RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE DEUX VARIABLES D'ORDRE APPARENT TOTAL FINI.

Par M. **Jules Sire** (Lyon).

Adunanza del 14 agosto 1910.

INTRODUCTION.

Soit $F(u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq} u^p v^q$ une fonction entière en u et v; cette fonction est dite d'ordre apparent total fini s'il existe une quantité positive finie λ telle que l'on ait:

$$\lim_{p+q=\infty} \frac{-\log |c_{p,q}|}{(p+q)\log(p+q)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Cette fonction $F(u, v)$ ordonnée suivant les puissances entières de v s'écrit:

$$F(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u) v^n.$$

Mise sous cette forme, $F(u, v)$ peut être considérée comme une fonction entière en v dont les coefficients sont des fonctions entières du paramètre u. Pour chaque valeur finie de u, cette fonction entière en v a un ordre apparent que nous pouvons représenter par $\mu(u)$.

Nous nous sommes proposés dans le présent travail l'étude de cette fonction $\mu(u)$, en nous bornant au cas où $F(u, v)$ est d'ordre apparent total fini λ. Le résultat général auquel nous sommes parvenu est le suivant:

Si $F(u, v)$ est une fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini et si la fonction entière en v, $f(v) = \sum c_n v^n$ [c_n désignant le coefficient maximum de la fonction entière $a_n(u)$] est d'ordre apparent $\mu > 0$, $F(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, sauf pour les points d'un certain ensemble M pour lesquels elle est d'ordre apparent inférieur à μ.

Cet ensemble M est tel que l'ensemble N constitué par les points de M appartenant à une aire finie quelconque jouisse des propriétés suivantes:

a) il peut avoir la puissance du continu;

b) *sa projection orthogonale sur une droite quelconque a une mesure linéaire nulle, ou, ce qui revient au même, les droites parallèles à une direction donnée et portant des points de l'ensemble déterminent sur une perpendiculaire à leur direction un ensemble de points de mesure linéaire nulle.*

c) *les cercles concentriques à un point $u = b$ situé à distance finie dans le plan des u et portant des points de l'ensemble déterminent sur une droite quelconque passant par le point $u = b$ un ensemble de points de mesure linéaire nulle.*

Cette dernière propriété de l'ensemble N montre que d'un point quelconque $u = a$ de N, on peut tracer une circonférence de rayon moindre qu'un nombre positif ε arbitrairement petit et ne renfermant sur son périmètre aucun point de l'ensemble.

d) *les droites issues d'un point $u = a$ du plan des u situé à distance finie et portant des points de l'ensemble N autres que le point $u = a$, déterminent sur une circonférence concentrique au point $u = a$ un ensemble de points de mesure linéaire nulle.*

En combinant *c*) et *d*), on voit qu'il est possible de joindre deux points quelconques $u = a$ et $u = b$ de N situés à distance finie par un chemin continu ne renfermant pas d'autres points de N autres que les points $u = a$ et $u = b$.

Pour simplifier l'écriture, nous avons désigné dans le cours de notre travail sous le nom d'ensemble ponctuel, tout ensemble de points répartis dans un plan et dont la portion appartenant à une aire finie quelconque jouit des propriétés *a*), *b*), *c*) et *d*).

Après avoir rappelé dans un premier chapitre les notions relatives aux suites de nombres à un et à deux indices et aux fonctions entières d'une variable (notions qui nous étaient indispensables pour la suite de notre travail) nous avons étudié au Chapitre II les fonctions entières de deux variables à coefficients et à variables réels et positifs. Voici les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus:

Soit $N(R, r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R) r^n$ une fonction entière des deux variables réelles et positives R et r à coefficients réels et positifs ordonnée suivant les puissances entières de r, *le rapport* $\frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)}$, *où R_1 est une quantité positive, converge vers l'unité pour chaque valeur positive de R.* De ce résultat nous avons déduit les deux théorèmes suivants, dont le premier avait été obtenu par M. Borel:

Si $N(R_1, r)$, où R_1 désigne une quantité positive, est une fonction entière en r d'ordre apparent μ, $N(R, r)$ sera une fonction entière en r d'ordre apparent μ pour toutes les valeurs positives de R.

Si $N(R_1, r)$, où R_1 désigne une quantité positive, est une fonction entière en r d'ordre apparent μ et à croissance régulière, $N(R, r)$ sera une fonction entière en r d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour toutes les valeurs positives de R.

Soit g_n le coefficient maximum de $A_n(R)$, de la relation $\lim_{n=\infty} \frac{\log A_n(R)}{\log g_n} = 1$, nous avons déduit que *si $N(R, r)$ était d'ordre apparent μ par rapport à r, la fonction entière en r, $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n$, était d'ordre apparent μ, et inversement.*

Tous ces résultats ont été établis sans faire aucune hypothèse sur l'ordre apparent total de $N(R, r)$. En admettant que $N(R, r)$ est d'ordre apparent total fini et d'ordre apparent $\mu > 0$ par rapport à r, nous avons montré *que cette fonction pouvait se mettre sous la forme*

$$N(R, r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{q_n} Q_{q_n}(R) r^{q_n} + K(R, r),$$

g_{q_n} *étant le coefficient maximum de* $A_{q_n}(R)$ *et vérifiant quel que soit l'indice* q_n *la relation* $\left|\frac{-\log g_{q_n}}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \delta$, $Q_{q_n}(R)$ *étant un polynôme en* R *dont le degré* $\varphi(q_n)$ *est au plus égal à* $q q_n$ *(*q *étant un nombre entier fixe), et* $K(R, r)$ *étant une fonction entière en* R *et* r *d'ordre apparent au plus égal à* $\frac{\mu}{1 + 2\mu\delta}$ *par rapport à* r.

De ce résultat nous avons déduit que *si* $N(R, r)$ *était d'ordre apparent total fini et que si* $N(R_1, r)$ *était une fonction entière en* r *d'ordres apparents* (μ, μ_1), $N(R, r)$ *est une fonction entière en* r *d'ordres apparents* (μ, μ_1) *pour toutes les valeurs positives de* R. De plus nous avons montré, par un exemple, que si $N(R, r)$ était d'ordre apparent total infini et d'ordre apparent $\mu > 0$ fini par rapport à r, l'ordre apparent $\mu_1(R)$ pouvait varier d'une manière continue avec R.

