mu|\beta) = \bar{\delta}(v; \beta)$$

als bewiesen ansehen. Aus dieser folgt

$$(15) \quad \begin{aligned} \sum_{v < \alpha} \sum_{\mu} v(\alpha|v) \bar{v}(v|\mu) v(\mu|\beta) &= \sum_{v < \alpha} v(\alpha|v) \bar{\delta}(v; \beta), \\ \sum_{v < \alpha} \sum_{\mu} v(\alpha|v) \bar{v}(v|\mu) v(\mu|\beta) &= v(\alpha|\beta). \end{aligned}$$

Subtrahirt man (15) von (12), so erhält man rechts Null und links

$$\sum_{\mu} v(\alpha|\alpha) \bar{v}(\alpha|\mu) v(\mu|\beta) = \sum_{\mu} \bar{v}(\alpha|\mu) v(\mu|\beta).$$

Damit ist (14) allgemein bewiesen.

Für die Function

$$(16) \quad \bar{t}(\mu|\beta) = \frac{\psi(\beta)}{\psi(\mu)} \cdot \bar{v}(\mu|\beta)$$

folgen aus

$$\begin{aligned} t(\alpha|\mu) \bar{t}(\mu|\beta) &= \frac{\psi(\beta)}{\psi(\alpha)} v(\alpha|\mu) \bar{v}(\mu|\beta), \\ \bar{t}(\alpha|\mu) t(\mu|\beta) &= \frac{\psi(\beta)}{\psi(\alpha)} \bar{v}(\alpha|\mu) v(\mu|\beta), \\ \frac{\psi(\beta)}{\psi(\alpha)} \bar{\delta}(\alpha; \beta) &= \bar{\delta}(\alpha; \beta) = \bar{\gamma}(\alpha; \beta) \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von (11), (14)

$$(17) \quad \sum_{\mu} t(\alpha|\mu) \bar{t}(\mu|\beta) = \bar{\gamma}(\alpha; \beta);$$

$$(18) \quad \sum_{\mu} \bar{t}(\alpha|\mu) t(\mu|\beta) = \bar{\gamma}(\alpha; \beta).$$

Die Ausrechnung von  $\bar{t}$  mit Hülfe der für  $v$  und  $\psi$  geltenden Formeln ergibt nach (16)\*)

$$(19) \quad \bar{t}(\mu|\beta) = (-1)^{\sum_h (b_h - m_h)} \prod_h x^{\frac{(b_h - m_h)(b_h - m_h - 1)}{2} + (a - m_h)(b_{h-1} - m_{h-1})} \\ \cdot g(x; m_h - m_{h-1}, b_{h-1} - m_{h-1}).$$

Nach § 9, I, II ist

$$(20) \quad \sum_{\mu} t(v|\mu) \bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = t(v|\alpha_1) \cdot t(v|\alpha_2) \dots t(v|\alpha_s)$$

$$(21) \quad \sum_{\mu} v(\mu|\lambda) \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = v(\alpha_1|\lambda) \cdot v(\alpha_2|\lambda) \dots v(\alpha_s|\lambda).$$

Multipliziert man (20), (21) bez. mit  $\bar{t}(\gamma|v)$ ,  $\bar{v}(\lambda|\delta)$  und summirt man dann über  $v$  bez.  $\lambda$ , so erhält man unter Anwendung von (18), (11) links

$$\sum_{\gamma, \mu} \bar{t}(\gamma|v) t(v|\mu) \bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{\mu} \bar{\gamma}(\gamma; \mu) \cdot \bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s) \\ = \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

bez.

$$\sum_{\lambda, \mu} v(\mu|\lambda) \bar{v}(\lambda|\delta) \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{\mu} \bar{\delta}(\mu|\delta) \cdot \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \dots, \alpha_s) \\ = \bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$$

und somit die Gleichungen

$$(22) \quad \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_v \bar{t}(\gamma|v) \cdot t(v|\alpha_1) \dots t(v|\alpha_s)$$

$$(23) \quad \bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{\lambda} \bar{v}(\lambda|\delta) \cdot v(\alpha_1|\lambda) \dots v(\alpha_s|\lambda).$$

### § 15.

Darstellung von  $\bar{\gamma}$  und  $\bar{\delta}$  durch  $\omega$ -Functionen.

Die beiden letzten Gleichungen führen unmittelbar zur Darstellung von  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ,  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  durch  $\omega$ -Functionen. Es seien mit  $a_h^{(i)}$ ,  $c_h$ ,  $d_h$  die Indices von  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, s$ ),  $\gamma$ ,  $\delta$  bezeichnet.

