SUR LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS

PAR

HELGE VON KOCH
à STOCKHOLM.

Introduction.

Une propriété bien simple de la fonction exponentielle va nous servir comme point de départ pour cette étude: si l'on désigne par x et s deux nombres positifs on a

$$\text{(A)} \qquad \lim_{s=\infty}(1-e^{-x^s}) = \begin{cases} 1 \\ 1-e^{-1} \\ 0 \end{cases}$$

selon que

$$x \lesseqgtr 1.$$

Dans l'étude de la formule d'EULER (Introd. in anal. infin., t. I, Cap. 15):

$$\Sigma p^{-s} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \ldots = \log\zeta(s)$$

et des formules qui en résultant, cette remarque nous permet d'employer l'expression (A) comme facteur de discontinuité au lieu de l'intégrale définie

$$\text{(B)} \qquad \lim \frac{1}{2\pi i}\int_{a-is}^{a+is}\frac{x^z}{z}dz = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

dont on se sert ordinairement pour passer de la formule d'EULER à celle de RIEMANN (Mathem. Werke, I Aufl., p. 136) ou à des formules équivalentes.[1]

Nous arrivons ainsi à des expressions nouvelles pour la fonction $f(x)$ de RIEMANN et pour des fonctions numériques qui s'y rattachent. Ces expressions paraissent plus élémentaires que celles qu'on possède auparavant, et pour l'étude des questions asymptotiques elles présentent quelques avantages. Du moins, elles nous permettent de démontrer très facilement quelques résultats, prévus déjà par RIEMANN, mais qui, autant que je connais, n'ont pas encore été démontrés rigoureusement.

Parmi ces résultats, qui se trouvent exposés au § 7, je citerai le suivant:

Si $F(x)$ désigne le nombre des nombres premiers $\leqq x$ et si l'on admet, avec RIEMANN, que les racines de la fonction $\xi(t)$ de RIEMANN sont toutes réelles, la différence entre $F(x)$ et le logarithme intégral $Li(x)$ sera une quantité d'un ordre inférieur à celui de $x^{\frac{1}{2}+\sigma}$, σ désignant un nombre positif si petit qu'on le veut.

Il est bien possible qu'on pourra arriver au même résultat par d'autres méthodes, mais je crois que la méthode adoptée dans le présent travail conduit plus facilement au but.

---

§ 1. *Expression nouvelle de la fonction $f(x)$ de Riemann.*

Désignons par s un nombre positif > 1 et considérons la formule d'EULER

$$\Sigma p^{-s} + \frac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \ldots = \log \zeta(s) \tag{1}$$

[1] C'est en se servant de cette intégrale et en s'appuyant sur le théorème de M. HADAMARD (Journal de mathém., 1893) relatif à la fonction $\zeta(s)$ que M. VON MANGOLDT (Journal für Math., Bd. 114) a réussi à donner, pour la première fois, une démonstration rigoureuse de la formule de RIEMANN. — Dans les recherches importantes de M. HADAMARD (Bull. de la Soc. math. de France, 1896) et de M. DE LA VALLÉE POUSSIN (Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 1896; Mém. cour. de l'Acad. de Belgique, 1899) des intégrales analogues à (B) jouent un rôle fondamental.

les sommes s'étendant à tous les nombres premiers et $\zeta(s)$ désignant la fonction définie (pour $R(s) > 1$) par la série suivante

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

Dans cette formule, mettons νs à la place de s et multiplions les deux membres par

$$(-1)^{\nu-1} \frac{x^{\nu s}}{\underline{|\nu}},$$

x désignant un nombre positif donné; donnons à ν successivement les valeurs

$$\nu = 1, 2, 3 \text{ etc in inf.}$$

et faisons la somme de toutes les égalités ainsi obtenues. Les seconds membres nous donnent ainsi la série suivante

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s)$$

et la somme des premiers membres s'écrit comme une série triple

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum\nolimits_p \sum\nolimits_\lambda \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s}$$

où la somme $\sum_\lambda$ s'étend à tous les nombres entiers positifs, la somme $\sum_p$ à tous les nombres premiers successifs. Désignant cette série (2) par S, on a donc l'égalité

$$(3) \qquad S = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s).$$

Comme on a par hypothèse $s > 1$ la série (2) est absolument convergente; c'est ce qu'on voit en remarquant que

$$\sum\nolimits_\lambda \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s} < \left(\frac{x}{p}\right)^{\nu s} \frac{1}{1 - p^{-\nu s}} \leqq \left(\frac{x}{p}\right)^{\nu s} \frac{2^s}{2^s - 1}$$

d'où

$$\sum\nolimits_p \sum\nolimits_\lambda \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s} < \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu s} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^s + \left(\frac{2}{4}\right)^s + \ldots\right)$$

d'où

$$\sum_\nu \sum_p \sum_\lambda \left| \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s} \right| < \left(\frac{x}{2}\right)^s e^{\left(\frac{x}{2}\right)^s} K,$$

K désignant un nombre dépendant de s.

