35.

Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

Erste Abhandlung.

1.

Pfaff hat in einer Abhandlung, welche unter denen der Berliner Academie vom J. 1814—15 zu lesen ist, gezeigt, wie man jede Gleichung von der Form:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n} = 0,$$

wo X_1, X_2, X_3, ..., X_{2n} beliebige Functionen von x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n} sind, durch ein System von n Gleichungen integriren kann, von welcher Aufgabe die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln nur ein besonderer Fall ist. Zu diesem Ende drückt er $2n-1$ von den Variabeln x_1, x_2, ..., x_{2n} durch die übrige x_m und durch $2n-1$ neue Gröfsen a_1, a_2, ..., a_{2n-1} aus, wo a_1, a_2, ..., a_{2n-1} gewisse Functionen von x_1, x_2, ..., x_{2n} sind. Nach solcher Substitution verwandelt sich die Gleichung:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n}$$

immer in eine andere von der Form:

$$U \partial x_m + A_1 \partial a_1 + A_2 \partial a_2 + \ldots + A_{2n-1} \partial a_{2n-1} = 0,$$

wo U, A_1, A_2, ..., A_{2n-1} Functionen von x_m, a_1, a_2, ..., a_{2n-1} sind. Die Functionen a_1, a_2, ..., a_{2n-1} bestimmt nun Pfaff so, dafs $U = 0$, und x_m in den Gröfsen A_1, A_2, ..., A_{2n-1} nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor vorkommt. Dividirt man mit diesem, so hat man die gegebene Gleichung in eine andere ähnliche, aber nur zwischen $2n-1$ Variabeln a_1, a_2, ..., a_{2n-1} verwandelt. Da dieses Verfahren nur bei einer geraden Anzahl Variabeln möglich ist, so kann man diese nicht minder auf eben die Weise in eine Gleichung zwischen nur $2n-2$ Variabeln verwandeln. Pfaff setzt daher eine dieser Variabeln einer Constante gleich, und verwandelt dann wieder die Gleichung zwischen den noch übrigen $2n-2$ Variabeln, in eine andere zwischen nur $2n-3$ Variabeln, deren eine er wieder einer Constante gleich setzt, und so fortfährt, bis er auf eine Gleichung zwischen nur 2 Variabeln kommt, deren Integration die letzte $n$te Gleichung mit der $n$ten willkürlichen Constante giebt. Auf diese Weise hat er die gegebene Gleichung durch ein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten integrirt.

Pfaff zeigt dann weiter auf eine ähnliche Art, wie es bei den partiellen Differentialgleichungen zu geschehen pflegt, dafs man aus solcher Lösung mit n willkürlichen Constanten andere Lösungen mit willkürlichen Functionen ableiten kann. Man denke sich nemlich die n Integralgleichungen auf die Form gebracht:

$$F_1 = C_1,\quad F_2 = C_2,\quad \ldots,\quad F_n = C_n,$$

wo C_1, C_2, ..., C_n, die willkürlichen Constanten sind, und F_1, F_2, ..., F_n diese nicht mehr enthalten. Denkt man sich jetzt die Gröfsen C_1, C_2, ..., C_n als Variabeln, so mufs sich, vermöge der Gleichungen

$$F_1 = C_1,\quad F_2 = C_2,\quad \ldots,\quad F_2 = C_n$$

der Ausdruck

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n}$$

in einen anderen verwandeln lassen von der Form

$$K_1 \partial C_1 + K_2 \partial C_2 + \ldots + K_n \partial C_n,$$

weil dieser Ausdruck verschwinden mufs, wenn C_1, C_2, ..., C_n Constanten gleich gesetzt werden. Es mufs also auf identische Weise sein:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n} = K_1 \partial F_1 + K_2 \partial F_2 + \ldots + K_n \partial F_n.$$