Au Chapitre III nous avons étudié les points limites réguliers de l'ensemble des zéros d'une suite de polynômes

$$G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}(x), \; \ldots, \; G_{q_n}(x), \quad \ldots,$$

de la variable réelle x dont tous les zéros sont réels. Le point $x = \alpha$ est dit un point limite régulier de l'ensemble des zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$, si au nombre positif ε donné à l'avance, on peut faire correspondre un entier Q_ε tel que pour $q_n > Q_\varepsilon$, chaque polynôme $G_{q_n}(x)$ possède au moins un zéro à l'intérieur d'un segment concentrique au point $x = \alpha$ et de longueur 2ε. Si R_x est l'ensemble de ces points limites réguliers, cet ensemble R_x peut avoir la puissance du continu et dans ce dernier cas coïncider avec tous les points de l'axe des x, ou du moins avec tous les points d'un segment de Ox; de plus cet ensemble R_x est toujours un ensemble fermé. Dans le cas particulier où parmi les polynômes $G_{q_n}(x)$, il y en a une infinité dont le degré est au plus égal à p, l'ensemble R_x comprend au plus p points.

Nous avons également considéré à la fin de ce chapitre les points limites réguliers de l'ensemble des zéros d'une suite de polynômes $P_{q_n}(u)$ de la variable complexe u.

Dans le Chapitre IV, nous avons fait une étude de l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes

$$(G) \qquad G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}(x), \; \ldots, \; G_{q_n}(x), \quad \ldots,$$

où $G_{q_n}(x) = (x - \alpha_{q_n,1}) \ldots (x - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)})$, les $\alpha_{q_n,i}$ étant tous réels et satisfaisant aux conditions suivantes: 1° tous les zéros de ces polynômes appartiennent à un intervalle fini AB de l'axe des x; 2° si $\varphi(q_n)$ est le degré de $G_{q_n}(x)$, il existe un nombre entier fixe q tel que l'on ait, quel que soit l'indice q_n, $\varphi(q_n) < q q_n$. Nous avons désigné sous le nom de point de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ tout point $x=\alpha$ pour lequel on a : $\lim\limits_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\alpha)|}{q_n \log q_n} = k'$, k' étant une quantité positive finie ou infinie. De cette définition résulte immédiatement que tout point de moindre croissance est un point limite régulier de l'ensemble des zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$, mais la réciproque n'est pas vraie. Soit N_x l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$. En nous plaçant dans le cas particulier où la suite des nombres k_{q_n} admettait zéro comme élément limite unique $\Big[k_{q_n}$ étant le minimum de $\frac{-\log|G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n}$ dans l'intervalle $(\alpha_{q_n,1}, \alpha_{q_n,\varphi(q_n)})$, $\alpha_{q_n,1}$ et $\alpha_{q_n,\varphi(q_n)}$ étant les deux zéros extrêmes de $G_{q_n}(x)\Big]$ nous avons indiqué des cas pour lesquels cet ensemble était au plus dénombrable ou bien ne renfermait aucun point, et constaté également que cet ensemble pouvait avoir la puissance du continu. De plus nous avons montré que l'ensemble N_x avait toujours une mesure linéaire nulle, sans faire intervenir d'autres hypothèses que celles que nous avons faites sur les polynômes $G_{q_n}(x)$. Ensuite nous avons étudié l'ensemble N des points de moindre croissance d'une suite de polynômes de la variable complexe u :

$$P_{q_1}(u),\quad P_{q_2}(u),\ \ldots,\ P_{q_n}(u),\ \ldots,$$

où $P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \ldots (u - a_{q_n,\varphi(q_n)})$ et satisfaisant aux conditions suivantes : 1° tous les zéros des polynômes $P_{q_n}(u)$ appartiennent à un cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0 ; 2° si $\varphi(q_n)$ est le degré de $P_{q_n}(u)$, il existe un entier q fixe tel que l'on ait $\varphi(q_n) \leqq q q_n$. En utilisant les résultats obtenus dans le cas d'une suite de polynômes à variable réelle et dont tous les zéros sont réels, nous avons montré que cet ensemble N jouissait des propriétés que nous avons énoncées plus haut pour l'ensemble M, et par suite était un ensemble ponctuel.

Au Chapitre V, après avoir défini l'ordre apparent total d'une fonction entière en u et v, $F(u, v) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{q=0}^{\infty} c_{pq} u^p v^q$, et énoncé quelques propositions à ce sujet, nous avons d'abord étudié l'ordre apparent de $T(u, v) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{q_n} P_{q_n}(u)\, v^{q_n}$ par rapport à v, les c_{q_n} étant des constantes vérifiant les relations : $\lim\limits_{q_n=\infty} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$ et $\left|\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \delta$ pour toute valeur de l'indice q_n et les polynômes $P_{q_n}(u)$ étant identiques aux polynômes $P_{q_n}(u)$ précédemment considérés. Soit

$$(\delta) \qquad \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_i,\ \ldots \qquad (\delta_1 < \delta)$$

une suite de quantités positives décroissantes telles que $\lim\limits_{i=\infty} \delta_i = 0$; désignons par

$$c_{q_{1,i}},\ c_{q_{2,i}},\ \ldots,\ c_{q_{n,i}},\ \ldots$$

la suite des coefficients c_{q_n} vérifiant la relation $\left|\frac{-\log|c_{q_{n,i}}|}{q_{n,i} \log q_{n,i}} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \delta_i$, l'indice $q_{n,i}$ de $c_{q_{n,i}}$ étant égal à l'indice que possède ce nombre dans la suite des nombres c_{q_n}, et par $P_{q_{n,i}}(u)$ le polynôme $P_{q_n}(u)$ qui admet $c_{q_{n,i}}$ comme coefficient dans $T(u, v)$. Soit N^i l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_{n,i}}(u)$, l'indice i des indices $q_{n,i}$ étant le même pour tous ces polynômes, N^i est un ensemble ponctuel d'après ce qui a été dit plus haut et cela quel que soit i; si N est la somme de tous les ensembles N^i ainsi obtenus, N est un ensemble ponctuel, puisque la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ponctuels est également un ensemble ponctuel. Ceci posé, nous avons obtenu le résultat suivant:

La fonction $T(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent μ en tout point $u = b$ n'appartenant pas à l'ensemble N et, pour tout point $u = a$ de N, $T(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à μ.