Il en résulte qu'on a le droit d'écrire

$$(4) \qquad S = \sum_p \sum_\lambda \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s} = \sum_p \sum_\lambda \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}).$$

Cette nouvelle série converge uniformément par rapport à s pour toutes les valeurs réelles de s remplissant la condition

$$(5) \qquad s \geqq 1 + h,$$

h étant un nombre fixe > 0. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de termes de cette série où l'on a

$$p^\lambda \leqq x;$$

pour les autres termes, on a

$$\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}\right) < \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s.$$

Comme la série

$$\sum_p \sum_\lambda \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s,$$

étendue aux nombres premiers p et aux nombres entiers positifs λ tels que $x < p^\lambda$, est évidemment uniformément convergente dans le domaine (5), il en est donc de même de la série (4).

Donc on a, en toute rigueur,

$$(6) \qquad \lim_{s=\infty} S = \sum_p \sum_\lambda \lim_{s=\infty} \left[\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}})\right].$$

Or, d'après la remarque faite au début, on a

$$\lim_{s=\infty} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{1}{\lambda}(1 - e^{-1}) \\ 0 \end{cases}$$

selon que

$$p^\lambda \lesseqgtr x.$$

Donc, désignant par $F(x)$ le nombre des nombres premiers $\leqq x$ et posant

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \dots [1]$$

on a

$$\lim_{s=\infty} S = f(x) - \frac{1}{\lambda} e^{-1}$$

si x est de la forme p^λ (p désignant un nombre premier et λ un entier positif) et, dans le cas contraire

$$\lim_{s=\infty} S = f(x).$$

L'identité

$$S = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s) \tag{8}$$

nous donne donc l'expression suivante pour $f(x)$:

$$f(x) = \varepsilon + \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s} \log \zeta(\nu s) \tag{9}$$

où l'on a $\varepsilon = 0$ si x n'est pas la puissance d'un nombre premier, mais $\varepsilon = \frac{1}{\lambda} e^{-1}$ si $x = p^\lambda$.

§ 2. *Expressions des fonctions* $\psi(x)$ *et* $\Lambda(x, r)$.

Désignons par $\theta(x)$ la somme des logarithmes naturels de tous les nombres premiers $\leqq x$ et posons

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots \tag{10}$$

ou, ce qui revient au même

$$\psi(x) = \sum_{p \leqq x} \log p + \sum_{p^2 \leqq x} \log p + \sum_{p^3 \leqq x} \log p + \dots,$$

[1] Quand x n'est pas la puissance d'un nombre premier, cette fonction coïncide avec la fonction $f(x)$ de RIEMANN.

La fonction $\psi(x)$ représente donc le logarithme du plus petit commun multiple de tous les nombres entiers $\leqq x$. On connaît le rôle considérable que joue cette fonction déjà dans les travaux de TCHEBYCHEFF.[1] Pour le but que nous nous proposons ici, il est nécessaire d'exprimer $\psi(x)$ par une formule analogue à (9).

A cet effet, différentions la formule (1) par rapport à s. Il vient

$$(10) \qquad \sum p^{-s}\log p + \sum p^{-2s}\log p + \ldots = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Dans cette formule, mettons νs à la place de s, multiplions par $\frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}x^{\nu s}$ et faisons la somme de $\nu = 1$ jusqu'à $\nu = +\infty$. On trouve ainsi

$$(12) \qquad \sum_{\nu=1}^{+\infty}\sum_p\sum_\lambda \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s}\log p = -\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}x^{\nu s}Z(\nu s),$$

où nous avons introduit, pour abréger, la notation

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = Z(s).$$

Ici, comme plus haut, on voit que la série triple converge absolument (s étant supposé > 1). Elle pourra donc s'écrire sous la forme

$$(13) \qquad \sum_p\sum_\lambda\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{\nu s}\log p = \sum_p\sum_\lambda(1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}})\log p.$$

Et l'on démontre, comme précédemment, que la série double du second membre converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de s supérieures à un nombre fixe > 1.

On trouve donc, en passant à la limite ($s = \infty$), que la série (13) prend la valeur

$$\psi(x) - e^{-1}\log p$$

si x est de la forme p^λ et, dans les autres cas, la valeur

$$\psi(x).$$

---

[1] Mémoire de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, 1850.

Ceci nous permet donc d'écrire

$$(14)\qquad \psi(x) = \omega - \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} Z(\nu s)$$

où l'on a $\omega = e^{-1} \log p$ si x est de la forme p^λ, mais $= 0$ dans le cas contraire.

Avant de tirer quelques conclusions de cette formule, nous allons écrire la formule correspondante pour une fonction qui embrasse $\psi(x)$ comme cas particulier et qui, d'après les travaux de M. VON MANGOLDT et de M. DE LA VALLÉE POUSSIN, joue, comme $\psi(x)$, un rôle important pour la théorie de la fonction $f(x)$ de RIEMANN.