Dieser Ausdruck verschwindet nun aber nicht blofs, wenn F_1, F_2, ..., F_n Constanten gleich gesetzt werden, sondern auch, indem man m der Gröfsen F_1, F_2, ..., F_n als beliebige Functionen der übrigen setzt; z. B. F_1, F_2, ..., F_m als Functionen von F_{m+1}, F_{m+2}, ..., F_n; wodurch

$$K_1 \partial F_1 + K_2 \partial F_2 + \ldots + K_n \partial F_n = \Pi_1 \partial F_{m+1} + \Pi_2 \partial F_{m+2} + \ldots + \Pi_{n-m} \partial F_n$$

wird, und alsdann die Gleichungen

$$\Pi_1 = 0,\quad \Pi_2 = 0,\quad \ldots,\quad \Pi_{n-m} = 0$$

hinzufügt. Hat man

F_1

$$F_1 = \psi_1(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$F_2 = \psi_2(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_m = \psi_m(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n)$$

gesetzt, so wird

$$\Pi_1 = K_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial F_{m+1}}\right) + \ldots + K_m\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial F_{m+1}}\right) + K_{m+1},$$
$$\Pi_2 = K_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial F_{m+2}}\right) + \ldots + K_m\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial F_{m+2}}\right) + K_{m+2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Pi_{n-m} = K_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial F_n}\right) + \ldots + K_m\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial F_n}\right) + K_n,$$

und die gegebene Gleichung

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_{2n} \partial x_{2n} = 0$$

wird auch integrirt durch das System der n Gleichungen

$$F_1 = \psi_1(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$F_2 = \psi_2(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_m = \psi_m(F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n),$$
$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_{n-m} = 0.$$

Endlich erhält man noch eine Lösung, wenn man

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad \ldots, \quad K_n = 0$$

setzt, was mit derjenigen, wo man F_1, F_2, ..., F_n willkürlichen Constanten gleich setzt, gewissermafsen die beiden extremen Fälle bildet, welche der sogenannten singulären und vollständigen Lösung bei den partiellen Differentialgleichungen, die übrigen aber den sogenannten allgemeinen Lösungen entsprechen. Alle diese Lösungen haben einen bestimmten, unter sich verschiedenen Character, und man wird z. B. nie die ursprüngliche Lösung mit n willkürlichen Constanten erhalten können, indem man Functionen mit n Constanten für die willkürlichen Functionen annimmt. Pfaff hat nur diejenige Lösung angegeben, wo man eine der Functionen F_1, F_2, ..., F_n als Function der übrigen setzt.

2.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dafs alles auf eine allgemeine Methode, die Functionen a, a_2, ..., a_{2n-1} jedesmal zu bestimmen, ankommt, welches wir jetzt nach Pfaffs Anleitung unternehmen wollen.

Es sei also die Gleichung:

$$0 = X\partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_p \partial x_p$$

gegeben. Es seien a_1, a_2, ..., a_p gewisse Functionen von x, x_1, x_2, ..., x_p, und man denke sich x_1, x_2, ..., x_p durch diese und durch x ausgedrückt. Die unter dieser Voraussetzung nach x, a_1, a_2, ..., a_p genommenen partiellen Differentiale werde ich ohne Klammern bezeichnen, so daſs also z. B.

$$\frac{\partial X}{\partial a_1} = \left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \ldots + \left(\frac{\partial X}{\partial x_p}\right) \cdot \frac{\partial x_p}{\partial a_1}.$$

Die gegebene Gleichung

$$0 = X\partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_p \partial x_p,$$

verwandelt sich demnach in folgende:

$$0 = U\partial x + A_1 \partial a_1 + A_2 \partial a_2 + \ldots + A_p \partial a_p,$$

wo

$$\begin{aligned}
U &= X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x},\\
A_1 &= \phantom{X+{}} X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a_1},\\
A_2 &= \phantom{X+{}} X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_2} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a_2},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
A_p &= \phantom{X+{}} X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_p} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_p} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a_p}.
\end{aligned}$$

Man setze nun zuerst:

$$U = X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial x} = 0.$$

Damit ferner x in A_1, A_2, ..., A_p nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor M vorkomme, muſs man haben:

$$\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x} = \ldots = \frac{1}{A_p} \cdot \frac{\partial A_p}{\partial x} = \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial \log A_1}{\partial x} = \frac{\partial \log A_2}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial \log A_p}{\partial x} = \frac{\partial \log U}{\partial x}.$$

Es sei nun

$$A = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + X_p \frac{\partial x_p}{\partial a},$$

aus welchem Ausdruck man die verschiedenen Werthe von A_1, A_2, ..., A_p erhält, wenn man für a nach einander a_1, a_2, ..., a_p setzt, so hat man:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial X_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial a}$$

$$+ X_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\,\partial x} + X_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial a\,\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial^2 x_p}{\partial a\,\partial x}.$$