Ensuite, nous avons étudié l'ordre apparent par rapport à v de la fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini λ, $G(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n}(u) v^{q_n}$, en supposant que les $c_{q_n}(u)$ sont des polynômes en u dont le degré $\varphi(q_n)$ est au plus égal à $q q_n$ et cela pour toute valeur de q_n (q étant un nombre entier fixe) et en outre que le coefficient maximum c_{q_n} de $c_{q_n}(u)$ vérifie les relations que nous avons indiquées plus haut à propos de la fonction entière en u et v, $T(u, v)$. Posons

$$P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \ldots (u - a_{q_n,\varphi(q_n)}),$$

$a_{q_n,1}, a_{q_n,2}, \ldots, a_{q_n,\varphi(q_n)}$ étant les zéros de $c_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R_0 + \eta$ (R_0 et η étant des quantités positives) et

$$c_{q_n}(u) = c_{q_n} P_{q_n}(u) g_{q_n}(u).$$

La suite des fonctions $\dfrac{-\log |g_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n}$ convergeant uniformément vers zéro dans le cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0, l'ordre apparent de $G(u, v)$ par rapport à v en tout point u du cercle C_{R_0} est égal à l'ordre apparent de

$$T(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} P_{q_n}(u) v^{q_n}$$

en tout point u du même cercle. Remarquant que R_0 peut être arbitrairement grand, et que tout ensemble dont la portion appartenant à une aire finie quelconque est ponctuel, est également un ensemble ponctuel, on constate, en tenant compte du résultat obtenu pour la fonction $T(u, v)$, que $G(u, v)$ est *une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, sauf pour les points d'un ensemble M ponctuel pour lesquels elle est d'ordre apparent inférieur à μ.*

Soit $F(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u) v^n$ une fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini λ, ordonnée suivant les puissances entières de v; si la fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^n$, [$c_n$ désignant le coefficient maximum de $a_n(u)$], est d'ordre apparent $\mu > 0$, nous avons montré, en utilisant une propriété des fonctions entières de deux variables à coefficients et à variables réels et positifs, que la fonction $F(u, v)$ pouvait se mettre sous la forme:

$$F(u, v) = G(u, v) + B(u, v),$$

$G(u, v)$ étant une fonction entière en u et v satisfaisant aux conditions énoncées plus haut et $B(u, v)$ une fonction entière en v d'ordre apparent au plus égal à $\frac{\mu}{1 + 2\mu\delta}$ pour chaque valeur finie de u, et nous avons déduit de la relation précédente, le résultat énoncé au début de cette introduction, en nous servant du théorème précédemment énoncé pour la fonction $G(u, v)$.

Nous avons également donné une limite supérieure du nombre des zéros des fonctions entières $a_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à un nombre positif R_0 donné à l'avance, et montré que pour l'étude de la portion de l'ensemble M appartenant au cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0, on pouvait substituer à la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$, où

$$P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \dots (u - a_{q_n,\varphi(q_n)}),$$

$a_{q_n,1}, a_{q_n,2}, \dots, a_{q_n,\varphi(q_n)}$ désignant les zéros de $S_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R_0 + \eta$ ($\eta > 0$), la suite des polynômes $P^{(1)}_{q_n}(u)$, où

$$P^{(1)}_{q_n}(u) = (u - a^{(1)}_{q_n,1})(u - a^{(1)}_{q_n,2}) \dots (u - a^{(1)}_{q_n,\theta(q_n)}),$$

$a^{(1)}_{q_n,1}, a^{(1)}_{q_n,2}, \dots, a^{(1)}_{q_n,\theta(q_n)}$ étant les zéros de $a_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R_0 + \eta$. Enfin, nous avons terminé par l'examen de quelques cas particuliers.

CHAPITRE I.

Notions fondamentales.

Sur les suites de nombres à un indice.

1. Soit

$$(U) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_n, \quad \dots$$

une suite de nombres positifs à un indice. Désignons par (U') l'ensemble formé par tous les éléments limites de la suite (U). (U') étant un ensemble fermé, possède un élément u plus petit que tous les autres. Cet élément u est par définition la plus petite limite de la suite (U).

Si ε est un nombre positif arbitrairement petit, il y a seulement un nombre fini d'éléments de (U) plus petits que $u - \varepsilon$, tandis qu'il y en a une infinité qui sont inférieurs à $u + \varepsilon$.

En effet, u étant le plus petit élément de (U'), ce dernier ensemble n'admettra aucun élément dans l'intervalle $(u - \varepsilon, -\infty)$, quel que petit que soit le nombre positif ε. Par suite (U) aura au plus un nombre fini d'éléments dans l'intervalle $(u - \varepsilon, -\infty)$.

Il en résulte donc que (U) possédera au plus un nombre fini d'éléments moindres que $u - \varepsilon$ et cela quel que petit que soit le nombre positif ε.

D'autre part, u étant un élément limite de (U), il y aura une infinité d'éléments de (U) dans l'intervalle $(u + \varepsilon,\ u - \varepsilon)$, quel que petit que soit le nombre positif ε. Il en résulte donc que (U) possédera une infinité d'éléments moindres que $u + \varepsilon$ et cela quel que soit le nombre positif arbitraire ε.

Pour indiquer que u est la plus petite limite des nombres u_n, on utilise la notation suivante dûe à M. PRINGSHEIM:

$$u = \underline{\lim}_{n=\infty} u_n.$$

2. Soit δ un nombre positif quelconque; nous désignerons sous le nom de suite principale U_δ, l'ensemble de tous les éléments u_{q_n} de (U) vérifiant la relation:

$$|u_{q_n} - u| \leqq \delta.$$

Admettons que u soit un élément isolé de (U') et désignons par t l'élément de (U') le plus rapproché de u: si δ et δ' sont deux nombres positifs inférieurs à $l = t - u$, (U') n'admettra aucun élément dans chacun des intervalles $(u + \delta,\ u + \delta')$, $(u - \delta,\ u - \delta')$, et par suite (U) aura au plus un nombre fini d'éléments dans chacun de ces deux derniers intervalles; et les deux suites principales U_δ et $U_{\delta'}$ ne différeront que par un nombre fini d'éléments.