Désignons par $\Lambda(x, r)$ la fonction suivante:[1]

$$(15)\qquad \Lambda(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{L(n)}{n^r}$$

où $[x]$ désigne le plus grand entier qui ne dépasse pas x et où la fonction $L(n)$ est définie par les conditions suivantes

α) $L(1) = 0$,

β) $L(n) = 0$, quand n est composé par des facteurs premiers distincts,

γ) $L(n) = \log p$, quand $n = p^\lambda$, p désignant un nombre premier et λ un nombre entier positif.

On voit que cette définition est identique à la suivante:

$$\Lambda(x, r) = \sum_{p \leqq x} p^{-r} \log p + \sum_{p^2 \leqq x} p^{-r} \log p + \ldots$$

les sommes étant étendues à toutes les puissances de nombres premiers $\leqq x$.

Pour avoir une expression de cette fonction, nous partons encore une fois de la formule (11). Mais cette fois nous mettons $r + \nu s$ à la place de s et procédons ensuite comme tout à l'heure. Il vient ainsi

$$(16)\qquad \Lambda(x, r) = \frac{\omega}{x^r} - \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} Z(r + \nu s)$$

où ω a la même signification que plus haut. Cette formule, qui est valable pour toute valeur de r, se confond, pour $r = 0$, avec la formule (14).

[1] Quand x n'est pas la puissance d'un nombre premier, cette fonction coïncide avec la fonction désignée par $\Lambda(x, r)$ par M. VON MANGOLDT (Journal für Math., Bd. 114, p. 279).

§ 3. *Rappel de quelques propriétés connues de la fonction* $\zeta(s)$.

Nous allons appliquer maintenant les formules obtenues à l'étude des fonctions numériques dont il s'agit.

Commençons par résumer les propriétés de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN dont nous aurons besoin dans la suite.

Pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité cette fonction est définie par la série suivante

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

C'est une fonction analytique régulière dans tout le plan sauf au point $s = 1$ qui est un pôle simple au résidu 1.

Pour toutes les valeurs de s on a

$$(1 - s)\zeta(s) = H(s)\zeta(0)e^{C\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s}{2}}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}, \tag{17}$$

C désignant la constante d'EULER et $H(s)$ étant une fonction entière dont toutes les racines sont situées entre l'axe imaginaire et une droite passant par le point $s = 1$, parallèle à cet axe.[1] Ces racines sont conjuguées deux à deux et à toute racine ρ correspond une racine $1 - \rho$.

Ces résultats sont tous établis par RIEMANN (loc. cit.). C'est à M. HADAMARD (Journal de mathematiques, 1893) qu'on doit le théorème fondamental relatif à la fonction $H(s)$ et qui peut s'énoncer ainsi qu'il suit.

Convenons de désigner par ρ_0 la quantité imaginaire conjuguée à ρ. Alors le produit

$$\prod_\rho\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s}{\rho_0}\right) \tag{18}$$

étendu à toutes les racines ρ de $H(s)$ dont la partie imaginaire est positive, converge absolument et représente la fonction $H(s)$:

$$H(s) = \prod_\rho\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s}{\rho_0}\right). \tag{19}$$

[1] $H(s)$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $\xi(t)$ de RIEMANN $\left(s = \frac{1}{2} + ti\right)$.

Des formules (17) et (19) résulte que la dérivée logarithmique $Z(s)$ de $\zeta(s)$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$Z(s) = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + \sum\nolimits_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\rho_0}\right). \tag{20}$$

Dans cette formule, ainsi que dans les formules que nous écrirons plus tard, le symbole $\sum_\rho$ désigne une sommation étendue à celles des racines $\rho = \alpha + \beta i$ où la partie imaginaire β est positive.

§ 4. *Etude de la fonction* $\Psi(x, s)$.

Appliquons la formule (20) à l'étude de la fonction

$$\Psi(x, s) = -\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} Z(\nu s) \tag{21}$$

que nous avons rencontrée plus haut.

Nous aurons

$$Z(\nu s) = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{\nu s-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + \sum\nolimits_\rho \left(\frac{1}{\nu s-\rho} + \frac{1}{\nu s-\rho_0}\right) \tag{22}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) = &-\left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi\right)(1 - e^{-x^s}) \\ &+ \sum_{\nu+1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} \\ &- \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu s+2n} - \frac{1}{2n}\right) \frac{(-s)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} \\ &- \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum\nolimits_\rho \left(\frac{1}{\nu s-\rho} + \frac{1}{\nu s-\rho_0}\right) \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s}. \end{aligned} \tag{23}$$

Or les séries doubles qui figurent dans cette formule convergent absolument (s étant toujours supposé > 1). C'est ce qu'on voit immédiatement en remarquant que les séries

$$\sum_n \left| \frac{1}{\nu s + 2n} - \frac{1}{2n} \right| \frac{1}{\nu}$$

et

$$\sum_\rho \left| \frac{1}{\nu s - \rho} + \frac{1}{\nu s - \rho_0} \right| \frac{1}{\nu}$$

convergent quel que soit ν et tendent vers zéro quand ν croît indéfiniment.