Aus der Gleichung

$$0 = X + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

folgt aber, wenn man sie nach a differentiirt,

$$X_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\,\partial x} + X_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial a\,\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial^2 x_p}{\partial a\,\partial x} =$$

$$-\left\{\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}.$$

Nun hat man:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial a} =$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$

$$+ \frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+ \frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X_p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}.$$

Ferner

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial X_p}{\partial a}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$

$$+ \frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+ \frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x_p}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right)\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\}.$$

Die Differenz beider Ausdrücke giebt $\frac{\partial A}{\partial x}$. Man setze der Kürze wegen $\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}\right) - \left(\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = (\alpha, \beta)$, wo also $(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0$, und z. B.

$$(0, 1) = \left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right) - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right):$$

so erhält man $\frac{\partial A}{\partial x} =$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial a}\left\{(1,0) + \quad * \quad + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + (1,3)\frac{\partial x_3}{\partial x} + \ldots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\} \\
+&\frac{\partial x_2}{\partial a}\left\{(2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad * \quad + (2,3)\frac{\partial x_3}{\partial x} + \ldots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\} \\
+&\frac{\partial x_3}{\partial a}\left\{(3,0) + (3,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (3,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \quad * \quad + \ldots + (3,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+&\frac{\partial x_p}{\partial a}\left\{(p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \quad * \quad\right\}.
\end{aligned}$$

Setzt man für a nach einander $a_1, a_2, \ldots, a_p$, so erhält man aus dieser Formel die verschiedenen Ausdrücke für $\frac{\partial A_1}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial A_p}{\partial x}$. Nun soll, welche der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ man für a setze, immer sein $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} = NA$, wenn man der Kürze halber $\frac{\partial \log U}{\partial x} = N$ setzt, oder

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial a}.NX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial a}.NX_2 + \ldots + \frac{\partial x_p}{\partial a}.NX_p,$$

welches der Fall sein wird, sobald die Coëfficienten von $\frac{\partial x_1}{\partial a}, \frac{\partial x_2}{\partial a}, \ldots \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial a}$, in beiden für $\frac{\partial A}{\partial x}$ gefundenen Ausdrücken respective gleich sind. Man erhält hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
NX_1 &= (1,0) + \quad * \quad + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (1,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
NX_2 &= (2,0) + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \quad * \quad + \ldots + (2,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
NX_p &= (p,0) + (p,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (p,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + \quad *
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_p}{\partial x}$ und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned}
&N\left\{X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x}\right\} \\
&= (1,0)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2,0)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (p,0)\frac{\partial x_p}{\partial x},
\end{aligned}$$

indem alle übrigen Glieder sich aufheben, oder da

$$0 = X + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_p\frac{\partial x_p}{\partial x},$$

die Gleichung:

$$NX = (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \dots + (0,p)\frac{\partial x_p}{\partial x}.$$

Man erhält auf diese Weise $p+1$ lineäre Gleichungen zwischen den $p+1$ unbekannten Gröfsen N, $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$.

Es hat sich also alles auf bloſse Relationen zwischen den nach x genommenen Differentialen $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ reducirt. Nun erhellet, daſs wenn man aus den aufgestellten Gleichungen für $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ resp. die Werthe $\frac{V_1}{V}$, $\frac{V_2}{V}$, ..., $\frac{V_p}{V}$ findet, die gesuchten Functionen a_1, a_2, ..., a_p diejenigen Functionen sind, welche bei Integration der Gleichungen:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \dots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \dots : V_p,$$

den p willkürlichen Constanten gleich gesetzt werden. Denn indem man nur die partiellen Differentiale nach x sucht, setzt man eben a_1, a_2, ..., a_p constant. In diesem Falle aber erhält man:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \dots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \dots : V_p,$$

oder

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{V_1}{V}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{V_2}{V}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{V_p}{V},$$

wie verlangt wurde. Findet man also aus den gefundenen $p+1$ Gleichungen die Werthe von V, V_1, V_2, ..., V_p, so giebt die Integration der Gleichungen:

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \dots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \dots : V_p,$$

die gesuchten Functionen a_1, a_2, ..., a_p.