Il résulte de là que *si u est un élément isolé de (U'), il existe un nombre positif $l = t - u$, tel que si δ et δ' sont deux nombres positifs inférieurs à l, les deux suites principales U_δ et $U_{\delta'}$ ne diffèrent que par un nombre fini d'éléments.*

Il n'en est plus de même si u est un élément limite de (U'); *dans ce cas quel que petit que soit le nombre positif δ, on peut toujours trouver un nombre positif $\delta' < \delta$ tel que les deux suites principales U_δ et $U_{\delta'}$ diffèrent par une infinité dénombrable d'éléments.*

En effet, u étant un élément limite de (U'), (U') aura au moins un élément t dans l'intervalle $(u + \delta,\ u)$. Il en résulte que si δ' est inférieur à $t - u$, (U') aura au moins un élément t dans l'intervalle $(u + \delta,\ u + \delta')$. Par suite (U) aura une infinité dénombrable d'éléments dans ce dernier intervalle et les deux suites principales U_δ et $U_{\delta'}$ différeront par une infinité dénombrable d'éléments.

Sur les suites de nombres à deux indices.

3. Soit (V) une suite de nombres positifs à deux indices $v_{p,q}$; désignons par (V') l'ensemble formé par tous les éléments limites de la suite (V). (V') est un ensemble fermé; il possède donc un élément v plus petit que tous les autres. Cet élément v est par définition la plus petite limite de la suite (V) pour $p + q = \infty$.

Cette plus petite limite se représente par la notation:

$$v = \underline{\lim}_{p+q=\infty} v_{p,q}.$$

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit; on voit, en procédant de la même manière qu'au n° 1, *que si v est la plus petite limite de la suite (V) pour $p + q = \infty$,* *il y a seulement un nombre fini de $v_{p,q}$ inférieur à $v - \varepsilon$, tandis qu'il y en a une infinité qui sont moindres que $v + \varepsilon$.*

Désignons par v_i la plus petite limite de la suite des nombres $v_{i,q}$, où i a une valeur entière fixe et où q prend toutes les valeurs entières et positives; v_i étant un élément limite de (V), on aura donc:

$$v_i \geqq v.$$

Soit δ un nombre positif arbitraire, nous désignerons sous le nom de suite principale V_δ, l'ensemble de tous les éléments v_{p_n,q_n} de la suite (V) vérifiant la relation:

$$|v_{p_n,q_n} - v| \leqq \delta.$$

Les remarques que nous avons faites au sujet des suites principales U_δ dans le cas des suites à un indice s'appliquent également aux suites principales V_δ.

Supprimons de la suite (V), tous les éléments v_{p_n,q_n} de cette suite appartenant à la suite principale V_δ, nous obtenons une nouvelle suite à deux indices (T) dont la plus petite limite pour $p + q = \infty$ sera au moins égale à $v + \delta$, car tous les éléments de (T) sont supérieurs à ce dernier nombre.

L'un au moins des indices p_n, q_n des éléments de la suite principale V_δ augmente indéfiniment avec n. Il peut arriver en particulier qu'à partir d'une certaine valeur δ_1 de δ, les indices q_n augmentent indéfiniment avec n, tandis que les indices p_n restent inférieurs ou au plus égaux à un certain nombre fixe p. Dans cette hypothèse v sera égal à l'un au moins des nombres $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

4. Représentons par w_n le plus petit des nombres $v_{p,q}$ dont la somme $p + q$ des indices est égale à n. *Si v est la plus petite limite pour $p + q = \infty$ de la suite (V), v est aussi la plus petite limite de la suite des nombres à un indice w_n.*

En effet, admettons que v soit la plus petite limite pour $p + q = \infty$ de la suite (V), et soit δ un nombre positif arbitrairement petit. Les nombres w_n faisant partie de la suite (V), il y en a seulement un nombre fini qui sont moindres que $v - \delta$.

Cette remarque faite, désignons par

$$v_{p_1,q_1},\quad v_{p_2,q_2},\ \ldots,\ v_{p_n,q_n},\ \ldots$$

les éléments de (V) faisant partie de la suite principale V_δ, c'est-à-dire appartenant à l'intervalle $(v + \delta, v - \delta)$, extrémités comprises, et posons $n_i = p_i + q_i$; nous aurons

$$w_{n_i} \leqq v_{p_i,q_i}$$

et par suite:

$$w_{n_i} \leqq v + \delta;$$

et tous les w_{n_i}, à l'exception d'un nombre fini d'entr'eux, en vertu de la remarque précédente, appartiendront à l'intervalle $(v - \delta, v + \delta)$. Comme δ est un nombre positif arbitrairement petit, v sera un élément limite de la suite des w_n. Ce sera, en outre, le plus petit des éléments limites de cette dernière suite, puisque, comme nous l'avons vu plus haut, il y a seulement un nombre fini de w_n moindres que $v - \delta$. Il en résulte que v est la plus petite limite de la suite des nombres w_n à un indice.

Inversement, si v est la plus petite limite de la suite des nombres w_n à un indice, v sera également la plus petite limite pour $p+q=\infty$ de la suite (V).

En effet, v étant la plus petite limite de la suite des w_n, il y a seulement un nombre fini de nombres de cette suite:

$$w_{q_1}, \quad w_{q_2}, \quad \ldots, \quad w_{q_m}$$

moindres que $v-\delta$, tous les autres étant au moins égaux à $v-\delta$. Par suite, en tenant également compte de la définition des w_n, on voit que les seuls nombres $v_{p,q}$ de la suite (V) inférieurs à $v-\delta$, font partie de la suite des nombres $v_{p,q}$ pour lesquels la somme $p+q$ des indices prend les valeurs:

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_m.$$

Le nombre des éléments $v_{p,q}$ de cette dernière suite étant fini, il en résulte que le nombre des $v_{p,q}$ inférieurs à $v-\delta$ est fini. Comme ceci a lieu, quel que petit que soit le nombre positif δ, et que v est un élément limite de (V), puisque les w_n font partie de cette suite, il s'ensuit que v est le plus petit élément limite de la suite (V).