Donc, dans les séries doubles dont il s'agit, nous avons le droit d'intervertir l'ordre de sommation. Il en résulte que, si l'on introduit la notation

$$P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s} \tag{24}$$

l'expression précédente de $\Psi(x, s)$ prendra la forme

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) = & -\left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi\right)(1 - e^{-x^s}) \\ & + P(x, s, -1) \\ & - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n}(1 - e^{-x^s}) \right] \\ & - \Sigma_\rho [P(x, s, -\rho) + P(x, s, -\rho_0)]. \end{aligned} \tag{25}$$

On voit par là que l'étude de la fonction $\Psi(x, s)$ (et par suite de la fonction $\psi(x)$) dépend essentiellement de la fonction P définie par la formule (24).

Portons donc d'abord notre attention sur cette nouvelle fonction.

Comme fonction de x, $P(x, s, \alpha)$ est évidemment une fonction *entière;* comme fonction de α, elle est méromorphe dans tout le plan. Enfin, par rapport à s, nous n'avons besoin de considérer la fonction P que pour les valeurs réelles et positives de cette variable.

Cette fonction peut facilement être exprimée à l'aide d'une intégrale définie. On a, en effet

$$\sum_\nu \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s+\alpha} = \int dx \sum_\nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s+\alpha-1}$$

$$= \int dx \,.\, x^{\alpha-1}(1 - e^{-x^s})$$

d'où s'obtient la formule

$$P(x, s, \alpha) = x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha-1}(1 - e^{-y^s})dy, \tag{26}$$

valable tant que la partie réelle de $s + \alpha$ est plus grande que zéro.

En intégrant par parties deux fois successives, on trouve

$$P(x, s, \alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-x^s}) - \frac{sx^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)} - \frac{s^2}{\alpha(s+\alpha)} x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha+2s-1} e^{-y^s} dy. \tag{27}$$

A côté de cette formule, nous citerons la suivante:

$$P(x, s, \alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-x^s}) - e^{-x^s}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s^k x^{ks}}{\alpha(s+\alpha)\,.\,.\,(ks+\alpha)}. \tag{28}$$

Cette nouvelle formule peut s'obtenir soit à l'aide de la précédente, soit en partant de l'identité:

$$\frac{s^k}{\alpha(s+\alpha)\,.\,.\,(ks+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\underline{|k}} - \frac{1}{\alpha+s}\frac{1}{\underline{|1}}\,\frac{1}{\underline{|k-1}} + \,.\,.\, + (-1)^k \frac{1}{\alpha+ks}\frac{1}{\underline{|k}}. \tag{29}$$

Cette identité montre, en effet, que l'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s^k x^{ks}}{\alpha(s+\alpha)\,.\,.\,(ks+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{ks}}{\underline{|k}} - \frac{1}{\alpha+s}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{ks}}{\underline{|k-1}} + \,.\,.$$

$$= \frac{1}{\alpha}(e^{x^s} - 1) - \frac{x^s}{\alpha+s}e^{x^s} + \frac{1}{\underline{|2}}\frac{x^{2s}}{\alpha+2s}e^{x^s} - \,.\,.$$

d'où résulte immédiatement le développement (28).

Appliquons ces formules pour transformer l'expression (25).

En vertu de (27) on a

$$(30)\qquad P(x\,,\,s\,,\,2n)-\frac{1}{2n}(1-e^{-x^s})=-\frac{sx^se^{-x^s}}{2n(s+2n)}$$
$$-\frac{s^2}{2n(s+2n)}x^{-2n}\int_0^x y^{2n+2s-1}e^{-y^s}dy$$

et en s'appuyant sur la formule

$$(31)\qquad \int_0^x sy^{2s-1}e^{-y^s}dy=1-e^{-x^s}-x^se^{-x^s}$$

on voit que

$$(32)\qquad sx^{-2n}\int_0^x y^{2n+2s-1}e^{-y^s}dy<1-e^{-x^s}-x^se^{-x^s}.$$

Désignant, pour abréger, le premier membre de l'inégalité (32) par η_n, on obtient donc

$$(33)\qquad -\sum_{n=1}^{+\infty}\left[P(x\,,\,s\,,\,2n)-\frac{1}{2n}(1-e^{-x^s})\right]$$
$$=+sx^se^{-x^s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n(s+2n)}{1}$$
$$+s\sum_{u=1}^{+\infty}\frac{\eta_n}{2n(s+2n)}<s\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(s+2n)}.$$

De même, on a

$$(34)\qquad P(x\,,\,s\,,\,-\rho)+P(x\,,\,s\,,\,-\rho_0)=-(1-e^{-x^s})\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right)$$
$$+sx^se^{-x^s}2\Re\frac{1}{\rho(s-\rho)}$$
$$+s^22\Re\left[\frac{1}{\rho(s-\rho)}x^\rho\int_0^x y^{-\rho+2s-1}e^{-y^s}dy\right],$$

$\Re u$ désignant partout la partie réelle d'une quantité complexe u.