3.

Die Gleichungen, aus denen man $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial x_p}{\partial x}$ zu suchen hat, sind dem Obigen zufolge, wenn man mit ∂x multiplicirt:

$$\text{A.}\left\{\begin{array}{l} NX\partial x = \quad * \quad + (0,1)\partial x_1 + (0,2)\partial x_2 + \dots + (0,p)\partial x_p, \\ NX_1\partial x = (1,0)\partial x + \quad * \quad + (1,2)\partial x_2 + \dots + (1,p)\partial x_p, \\ NX_2\partial x = (2,0)\partial x + (2,1)\partial x_1 + \quad * \quad + \dots + (2,p)\partial x_p, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ NX_p\partial x = (p,0)\partial x + (p,1)\partial x_1 + (p,2)\partial x_2 + \dots + \quad * \end{array}\right.$$

Findet man aus diesen Gleichungen:

$$\partial x = \frac{NV\partial x}{\Delta},\ \partial x_1 = \frac{NV_1\partial x}{\Delta},\ \ldots,\ \partial x_p = \frac{NV_p\partial x}{\Delta},\ \text{so wird:}$$

$$\partial x : \partial x_1 : \partial x_2 : \ldots : \partial x_p = V : V_1 : V_2 : \ldots : V_p.$$

Ferner erhält man $N = \frac{\Delta}{V}$.

Die Gleichungen (A) haben sehr merkwürdige Eigenschaften. Das Characteristische derselben ist, dafs die Verticalreihen der Coefficienten gerade das Negative der Horizontalreihen sind; daher auch diejenigen Glieder, in welchen die $m$te Horizontalreihe und die $m$te Verticalreihe zusammentreffen, verschwinden, wie es durch die in der Diagonale sich befindenden Sternchen anschaulich wird. Aus dieser Eigenschaft folgt zunächst, dafs $p+1$, oder die Anzahl der Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$, eine gerade Zahl sein mufs. Es ist nemlich bekannt, dafs man bei jedem System von n Gleichungen zwischen n unbekannten Gröfsen, darauf zu sehen hat, ob nicht der den Werthen der Unbekannten gemeinsame Nenner, welchen Gaufs in den *Disquis. Arithm.* mit dem Namen Determinante bezeichnet, verschwinden könne; welches ein Zeichen ist, dafs das System der n Gleichungen nicht bestehen kann, wofern nicht etwa eine Bedingungsgleichung zwischen den Constanten Statt findet, vermöge welcher die $n$te Gleichung eine Folge der übrigen $n-1$ Gleichungen ist. Nun bleibt nach dem bekannten Algorithmus, nach welchem die Determinante gebildet wird, diese unverändert, wenn man die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten mit einander vertauscht. Für unsern besondern Fall nun wird, wenn wir die Determinante mit Δ bezeichnen, hieraus folgen: $\Delta = (-1)^{p+1}\Delta$, da jedes Glied der Determinante ein Product aus $p+1$ Coefficienten ist, von denen jeder durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen sich in sein Negatives verwandelt. Diese Gleichung $\Delta = (-1)^{p+1}\Delta$ aber kann nur bestehen, wenn $p+1$ eine gerade Zahl ist, wofern nicht $\Delta = 0$ sein soll.

Ich will jetzt einige specielle Fälle entwickeln.

Für $p+1 = 4$, erhält man:

$$\begin{aligned}
V &= \quad * \quad + (2,3)X_1 + (3,1)X_2 + (1,2)X_3,\\
V_1 &= (3,2)X + \quad * \quad + (0,3)X_2 + (2,0)X_3,\\
V_2 &= (1,3)X + (3,0)X_1 + \quad * \quad + (0,1)X_3,\\
V_3 &= (2,1)X + (0,2)X_1 + (1,0)X_2 + \quad *\\
\Delta &= (0,1)(3,2) + (0,3)(2,1) + (0,2)(1,3).
\end{aligned}$$