Wir wollen nur die Function  $\bar{\delta}$  etwas eingehender behandeln. Man erhält, indem man die für die Functionen  $v$ ,  $\bar{v}$  gefundenen Ausdrücke substituirt, die Gleichung

\*) Vgl. die Berechnung von  $v(\alpha|\beta)$ , S. 41.

$$(1) \quad \bar{v}(\mu | \delta) v(\alpha_1 | \mu) \dots v(\alpha_s | \mu) \\ = \prod_h \left\{ (-1)^{d_h - m_h} \cdot x^{\frac{(d_h - m_h)(d_h - m_h - 1)}{2} + (d_h - m_h)d_{h-1} + (m_h - a_h^{(1)})a_{h-1}^{(1)} + \dots + (m_h - a_h^{(s)})a_{h-1}^{(s)}} \right. \\ \left. \cdot g(x; d_h - d_{h-1}, d_h - m_h) g(x; m_h - a_{h-1}^{(1)}, a_h^{(1)} - a_{h-1}^{(1)}) \right. \\ \left. \dots g(x; m_h - a_{h-1}^{(s)}, a_h^{(s)} - a_{h-1}^{(s)}) \right\},$$

wobei die  $m_h$  die Indices von  $\mu$  bedeuten. Um  $\bar{v}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  zu erhalten, hat man die Summe aller solcher Producte zu bilden, welche man für die verschiedenen Werthenreihen  $m_h$  erhält. Die  $m_h$  unterliegen dabei den für die Indices einer Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades geltenden Beschränkungen. Da man aber sofort sieht, dass für jede Reihe von Zahlen  $m_h$ , welche nicht Indices einer Classe  $n^{\text{ten}}$  Grades sind, das Product auf der rechten Seite von (1) verschwindet, so kann man die angegebene Beschränkung aufheben. Alsdann erhält man:

$$(2) \quad \bar{v}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{\mu} \bar{v}(\mu | \delta) \cdot v(\alpha_1 | \mu) \dots v(\alpha_s | \mu) \\ = \prod_h \left\{ \sum_{m_h} \left[ (-1)^{d_h - m_h} \cdot x^{\frac{(d_h - m_h)(d_h - m_h - 1)}{2} + (d_h - m_h)d_{h-1} + (m_h - a_h^{(1)})a_{h-1}^{(1)} + \dots + (m_h - a_h^{(s)})a_{h-1}^{(s)}} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot g(x; d_h - d_{h-1}, d_h - m_h) \cdot g(x; m_h - a_{h-1}^{(1)}, a_h^{(1)} - a_{h-1}^{(1)}) \right. \right. \\ \left. \left. \dots g(x; m_h - a_{h-1}^{(s)}, a_h^{(s)} - a_{h-1}^{(s)}) \right] \right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(3) \quad (d_h - a_h^{(1)})a_{h-1}^{(1)} + \dots + (d_h - a_h^{(s)})a_{h-1}^{(s)} = f_h$$

$$(4) \quad a_{h-1}^{(1)} + \dots + a_{h-1}^{(s)} - d_{h-1} = k_{h-1}$$

$$(5) \quad d_h - d_{h-1} = e_h$$

$$(6) \quad d_h - a_{h-1}^{(i)} = q_h^{(i)}, \quad a_h^{(i)} - a_{h-1}^{(i)} = r_h^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s),$$

so wird die in (2) vorkommende Summe gleich

$$x^{f_h} \omega(x | k_{h-1} | e_h | q_h^{(1)}, r_h^{(1)}; \dots, q_h^{(s)}, r_h^{(s)}),$$

und man erhält

$$I. \quad \bar{v}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \prod_h x^{f_h} \cdot \omega(x | k_{h-1} | e_h | q_h^{(1)}, r_h^{(1)}; \dots, q_h^{(s)}, r_h^{(s)}).$$

Jede der hier auftretenden  $\omega$ -Functionen

$$(7) \quad \omega_h = \omega(x | k_{h-1} | e_h | q_h^{(1)}, r_h^{(1)}; \dots, q_h^{(s)}, r_h^{(s)})$$

wird dargestellt durch eine Summe, welche nur eine endliche Anzahl nicht verschwindender Glieder enthält, weil nach (5)  $e_h \geq 0$  ist. Wenn

$h \leq 0$  oder grösser ist als alle Exponenten der Classen  $\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ , so ist  $f_h = 0$  und  $\omega_h = 1$ , weil alle Parameter von  $\omega_h$  ausser dem ersten gleich 0 werden. In dem Product I sind daher nur eine endliche Anzahl von Factoren von 1 verschieden.

Nach (5) und (6) ist

$$(8) \quad e_h \geq 0, \quad r_h \geq 0.$$

Damit  $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$  nicht identisch verschwinde, ist nothwendig und hinreichend, dass kein  $\omega_h$  verschwindet. Wir wollen annehmen, es sei dies der Fall, und sehen, welche Schlüsse wir daraus ziehen können.