Or, ρ désignant une racine imaginaire de la fonction $\zeta(s)$, sa partie réelle est comprise entre 0 et 1. Donc la valeur absolue de l'expression

$$x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dy$$

est inférieure à la suivante

$$x \int_0^x y^{2s-2} e^{-y^s} dy = x \int_0^1 y^{2s-2} e^{-y^s} dy + x \int_1^x y^{2s-2} e^{-y^s} dy$$

qui, comme on voit, est inférieure à

$$\frac{x}{2s-1} + \frac{x}{s}(1 - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}).$$

s étant plus grand que 1, la dernière expression est évidemment moindre que $\frac{2x}{s}$. Nous pouvons donc écrire

$$(35) \qquad s^2 2\Re\left[\frac{1}{\rho(s-\rho)} x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dy\right] < s\tau \left|\frac{1}{\rho(s-\rho)}\right|,$$

τ désignant une quantité inférieure à $4x$ en valeur absolue. (Plus tard, nous trouverons une limite plus petite pour cette quantité.)

Donc la somme de toutes les quantités (34) converge absolument. D'autre part, comme la série

$$\sum_\rho \frac{x^\rho y^{-\rho+2s-1}}{\rho(s-\rho)}$$

converge uniformément par rapport à x (s ayant une valeur déterminée quelconque > 1), les signes Σ et $\int$ sont permutables et l'on aura

$$(36) \qquad \sum_\rho \Re\left[\frac{1}{\rho(s-\rho)} x^\rho \int_0^x y^{-\rho+2s-1} e^{-y^s} dx\right]$$

$$= \Re \int_0^x \left(\sum_\rho \frac{x^\rho y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)}\right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy$$

d'où enfin

$$(37)\qquad \sum\nolimits_\rho [P(x, s, -\rho) + P(x, s, -\rho_0)]$$

$$= -(1 - e^{-x^s}) \sum\nolimits_\rho \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}\right) + \eta + 2s^2 \Re \int_0^x \left(\sum\nolimits_\rho \frac{x^\rho y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)}\right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy,$$

η désignant un nombre tendant vers zéro comme $sx^s e^{-x^s}$ quand s croît.

Il nous reste encore à étudier le terme $P(x, s, -1)$ qui figure dans l'expression (25) de $\Psi(x, s)$.

La formule (26) nous donne

$$(38)\qquad P(x, s, -1) = x \int_0^x y^{-2}(1 - e^{-y^s}) dy$$

$$= x \int_0^1 y^{-2}(1 - e^{-y^s}) dy + x \int_1^x y^{-2}(1 - e^{-y^s}) dx$$

$$= xP(1, s, -1) + x - 1 - x \int_1^x y^{-2} e^{-y^s} dy.$$

Or

$$P(1, s, -1) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s - 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}$$

tend évidemment vers zéro quand s croît et cela d'une telle manière que le produit $sP(1, s, -1)$ tend vers une limite finie (à savoir $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu \underline{|\nu}}$).

De plus, on a

$$\int_1^x y^{-2} e^{-y^s} dy < \int_1^x \frac{dy}{y^{s+2}} = \frac{1}{s+1}\left(1 - \frac{1}{x^{s+1}}\right).$$

De la forme (38) résulte donc que nous pouvons écrire

$$(39)\qquad P(x, s, -1) = x - 1 + \frac{Kx}{s},$$

K désignant un nombre qui reste au-dessous d'une limite fixe quels que soient x et s.

Enfin, on sait[1] que

$$-1-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}l\pi+\sum_\rho\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right)=-l(2\pi).$$

Combinant toutes ces formules, on voit que la formule (25) prend la forme suivante

$$\Psi(x\,,\,s)=x-l(2\pi)+\frac{Kx}{s}+\varepsilon-\eta-2s^2\Re\int_0^x\left(\sum_\rho\frac{x^\rho y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)}\right)y^{2s-1}e^{-y^s}dy \tag{40}$$

où l'on a

$$\varepsilon<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s}{2n(s+2n)} \tag{41}$$

$$|\eta|<Asx^s e^{-x^s}, \tag{42}$$

A désignant un nombre fixe (indépendant de s et de x).

La fonction

$$\sum\frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}}x^{\nu s}Z(r+\nu s) \tag{43}$$

dont dépend, d'après (16), la fonction $\Lambda(x\,,\,r)$ peut, comme on voit facilement, s'exprimer à l'aide des fonctions $P(x\,,\,s\,,\,r-1)$, $P(x\,,\,s\,,\,r+2n)$, $P(x\,,\,s\,,\,r-\rho)$ de la même manière que nous avons exprimé plus haut (25) $\Psi(x,\,s)$ à l'aide des fonctions $P(x,\,s,\,-1)$, $P(x,\,s,\,2n)$, $P(x,\,s,\,-\rho)$. D'après cela, il serait facile d'obtenir pour (43) une formule analogue à (40).

[1] Voir, p. ex., J. Petersen, loc. cit. p. 269.