Sur les fonctions entières d'une variable. — Ordre apparent.

5. Soit $f(v)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$ une fonction entière de la variable complexe v; on sait que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|a_n|}{n}=+\infty.$$

Ceci posé, considérons l'ensemble S des nombres $\frac{1}{\mu_n}=\frac{-\log|a_n|}{n\log n}$. Il peut arriver que S admette une plus petite limite, finie et différente de zéro, $\frac{1}{\mu}$; on dit alors que la fonction entière $f(v)$ est d'ordre apparent μ.

Le nombre μ étant ainsi défini, si $-\mu_1$ est la plus petite limite de la suite des nombres

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{\mu_n}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{\log n}{\log_2 n},$$

on dit que la fonction entière en v, $f(v)$, est d'ordres apparents (μ, μ_1).

Remarquons que pour l'étude de la plus petite limite de la suite (1), on peut supprimer tous les termes $\left(\frac{1}{\mu_{p_n}}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{\log p_n}{\log_2 p_n}$ de cette suite dont les nombres $\frac{1}{\mu_{p_n}}$ sont à une distance de $\frac{1}{\mu}$ supérieure à δ.

Désignons par $M(r)$ le module maximum de $f(v)$ pour $|v| = r$, il résulte d'un théorème établi par M. LINDELÖF [1]) que:

Si la fonction $f(v)$ entière en v est d'ordres apparents (μ, μ_1), on a:

$$e^{r^{\mu}(\log r)^{\mu_1 - \varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\mu}(\log r)^{\mu_1 + \varepsilon}}$$

(ε nombre positif arbitraire), la première inégalité étant vérifiée pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes et la deuxième pour toutes les valeurs de r dépassant un certain nombre fixe r_ε, et réciproquement.

Croissance régulière.

6. Considérons la suite (S) des nombres $\frac{1}{\mu_n} = \frac{-\log|a_n|}{n \log n}$ dont la plus petite limite est égale à $\frac{1}{\mu}$; désignons par

$$\frac{1}{\mu_{q_1}}, \quad \frac{1}{\mu_{q_2}}, \ldots, \frac{1}{\mu_{q_n}}, \ldots$$

les éléments de (S) faisant partie de la suite principale S_δ et rangés d'après l'ordre de grandeur de leurs indices. Nous dirons que la fonction entière en v, $f(v)$, d'ordre apparent μ est à croissance régulière, si, quel que petit que soit le nombre positifs δ, les indices q_n des éléments de la suite principale S_δ vérifient la relation:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1. \tag{2}$$

Dans le cas où $\frac{1}{\mu}$ est un élément limite isolé de (S), on sait (cfr. n° 2) qu'il existe un nombre positif l tel que si δ et δ' sont deux nombres positifs moindres que l, les deux suites principales S_δ et $S_{\delta'}$ ne diffèrent que par un nombre fini d'éléments. Il en résulte que si la relation (2) est vérifiée pour une valeur de δ moindre que l, elle sera vérifiée pour toutes les valeurs de δ inférieures à l.

Il n'en est plus de même si $\frac{1}{\mu}$ n'est pas un élément limite isolé de (S); on sait que, dans cette hypothèse (cfr. n° 2), quel que petit que soit le nombre positif δ, on peut toujours trouver un nombre positif δ' moindre que δ et tel que les deux suites principales S_δ et $S_{\delta'}$ diffèrent par une infinité dénombrable d'éléments. Il en résulte que, dans ce cas, si la relation (2) est vérifiée pour la valeur δ_1 de δ, elle ne sera pas nécessairement satisfaite pour toutes les valeurs de δ inférieures à δ_1.

$M(r)$ désignant, comme plus haut, le module maximum de $f(v)$ pour $|v| = r$, il résulte d'un théorème établi par M. LINDELÖF [2]), *que si la fonction entière $f(v)$ d'ordre*

---

[1]) *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* [Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXXI (1903), n° 1, pp. 1-79].

[2]) *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de* TAYLOR [Bulletin des Sciences Mathématiques, II^e série, t. XXVII (1903), I^ère Partie, pp. 213-226].

apparent μ *est à croissance régulière, on a:*

$$e^{r^{\mu-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\mu+\varepsilon}}$$

(ε *nombre positif arbitraire*), *les deux inégalités précédentes étant satisfaites en même temps pour toutes les valeurs de* r *qui dépassent un certain nombre fixe* r_ε, *et réciproquement.*

La définition que nous avons donnée de la croissance régulière est donc équivalente à celle donnée par M. BOREL [3]).

CHAPITRE II.

Fonctions entières de deux variables à coefficients et à variables réels et positifs.

Ordre apparent total.

7. Soit $N(R, r) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} g_{p,q} R^p r^q$, une fonction entière en R et r, à variables et à coefficients réels et positifs. On sait que l'on a [4]):

$$\lim_{p+q=\infty} \sqrt[p+q]{g_{p,q}} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{p+q=\infty} \frac{-\log g_{p,q}}{p+q} = +\infty.$$

Ceci étant, considérons la suite (S) des nombres à deux indices $\frac{1}{\lambda_{p,q}} = \frac{-\log g_{p,q}}{(p+q)\log(p+q)}$; si la plus petite limite de (S) pour $p+q=\infty$ est un nombre positif fini $\frac{1}{\lambda}$, nous dirons que la fonction $N(R, r)$ est d'ordre apparent total fini λ.