Für $p+1=6$, erhält man, wenn man, der Kürze wegen, mit $(1,2,3,4)$ den Ausdruck

$$(1,2)\,(3,4) + (1,3)\,(4,2) + (1,4)\,(2,3)$$

bezeichnet, und nach diesem Typus die ähnlichen Ausdrücke bildet:

$$\begin{array}{l}
V\; = \quad * \quad +(2,3,4,5)X_1+(3,4,5,1)X_2+(4,5,1,2)X_3+(5,1,2,3)X_4+(1,2,3,4)X_5,\\
V_1=(3,2,4,5)X+\quad * \quad+(4,3,5,0)X_2+(5,4,0,2)X_3+(0,5,2,3)X_4+(2,0,3,4)X_5,\\
V_2=(1,3,4,5)X+(3,4,5,0)X_1+\quad * \quad+(4,5,0,1)X_3+(5,0,1,3)X_4+(0,1,3,4)X_5,\\
V_3=(2,1,4,5)X+(4,2,5,0)X_1+(5,4,0,1)X_2+\quad * \quad+(0,5,1,2)X_4+(1,0,2,4)X_5,\\
V_4=(1,2,3,5)X+(2,3,5,0)X_1+(3,5,0,1)X_2+(5,0,1,2)X_3+\quad * \quad+(0,1,2,3)X_5,\\
V_5=(2,1,3,4)X+(3,2,4,0)X_1+(4,3,0,1)X_2+(0,4,1,2)X_3+(1,0,2,3)X_4+\quad *
\end{array}$$

Um die allgemeine Bildungsweise dieser Ausdrücke auseinander zu setzen, werde ich sagen, dafs man einen Typus einen Cyclus durchlaufen lasse, indem man für die Zahlenelemente $0, 1, 2, \ldots, p$, aus denen er gebildet ist, nach einander resp. setzt:

$$\begin{array}{c}
0,\; 1,\; 2,\; 3,\; \ldots,\; p-1,\; p,\\
1,\; 2,\; 3,\; 4,\; \ldots,\; p,\; 0,\\
2,\; 3,\; 4,\; 5,\; \ldots,\; 0,\; 1,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
p-1,\; p,\; 0,\; 1,\; \ldots,\; p-3,\; p-2,\\
p,\; 0,\; 1,\; 2,\; \ldots,\; p-2,\; p-1.
\end{array}$$

Man erhält so, wie man an dem letzten Beispiele sehen kann, den Ausdruck, welcher V_m gleich ist, aus einem seiner Glieder, indem man es den Cyclus durchlaufen läfst, nachdem man aus der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots, p$ die Zahl m fortgelassen hat, wobei zu bemerken ist, dafs man das Gleiche auch mit dem Index von X zu thun hat. So erhält man aus dem Gliede $(3,2,4,5)X_0$ in dem für V_1 gefundenen Ausdruck die übrigen, indem man für $0,2,3,4,5$ nacheinander setzt $2,3,4,5,0$; $3,4,5,0,2$; $4,5,0,2,3$; $5,0,2,3,4$. Ferner erhält man aus dem ganzen für V_m gefundenen Ausdruck immer den folgenden für V_{m+1}, wenn man für $0, 1, 2, 3, \ldots, p$ resp. setzt, $1, 2, 3, \ldots, p, 0$, und in dem mit einer Klammer bezeichneten Typus die beiden ersten Elemente versetzt. So erhält man aus dem Gliede $(1,0,2,4)X_5$ in V_3, indem man für $0,1,2,3,4,5$, resp. $1,2,3,4,5,0$ setzt, das Glied $(2,1,3,5)X$, und indem man die beiden ersten Elemente in $(2,1,3,5)$ versetzt, das Glied $(1,2,3,5)X$, welches das erste Glied in dem für V_4 gefundenen Ausdruck ist. —

Es bleibt noch übrig, die Bildung eines solchen Typus, wie $(1,2,3,4)$ anzugeben. Setzt man für $p+1$ Elemente den Coefficienten von