§ 5. *Remarques sur les séries*

$$\sum_n \frac{s}{2n(s+2n)}\,,\quad \sum_\rho \frac{s}{\rho(s-\rho)}\,,\quad \sum_\rho \frac{sx^\rho}{\rho(s-\rho)}\,.$$

Quand s augmente indéfiniment, la valeur de la série

(44) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(s+2n)}$$

grandit au delà de toute limite; mais son ordre de grandeur est inférieur à celui de la puissance s^σ, σ étant un nombre positif si petit qu'on le veut. En effet on a

$$\frac{s^{1-\sigma}}{2n(s+2n)} < \frac{1}{2n(s+2n)^\sigma} < \frac{1}{(2n)^{1+\sigma}}$$

d'où

(44') $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} < s^\sigma \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{1+\sigma}}\,.$$ [1]

Il en est de même de la série

(45) $$\sum_\rho \frac{s}{\rho(s-\rho)}$$

étendue aux racines imaginaires ρ de la fonction $\zeta(s)$. En effet, puisque la somme $\sum \frac{1}{\rho^{1+\sigma}}$ converge absolument, on peut écrire

(45') $$\sum_\rho \left|\frac{s}{\rho(s-\rho)}\right| < s^\sigma \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^{1+\sigma}}\,.$$

Pour évaluer l'ordre de grandeur de la série

(46) $$\sum_\rho \frac{sx^\rho}{\rho(s-\rho)}$$

---

[1] En s'appuyant sur l'inégalité

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{s}{2n(2n+s)} < \frac{s}{2(s+2)} + \int_1^\infty \frac{s\,dx}{2x(2x+s)} = \frac{s}{2(s+2)} + \log\frac{s+2}{2}$$

on trouve une limite encore plus petite, à savoir $\log(s+2)$, pour la série (44).

nous admettons, avec RIEMANN, que la partie réelle de chacune des racines ρ est égale à $\frac{1}{2}$.[1] Alors il résulte de la formule précédente que l'on a

$$\sum_\rho \left| \frac{sx^\rho}{\rho(s-\rho)} \right| < x^{\frac{1}{2}} s^\sigma \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^{1+\sigma}} \tag{46'}$$

σ étant, comme plus haut, un nombre positif arbitraire.

§ 6. *Transformation de la formule trouvée au § 2.*

Comme nous avons vu, la formule (12) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_p \sum_\lambda (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) \log p = \Psi(x, s), \tag{47}$$

$\Psi(x, s)$ étant défini par la formule (21). Supposons que le nombre donné x soit de la forme

$$x = n + \frac{1}{2},$$

n désignant un entier positif quelconque.

Partageons la somme figurant au premier membre de (47) en deux parties S_1 et S_2

$$S_1 = \sum_{p^\lambda < x} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) \log p,$$

$$S_2 = \sum_{p^\lambda > x} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) \log p,$$

la première somme s'étendant à toutes les puissances de nombres premiers inférieures à x, la seconde à toutes les puissances $p^\lambda > x$.

Dans l'hypothèse $p^\lambda < x$ on a $p^\lambda \leqq x - \frac{1}{2}$ d'où

$$e^{-x^s p^{-s\lambda}} < \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^{-s} \leqq \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right)^s.$$

---

[1] On sait que ce théorème n'est pas encore démontré rigoureusement. Mais, d'après un article récent de M. JENSEN (Acta mathematica, t. 22, p. 359), il y a lieu d'espérer que cette lacune sera prochainement comblée.

Posant:

$$S_1 = \psi(x) - \psi_1(x\,,\,s),$$

$$\psi_1(x\,,\,s) = \sum_{p^\lambda < x} e^{-x^s p^{-s\lambda}} \log p,$$

on a donc

$$\psi_1(x\,,\,s) < \psi(x)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s,$$

$\psi(x)$ conservant la même signification que plus haut (10).

Dans l'hypothèse $p^\lambda > x$ on a $p^\lambda \geqq x + \frac{1}{2}$, d'où

$$1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}} < x^s p^{-s\lambda} \leqq \left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s$$

$$S_2 = \sum_{p^\lambda > x} (1 - e^{-x^s p^{-s\lambda}}) \log p < \sum_{p^\lambda > x} x^s p^{-s\lambda} \log p < x^s \sum_{n=x+\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

De l'inégalité

$$\sum_{n=x+\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\log n}{n^s} < \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^s} + \int_{x+\frac{1}{2}}^{+\infty} x^{-s} \log x\,dx$$

$$= \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^s} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^s}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^s(s-1)}$$

résulte donc, si l'on prend

$$s - 1 > x + \frac{1}{2}$$

que l'on a

$$S_2 < 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s \log\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Donc $\Psi(x\,,\,s)$ peut s'écrire ainsi:

$$\Psi(x\,,\,s) = \psi(x) + \Delta \tag{48}$$

où

$$(49) \qquad |\Delta| < \psi(x)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s + 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s \log\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Or on a, d'après une remarque de M. MERTENS [1]

$$\psi(x) < 2x$$

et l'on sait que

$$\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2x}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x}},$$

$$\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x+1}}$$

d'où

$$(50) \qquad |\Delta| < 2xe^{-\frac{s}{2x}} + e^{-\frac{s}{2x+1}} \log\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