8. Posons $f(r) = N(r, r) = \sum_{n=0}^{\infty}(g_{0,n} + g_{1,n-1} + \cdots + g_{n,0})r^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n$; nous allons montrer que: *si la fonction* $N(R, r)$ *est d'ordre apparent total fini* λ, *la fonction entière en* r, $f(r)$, *sera d'ordre apparent* λ *et réciproquement.*

Désignons à cet effet par h_n le plus grand des nombres $g_{p,q}$ dont la somme $p+q$ des indices est égale à n; en observant que le nombre des $g_{p,q}$ dont la somme des indices est n, est au plus égal à $n+1$, nous pouvons écrire:

$$h_n < A_n < h_n(n+1),$$

d'où

$$\frac{-\log h_n}{n \log n} > -\frac{\log A_n}{n\log n} > -\frac{\log h_n}{n\log n} - \frac{\log(n+1)}{n\log n};$$

3) Cfr. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900).

4) Cfr. BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs* (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

ce qui nous montre que les deux suites de nombres $\frac{-\log h_n}{n\log n}$ et $\frac{-\log A_n}{n\log n}$ ont les mêmes éléments limites et en particulier même plus petite limite.

Ceci étant, supposons que la plus petite limite pour $p+q=\infty$ des nombres $\frac{1}{\lambda_{p,q}}$ soit égale à $\frac{1}{\lambda}$, comme, d'après la définition même du nombre h_n, $\frac{-\log h_n}{n\log n}$ est le plus petit des nombres $\frac{1}{\lambda_{p,q}}$ dont la somme $p+q$ des indices est égale à n; nous aurons (cfr. n° 4):

$$\lim_{n=\infty}\frac{-\log h_n}{n\log n}=\frac{1}{\lambda}$$

et, par suite, d'après la remarque faite plus haut,

$$\lim_{n=\infty}\frac{-\log A_n}{n\log n}=\frac{1}{\lambda}$$

et la fonction entière en r, $f(r)$, sera d'ordre apparent λ.

Inversement, admettons que $f(r)$ soit d'ordre apparent λ nous aurons (cfr. n° 5):

$$\lim_{n=\infty}\frac{-\log A_n}{n\log n}=\frac{1}{\lambda}$$

et par suite, d'après la remarque faite plus haut,

$$\lim_{n=\infty}\frac{-\log h_n}{n\log n}=\frac{1}{\lambda}.$$

Comme $\frac{-\log h_n}{n\log n}$ est le plus petit des nombres $\frac{1}{\lambda_{p,q}}$ dont la somme $p+q$ des indices est égale à n, nous aurons (cfr. n° 4):

$$\lim_{p+q=\infty}\frac{1}{\lambda_{p,q}}=\frac{1}{\lambda}$$

et la fonction $N(R, r)$ sera d'ordre apparent total λ.

Notre définition de l'ordre apparent total est donc équivalente à celle donnée par M. Borel [loc. cit. [4]), page 80].

9. Ordonnons la fonction $N(R, r)$ par rapport aux puissances croissantes de r; nous aurons:

$$N(R, r)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(R)r^n$$

avec

$$A_n(R)=\sum_{p=0}^{\infty}g_{p,n}R^n.$$

La fonction $N(R, r)$ étant d'ordre apparent total λ, et ε désignant un nombre positif arbitrairement petit, nous aurons (cfr. n° 8 et n° 5):

$$N(r, r)<e^{r^{\lambda+\varepsilon}}=e^{r^{\sigma}} \qquad (\sigma=\lambda+\varepsilon) \tag{3}$$

pour toutes les valeurs de r dépassant un certain nombre fixe r_ε. De (3) nous déduisons:

$$A(r) < \frac{e^{r^\sigma}}{r^n}. \tag{4}$$

Nous allons déterminer le nombre r de façon que le second membre de (4) soit aussi petit que possible. Nous aurons alors l'inégalité la plus précise que l'on peut déduire de (4). Cette valeur cherchée de r est fournie par l'équation:

$$\sigma r^{\sigma-1} - \frac{n}{r} = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée de $\frac{e^{r^\sigma}}{r^n}$ par rapport à r. Cette valeur cherchée de r est donc égale à $\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ et nous obtenons l'inégalité:

$$A_n\left[\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right] < \frac{e^{\frac{n}{\sigma}}}{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{n}{\sigma}}}. \tag{5}$$

Il résulte de là que: *si la fonction $N(R, r)$ est d'ordre apparent total λ, on a l'inégalité* (5) *à partir d'une certaine valeur de n.*

Sur les suites de fonctions continues à variable positive.

10. Considérons une suite (F) de fonctions continues à variable positive R:

$$f_0(R),\ f_1(R),\ \ldots,\ f_n(R),\ \ldots$$

jouissant de la propriété suivante: au nombre positif R, on peut faire correspondre un entier P_R tel que, pour $n > P_R$, chacune des fonctions $f_n(R)$ soit positive dans l'intervalle $(0, R)$. Nous dirons que la suite des fonctions:

$$f_{p_1}(R),\ f_{p_2}(R),\ \ldots,\ f_{p_n}(R),\ \ldots$$

extraites de (F) converge vers une fonction limite, si en chaque point d'abscisse positive R_0, l'ensemble des nombres

$$f_{p_1}(R_0),\ f_{p_2}(R_0),\ \ldots,\ f_{p_n}(R_0),\ \ldots$$

pris dans l'ordre indiqué admet un seul élément limite.

La fonction inférieure de (F) est, par définition, la fonction qui en chaque point d'abscisse positive R_0 coïncide avec la plus petite limite de la suite des nombres $f_n(R_0)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

R_0 étant une valeur positive de R, si le rapport $\frac{f_n(R)}{f_n(R_0)}$ converge uniformément vers l'unité dans tout segment fini de l'axe positif des R, les fonctions limites de (F) sont des

constantes. De plus, toute suite infinie et convergente de fonctions extraites de (F) convergera uniformément vers sa limite dans tout intervalle fini de l'axe réel et positif.