X_1 in V gleich $(2, 3, 4, 5, \ldots, p-1, p)$, so wird $(2, 3, \ldots, p)$ aus $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p-2$ Gliedern bestehen. Das erste von diesen wird:

$$(2, 3) . (4, 5) . (6, 7) \ldots (p-1, p).$$

Aus diesem bilde man $p-2$, indem man die letzten $p-2$ Elemente $3, 4, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen läſst. Aus jedem dieser $p-2$ Glieder bilde man $p-4$, indem man die letzten $p-4$ Elemente $5, 6, \ldots \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen läſst, u. s. w., bis zuletzt die drei letzten Elemente $p-2$, $p-1$, p den Cyclus zu durchlaufen haben. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\begin{aligned}
&(2, 3, 4, 5, 6, 7) = \\
&(2,3).(4,5).(6,7) + (2,3).(4,6).(7,5) + (2,3).(4,7).(5,6) \\
+\ &(2,4).(5,6).(7,3) + (2,4).(5,7).(3,6) + (2,4).(5,3).(6,7) \\
+\ &(2,5).(6,7).(3,4) + (2,5).(6,3).(4,7) + (2,5).(6,4).(7,3) \\
+\ &(2,6).(7,3).(4,5) + (2,6).(7,4).(5,3) + (2,6).(7,5).(3,4) \\
+\ &(2,7).(3,4).(5,6) + (2,7).(3,5).(6,4) + (2,7).(3,6).(4,5).
\end{aligned}$$

Ist $p+1$ eine ungerade Zahl, so haben wir gesehen, daſs immer eine Bedingungsgleichung Statt finden muſs, wenn die Gleichungen (A) möglich sein sollen, oder wenn man die Gleichung

$$0 = X \partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_p \partial x_p,$$

auf eine ähnliche Gleichung zwischen nur p Variabeln soll zurückführen können. Für $p+1=3$ wird diese Bedingungsgleichung

$$X(1, 2) + X_1(2, 0) + X_2(0, 1) = 0;$$

welches die bekannte Conditio integrabilitatis ist.

Für $p+1=5$ wird sie

$$X(1,2,3,4) + X_1(2,3,4,0) + X_2(3,4,0,1) + X_3(4,0,1,2) + X_4(0,1,2,3) = 0.$$

Allgemein, wenn $p+1$ eine ungerade Zahl ist, wird sie

$$\Sigma X(1, 2, 3, \ldots, p) = 0,$$

wo man aus $X(1, 2, 3, \ldots, p)$ die sämmtlichen Glieder des mit Σ bezeichneten Aggregats bildet, indem man $0, 1, 2, \ldots, p$ einen Cyclus durchlaufen läſst. Dies ist also die Bedingungsgleichung, daſs die Gleichung

$$0 = X \partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_p \partial x_p,$$

wo p eine gerade Zahl ist, durch ein System von $\frac{p}{2}$ Gleichungen integrirt werden könne.

Die Aufstellung und Behandlung der Gleichungen (A) in der eleganten und vollkommen symmetrischen Form, wie sie hier gegeben sind, ist

ist das Eigenthümliche und der eigentliche Zweck dieser Abhandlung; doch mufste, des Zusammenhanges wegen, auch das Uebrige der Pfaffschen Methode kürzlich dargestellt werden. Es haben diese Gleichungen grofse Aehnlichkeit mit derjenigen bekannten Art, wo die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten dieselben sind, welchen man in sehr vielen analytischen Untersuchungen, unter andern auch bei der Methode der kleinsten Quadrate, begegnet. In den für V, V_1 etc. gefundenen Ausdrücken sind die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten von X, X_1 etc. wieder das Negative von einander, so wie in den Resultaten, welche dort die Auflösung giebt, beide Reihen wieder dieselben sind. Wendet man den von Gaufs in der Abhandlung über die elliptischen Elemente der Pallas gegebenen Algorithmus auf unser System an, so sieht man, wie mit grofser Leichtigkeit immer zwei Gröfsen auf einmal eliminirt werden können, und wie die neuen Gleichungen, deren Anzahl um zwei kleiner ist, wieder dieselbe Form erhalten. Dieses macht, dafs man ein solches System Gleichungen mit grofser Rapidität auflösen kann.

Zusatz. Nach Beendigung dieser Abhandlung bemerkte ich, dafs die Gleichungen, auf welche Lagrange und Poisson in ihren berühmten Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen sind, eben solches System bilden, wie wir hier näher erörtert haben. Man sehe das 15te Heft des polytechnischen Journals S. 288. 89. Da die Pfaffsche Methode ebenfalls auf Variation der Constanten beruht, so scheint dieses System von Gleichungen vorzugsweise bei der Methode der Variation der Constanten vorzukommen.

Den 14ten August 1827.