On voit donc qu'il suffit de prendre

$$s \geqq 2x \log x$$

pour que la différence Δ entre $\Psi(x, s)$ et $\psi(x)$ reste au-dessous d'un nombre fixe, quelque grand que soit x. Si l'on prend

$$s \geqq x^2$$

on voit que Δ tend avec une grande rapidité vers zéro quand x va en croissant. Autrement dit, si l'on prend $\Psi(x, s)$ $(s = x^2)$ comme valeur de $\psi(x)$ on commet une erreur qui tend avec une grande rapidité vers zéro quand x augmente..

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78.

§ 7. *Applications des formules précédentes. Expressions asymptotiques des fonctions* $\psi(x)$, $\theta(x)$, $f(x)$, $F(x)$.

Combinons maintenant les formules (40) et (48). Il vient

$$(51)\qquad \psi(x) = x - l(2\pi) + \frac{Kx}{s} + \varepsilon - \eta - \Delta$$

$$- 2s^2 \Re \int_0^x \left(\sum_\rho \frac{x^\rho y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)}\right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy,$$

ε, η et Δ satisfaisant aux inégalités (41), (42), et (49) respectivement.

Or on a

$$(52)\qquad \Re \int_0^x \left(\sum_\rho \frac{x^\rho y^{-\rho}}{\rho(s-\rho)}\right) y^{2s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< \int_0^1 \left(\sum_\rho \left|\frac{x^\rho y^{2s-\rho-1}}{\rho(s-\rho)}\right|\right) dy + \sum_\rho \left|\frac{x^\rho}{\rho(s-\rho)}\right| \int_1^x y^{2s-1} e^{-y^s} dy$$

$$= \sum_\rho \left|\frac{x^\rho}{\rho(s-\rho)(2s-\rho)}\right| + \sum_\rho \left|\frac{x^\rho}{\rho(s-\rho)}\right| \frac{1}{s}\left(2e^{-1} - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}\right)$$

(voir la formule (31)). La partie réelle de ρ étant comprise entre 0 et 1, on a (pour $s > 1$)

$$|2s - \rho| > s$$

ce qui montre que l'expression du second membre de (52) est inférieure à

$$\frac{2}{s} \sum_\rho \left|\frac{x^\rho}{\rho(s-\rho)}\right|$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(53)\qquad \psi(x) = x - l(2\pi) + \frac{Kx}{s} + \varepsilon - \eta - \Delta - \Delta_1$$

où

$$(54) \qquad |\Delta_1| < 4\sum_\rho \left|\frac{sx^\rho}{\rho(s-\rho)}\right|.$$

Dans cette formule, prenons $s = x^2$; alors les termes $\frac{Kx}{s} - \eta - \Delta$ restent au-dessous d'une limite finie, quel que soit x, et la formule (44') montre que

$$\varepsilon < x^{2\sigma} K$$

σ étant si petit qu'on le veut et K désignant une constante.

Quant à Δ_1, nous pouvons, dans l'hypothèse $R(\rho) = \frac{1}{2}$, appliquer la formule (46') et nous trouvons ainsi

$$|\Delta_1| < x^{\frac{1}{2}+2\sigma} K.$$

Par là se trouve donc démontré le théorème suivant:

Dans l'hypothèse $R(\rho) = \frac{1}{2}$ *la différence*

$$\frac{\psi(x)}{x} - 1$$

tend vers zéro pour $x = \infty$ *et cette différence est un infiniment petit d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de l'expression*

$$(55) \qquad \frac{x^\sigma}{\sqrt{x}} = x^{\sigma - \frac{1}{2}}$$

σ *désignant un nombre positif si petit qu'on le veut.*[1]

Si $\theta(x)$ désigne la somme des logarithmes de tous les nombres premiers $< x$ on sait que la différence entre $\psi(x)$ et $\theta(x)$ est de l'ordre de $\sqrt{x}$ (car on a

$$\psi(x) - 2\psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \theta(x) - \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \ldots < \theta(x)),$$

[1] J'ai donné une autre démonstration de ce théorème dans une note présentée à l'Académie de Stockholm le 9 mai 1900.

d'où résulte, dans la même hypothèse que précédemment relative aux racines ρ, le théorème qui suit:

La différence

$$\frac{\theta(x)}{x} - 1$$

tend vers zéro quand x tend vers l'infini et cette quantité est un infiniment petit d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de l'expression (55)

Pour trouver un résultat correspondant pour la fonction $f(x)$ de RIEMANN, on pourrait commencer par trouver une expression asymptotique de la fonction $\Lambda(x, r)$, analogue à celle trouvée plus haut (formule (53)) pour la fonction $\psi(x)$. Par là et remarquant que

$$f(x) = -\int_0^{+\infty} \Lambda(x, r)\,dr$$

on trouverait, après quelques réductions, une formule asymptotique pour $f(x)$.