En effet, admettons que la suite des nombres $f_{p_n}(R_0)$ converge vers α. Si ε est un nombre positif arbitrairement petit, nous pouvons lui faire correspondre un entier P tel que pour $p_n > P$, on ait:

$$\alpha - \varepsilon < f_{p_n}(R_0) < \alpha + \varepsilon. \tag{6}$$

D'autre part, la suite des fonctions $\dfrac{f_{p_n}(R)}{f_{p_n}(R_0)}$ convergeant uniformément vers l'unité dans tout intervalle fini AB de l'axe positif des R, il existe un nombre entier Q tel que, pour $p_n > Q$ et pour tout point d'abscisse R de AB, on ait:

$$(1 - \varepsilon) f_{p_n}(R_0) < f_{p_n}(R) < (1 + \varepsilon) f_{p_n}(R_0),$$

et, tenant compte de (6), on aura, pour tous les points de l'intervalle AB:

$$\alpha - \varepsilon'' < f_{p_n}(R) < \alpha + \varepsilon' \quad [\varepsilon'' = \varepsilon(\alpha + 1) - \varepsilon^2;\ \varepsilon' = \varepsilon(\alpha + 1) + \varepsilon^2]$$

dès que p_n sera supérieur au plus grand des deux nombres P et Q. Il en résultera que la suite des fonctions $f_{p_n}(R)$ convergera uniformément vers α dans l'intervalle AB.

Pour que la démonstration de notre théorème soit complète, nous devons en outre montrer, que toute suite infinie et convergente de fonctions:

$$f_{s_1}(R),\ f_{s_2}(R),\ \ldots,\ f_{s_n}(R),\ \ldots \tag{7}$$

extraites de (F) ne saurait converger en un point d'abscisse R_1 distincte de R_0, vers un nombre distinct de l'élément limite de la suite des nombres:

$$f_{s_1}(R_0),\ f_{s_2}(R_0),\ \ldots,\ f_{s_n}(R_0),\ \ldots. \tag{8}$$

En effet, admettons que la suite (7) converge pour $R = R_1$, vers un nombre γ distinct des éléments limites α de la suite (8). De la relation:

$$\lim_{s_n = \infty} \frac{f_{s_n}(R_1)}{f_{s_n}(R_0)} = 1$$

on déduit, en tenant compte de l'hypothèse faite au début de ce n° sur les fonctions $f_n(R)$:

$$\lim_{s_n = \infty} \frac{f_{s_n}(R_0)}{f_{s_n}(R_1)} = 1.$$

Il en résulterait alors que la suite (8) admettrait γ comme élément limite, ce qui est contraire à notre hypothèse.

11. Il résulte de ce qui précède, que pour toute valeur positive R_1 de R, la suite des nombres $f_n(R_1)$ admet les mêmes éléments limites que la suite des nombres $f_n(R_0)$. Par suite, pour toute valeur positive R_1 de R, la plus petite limite de la suite des nombres $f_n(R_1)$ est égale à la plus petite limite de la suite des nombres $f_n(R_0)$. Il en résulte donc que la fonction inférieure de la suite de fonctions (F) est une constante. Nous obtenons donc le théorème suivant:

R_0 étant une valeur positive de R, si le rapport $\frac{f_n(R)}{f_n(R_0)}$ converge vers l'unité pour toute valeur positive de R, la fonction inférieure de la suite (F) de fonctions est une constante.

Ordre apparent de $N(R, r)$ par rapport à r.

12. Rappelons une proposition établie par M. PRINGSHEIM[5]:

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\varkappa} (0 < \varkappa < 1)$ une série convergente à termes positifs et δ un nombre positif arbitraire; on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\varkappa} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)} b_n\right]^{\varkappa}. \tag{9}$$

13. *Si $N(R, r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R) r^n$ est une fonction entière à coefficients et à variables réels et positifs, et si R_1 est une quantité positive, on a pour toutes les valeurs positives de R:*

$$\lim \frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)} = 1,$$

la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini de l'axe positif des R.

En effet, $N(R, r)$ étant une fonction entière en R et r, la suite des nombres à deux indices $\sqrt[p+q]{g_{p,q}}$ converge vers zéro avec $\frac{1}{p+q}$. Il en est de même de la suite des nombres $\sqrt[p]{g_{p,q}^{\varepsilon}}$, où ε est un nombre positif quelconque.

Ceci posé, soit R_0 une valeur positive fixe, et R une valeur positive quelconque supérieure à $R_0(1+\delta)$ $(\delta > 0)$ et moindre que le nombre R' arbitrairement grand. Au nombre $\frac{R_0^{1-\varepsilon}}{R'}$ nous pouvons faire correspondre un entier N_ε tel que, pour $p+n > N_\varepsilon$, on ait:

$$\sqrt[p]{g_{p,n}^{\varepsilon}} < \frac{R_0^{1-\varepsilon}}{R'}.$$

Cette inégalité sera évidemment satisfaite, quel que soit le nombre entier p, si nous assujettissons n à rester supérieur à N_ε. Nous aurons donc pour ces mêmes valeurs de n et pour toutes les valeurs entières et positives de p, ainsi que pour toutes les valeurs de R appartenant à l'intervalle $\left(R_1 = R(1+\delta),\ R'\right)$:

$$R^p < \frac{R_0^{(1-\varepsilon)p}}{g_{p,n}^{\varepsilon}}.$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par $g_{p,n}$ et sommons suivant l'indice p

---

[5]) *Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, Bd. XXXII (1902), pp. 295-304], p. 299.

depuis zéro jusqu'à l'infini, nous obtiendrons:

$$A_n(R) < \sum_{p=0}^{\infty} [g_{p,n} R_0^p]^{1-\varepsilon}$$

dès que $n > N_\varepsilon$.

Or, en vertu de (9), nous avons:

$$\sum_{p=0}^{\infty} [g_{p,q} R_0^p]^{1-\varepsilon} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{\varepsilon} \left[\sum_{p=0}^{\infty} (1+\delta)^{\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon}} g_{p,q} R_0^p\right]^{1-\varepsilon}$$

et par suite, en supposant que $\varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$\sum_{p=0}^{\infty} [g_{p,q} R_0^p]^{1-\varepsilon} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right) \left[\sum_{p=0}^{\infty} g_{p,q} R_1^p\right]^{1-\varepsilon},$$

puisque dans cette hypothèse on a

$$(1+\delta)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} < 1+\delta.$$

Observant que $R > R_1$, nous avons donc:

$$A_n(R_1) < A_n(R) < [A_n(R_1)]^{1-2\varepsilon},$$

la première de ces inégalités étant satisfaite pour toutes les valeurs de n et la deuxième pour toutes les valeurs de $n > N_{2\varepsilon}$, et cela quel que soit R dans l'intervalle (R_1, R'). Comme ε peut être pris arbitrairement petit, on en conclut que la suite des fonctions:

$$\frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

converge uniformément vers l'unité dans l'intervalle (R_1, R').