Für  $h \leq 0$  ist  $q_h^{(i)} = 0 = r_h^{(i)}$ . Ist jetzt  $h$  irgend eine ganze Zahl, für welche  $q_{h-1}^{(i)} \geq r_{h-1}^{(i)}$  ist, so hat man

$$0 \leq q_{h-1}^{(i)} - r_{h-1}^{(i)} = d_{h-1} - a_{h-1}^{(i)} \leq d_h - a_{h-1}^{(i)} = q_h^{(i)},$$

also

$$q_h^{(i)} = 0.$$

Wäre nun  $q_h^{(i)} < r_h^{(i)}$ , so würde aus  $r_h^{(i)} > q_h^{(i)} \geq 0$  sich  $\omega_h = 0$  ergeben. Dies widerspricht der Voraussetzung, und daher ist für jedes  $h$

$$(9) \quad q_h^{(i)} \geq r_h^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Aus  $q_h^{(i)} - r_h^{(i)} = d_h - a_h^{(i)} = q_{h+1}^{(i)} - e_{h+1}$  folgt, dass die Bedingung (9) mit jeder der beiden folgenden äquivalent ist:

$$(10) \quad d_h \geq a_h^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s)$$

$$(11) \quad q_h^{(i)} \geq e_h \quad (i = 1, \dots, s).$$

Für  $h \leq 0$  ist  $k_h = 0$ . Ist  $h$  irgend eine ganze Zahl, für welche  $k_{h-1} \geq 0$  ist, so ist zufolge (8), (9), (10), (11)  $\omega_h$  eine eigentliche  $\omega$ -Function. Ihre kritische Zahl ist

$$k_{h-1} + r_h^{(1)} + \dots + r_h^{(s)} - e_h = k_h$$

und muss, damit  $\omega_h$  nicht verschwindet,  $\geq 0$  sein. Man hat also für jedes  $h$

$$(12) \quad k_h \geq 0.$$

Umgekehrt ergibt sich aus (8) bis (12), dass jedes  $\omega_h$  eine eigentliche  $\omega$ -Function mit nicht negativer kritischer Zahl ist, und hieraus folgt (§ 13, II) nicht nur, dass  $\bar{\delta}$  nicht identisch verschwindet, sondern auch, dass  $\bar{\delta}$  für jedes  $x > 1$  einen positiven Werth hat. Die Relation (12) ist mit

$$(13) \quad d_h \leq \sum_{i=1}^s a_h^{(i)},$$

die Relation (10) mit (9) und (11) äquivalent, während (8) von selbst erfüllt ist. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Nichtverschwinden der Function

$$\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \dots \alpha_s)$$

werden also durch die Relationen (10) und (13) dargestellt; und von diesen besagt die erste, dass  $\delta$  ein Divisor von  $\delta' = (\alpha_1, \dots \alpha_s)$ , die zweite, dass  $\delta$  ein Vielfaches von  $\delta'' = (|\alpha_1, \dots \alpha_s|)$  sein muss.

Für die Function  $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots \alpha_s)$  erhält man in derselben Weise, wenn man hier

$$\begin{aligned} (n - a_{h+1}^{(1)})(a_h^{(1)} - c_h) + \dots + (n - a_{h+1}^{(s)})(a_h^{(s)} - c_h) &= f_h \\ (n - a_{h+1}^{(1)}) + \dots + (n - a_{h+1}^{(s)}) - (n - c_{h+1}) &= k_{h+1} \\ c_{h+1} - c_h &= e_h \\ a_{h+1}^{(i)} - c_h &= q_h^{(i)}, \quad a_{h+1}^{(i)} - a_h^{(i)} = r_h^{(i)} \\ (i = 1, \dots s) \end{aligned}$$

setzt,

$$\text{II. } \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots \alpha_s) = \prod_h x^{f_h} \cdot \omega(x | k_{h+1} | e_h | q_h^{(1)}, r_h^{(1)}; \dots q_h^{(s)}, r_h^{(s)}).$$

Damit  $\bar{\gamma}$  nicht verschwinde, müssen alle

$$\omega_h = \omega(x | k_{h+1} | e_h | q_h^{(1)}, r_h^{(1)}; \dots q_h^{(s)}, r_h^{(s)})$$

eigentliche  $\omega$ -Functionen mit nicht negativer kritischer Zahl werden, und es hat alsdann  $\bar{\gamma}$  für jedes  $x > 1$  einen positiven Werth. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür werden dargestellt durch die Relationen

$$\begin{aligned} c_h &\leq a_h^{(i)} \\ c_h &\geq n - \sum_{i=1}^s (n - a_h^{(i)}), \end{aligned}$$

von denen die erste besagt, dass  $\gamma$  ein Vielfaches von  $\gamma' = [\alpha_1, \dots \alpha_s]$ , die zweite, dass  $\gamma$  ein Divisor von  $\gamma'' = [|\alpha_1, \dots \alpha_s|]$  sein muss.

Hiermit ist Satz V, § 7 vollständig bewiesen.

Charlottenburg, den 9. April 1898.