Mais on arrive plus vite au but en combinant les résultats qui précèdent avec une formule établie par M. de la VALLÉE POUSSIN.[1]

Désignant, selon l'usage, par $Li(x)$ le *logarithme intégral* defini par formule

(56) $$Li(x) = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dx}{\log x} \right\}$$

la formule dont il s'agit peut s'écrire sous la forme suivante

(57) $$f(x) = Li(x) - l2 + \frac{1}{lx}(\psi(x) - x - l(2\pi))$$

$$-\frac{1}{lx}\left[\sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{-2m-u}\,du}{(2m+u)^2} + \sum_\rho \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-u}\,du}{(\rho-u)^2}\right]$$

la somme $\sum_\rho$ s'étendant à toutes les racines imaginaires de $\zeta(s)$.

[1] Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, p. 60 (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 49, 1899).

D'après ce qu'a montré M. de la VALLÉE POUSSIN (loc. cit. p. 61) l'expression entre crochets est inférieure à la quantité

$$\frac{1}{2x^2 lx} + \left[\frac{1}{lx} + \frac{2}{(lx)^2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{(12)^3}\right)\right] \sum_\rho \left|\frac{x^\rho}{\rho^2}\right|;$$

dans l'hypothèse $R(\rho) = \frac{1}{2}$, cette dernière expression est de l'ordre de $\frac{\sqrt{x}}{lx}$.

D'autre part, d'après ce que nous venons de démontrer, l'expression

$$\psi(x) - x - l(2\pi)$$

ne peut pas être d'un ordre d'infinitude supérieur à celui de $x^{\sigma + \frac{1}{2}}$.

La formule (57) montre donc que la différence entre $f(x)$ et $Li(x)$ est inférieure à

$$Kx^{\frac{1}{2}+\sigma}$$

σ étant un nombre positif si petit qu'on le veut et K désignant un nombre ne dépendant que de σ.

$f(x)$ étant lié à la fonction $F(x)$, qui exprime combien il y a de nombres premiers $< x$, par la relation

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots$$

on sait que la valeur de $F(x)$ se trouve comprise entre les limites $f(x)$ et $f(x) - f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) > f(x) - \sqrt{x}$, c'est-à-dire que la différence entre $f(x)$ et $F(x)$ est de l'ordre de $\sqrt{x}$.

De là résulte le théorème suivant:

Si l'on admet avec Riemann que chacune des racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ a la partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, on peut écrire

$$F(x) = Li(x) + \eta$$

où η désigne une fonction de x qui ne peut pas être d'un ordre de grandeur supérieur a celui de l'expression

$$x^{\frac{1}{2}+\sigma}$$

σ désignant un nombre positif si petit qu'on le veut.

NOTE ADDITIONNELLE.

Quand le mémoire précédent était déjà sous presse, j'ai remarqué qu'on peut, en tirant partie d'un théorème de M. VON MANGOLDT (loc. cit.) sur les zéros ρ, pousser un peu plus loin les résultats obtenus au § 7. En effet, de ce théorème résulte, ainsi qu'a montré M. DE LA VALLÉE POUSSIN (loc. cit. p. 42), que l'on a, quel que soit le nombre positif σ,

$$\sum_\rho \left|\frac{1}{\rho^{1+\sigma}}\right| < \frac{A}{\sigma^2},$$

A désignant une constante. Dès lors les formules (46′) et (53) montrent que l'on a

$$|\psi(x) - x| < B\frac{x^{2\sigma}}{\sigma^2}\sqrt{x},$$

σ étant un nombre positif arbitraire et B une constante (indépendante de x et de σ). Si x a une valeur donnée, $\frac{x^{2\sigma}}{\sigma^2}$ atteint pour $\sigma = \frac{1}{\log x}$ son minimum et ce minimum a pour valeur $e^2(\log x)^2$. On a donc, quel que soit x:

$$|\psi(x) - x| < Be^2(\log x)^2\sqrt{x}.$$

La formule correspondante pour $f(x)$ se déduit de l'expression (57) et l'on trouve ainsi

$$|f(x) - Li(x)| < K.\log x.\sqrt{x},$$

K désignant une constante. La différence $f(x) - F(x)$ étant de l'ordre de $\sqrt{x}$, la même formule s'applique à $F(x)$, d'où ce résultat:

Dans l'hypothèse $\Re(\rho) = \frac{1}{2}$ *il est certain que l'erreur commise en posant*

$$F(x) = Li(x)$$

est inférieure à $\log x.\sqrt{x}$, *multiplié par une constante.*[1]

Comme $\log x$ est d'ordre inférieur à toute puissance x^σ ($\sigma > 0$), on voit qu'on obtient ainsi une limite supérieure de l'erreur commise qui est, pour les grandes valeurs de x, infiniment petite par rapport à celle obtenue plus haut.

---

[1] D'après les formules précédentes, combinées avec la formule de M. DE LA VALLÉE POUSSIN citée plus haut, il serait facile d'assigner une valeur numérique à cette constante.