Soit R'' un nombre positif inférieur à R_1; en utilisant une méthode analogue à la précédente, on constaterait que la suite des fonctions:

$$\frac{\log A_n(R_1)}{\log A_n(R)}$$

converge uniformément vers l'unité pour toutes les valeurs de R appartenant à l'intervalle (R'', R_1). Il en sera donc de même de la suite des fonctions:

$$\frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)}.$$

Il résulte donc de l'analyse précédente, que la suite des fonctions:

$$\frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

converge uniformément vers l'unité dans tout intervalle fini de l'axe positif des R.

14. Considérons la suite (F) des fonctions:

$$\frac{-\log A_n(R)}{n \log n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où R est assujetti à ne prendre que des valeurs positives. En utilisant l'inégalité (5), on constate qu'au nombre positif R_0 arbitrairement grand, on peut faire correspondre un entier P_{R_0} tel que, pour $n < P_{R_0}$, chacune des fonctions $\dfrac{-\log A_n(R)}{n \log n}$ soit positive dans l'intervalle $(0, R_0)$. Comme (cfr. n° 13) le rapport $\frac{\log A_n(R)}{\log A_n(R_1)}$ converge uniformément vers l'unité dans tout intervalle fini de l'axe positif des R, il en résulte (cfr. n° 10) que *les fonctions limites de la suite* (F) *des fonctions* $\frac{-\log A_n(R)}{n \log n}$ *sont des constantes.*

La fonction inférieure de la suite de fonctions (F) sera également une constante (cfr. n° 11). Par suite, si nous tenons compte de la définition donnée au n° 5, nous pouvons énoncer le théorème suivant, obtenu par M. BOREL [loc. cit. [4])] dans le cas où la fonction $N(r, r)$ croît moins vite que $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^r}}}}$.

Si $N(R_1, r)$, *où* R_1 *désigne une quantité positive, est une fonction entière en* r *d'ordre apparent* μ, $N(R, r)$ *sera une fonction entière en* r *d'ordre apparent* μ *pour toutes les valeurs positives de* R.

Ce nombre constant μ sera par définition l'ordre apparent de $N(R, r)$ par rapport à r.

15. Considérons la suite des nombres

$$g_{0,n}, \quad g_{1,n}, \quad \ldots, \quad g_{p,n}, \quad \ldots,$$

où n a une valeur entière quelconque et où p prend toutes les valeurs entières et positives. Cette suite admet un terme maximum, puisque $\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{g_{p,n}} = 0$. Désignant ce terme maximum par g_n, nous allons montrer *que les fonctions limites de la suite des fonctions* $\frac{-\log A_n(R)}{n \log n}$ *sont identiques aux éléments limites de la suite des nombres* $\frac{-\log g_n}{n \log n}$, *et réciproquement.*

En effet, soit R_1 une valeur positive de $R < 1$; nous avons

$$A_n(R_1) < g_n(1 + R_1 + R_1^2 + \cdots + R_1^n + \cdots)$$
$$= g_n \frac{1}{1 - R_1}.$$

D'autre part, comme tous les termes de $A_n(1)$ sont positifs, on a:

$$g_n < A_n(1);$$

il en résulte que le nombre positif g_n vérifie la double inégalité:

$$(1 - R_1) A_n(R_1) < g_n < A_n(1),$$

d'où

$$-\log A_n(1) < -\log g_n < -\log A_n(R_1)(1 + \eta_n) \qquad (\lim_{n=\infty} \eta_n = 0)$$

et par suite, en tenant compte du résultat du n° 13,

$$(1 + \varepsilon_n) < \frac{-\log g_n}{-\log A_n(R_1)} < 1 + \eta_n \qquad (\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0, \lim_{n=\infty} \eta_n = 0),$$

ce qui nous montre que le rapport $\frac{\log g_n}{\log A_n(R_1)}$ converge vers l'unité lorsque n croît au de là de toute limite. On en conclut aisément de là que les deux suites de nombres $\frac{-\log A_n(R_1)}{n \log n}$ et $\frac{-\log g_n}{n \log n}$ ont les mêmes éléments limites, d'où le théorème annoncé en tenant compte d'un résultat du n° 14.

Il résulte du théorème précédent *que l'ordre apparent de* $N(R, r)$ *par rapport à* r *est égal à l'ordre apparent de la fonction entière en* r, $g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n$, g_n *étant le coefficient maximum de* $A_n(R)$, *et réciproquement.*

16. *Exemples.*

1° Soit $N(R, r) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{R^p r^q}{(p+q)^{\frac{p+q}{\lambda}}}$; cette fonction est d'ordre apparent total λ, puisque l'on a, quels que soient p et q,

$$\frac{\log (p+q)^{\frac{p+q}{\lambda}}}{(p+q)\log(p+q)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ici, $A_n(R) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{R^p}{(n+p)^{\frac{n+p}{\lambda}}}$. Comme le coefficient maximum de $A_n(R)$ est égal à $\frac{1}{n^{\frac{n}{\lambda}}}$, la fonction $N(R, r)$ considérée, sera d'ordre apparent λ par rapport à r (cfr. n° 15).

2° Soit $N(R, r) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{R^p r^q}{p^{\frac{p}{\mu}} q^{\frac{q}{\nu}}}$ $(\mu > \nu)$. Cette fonction sera d'ordre apparent total μ, puisque, comme on le vérifie aisément,

$$\lim_{p+q=\infty} \frac{\log (p^{\frac{p}{\mu}} q^{\frac{q}{\nu}})}{(p+q)\log(p+q)} = \frac{1}{\mu}.$$

Dans cet exemple, nous avons

$$A_n(R) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{R^p}{n^{\frac{n}{\nu}} p^{\frac{p}{\mu}}};$$

comme le coefficient maximum de $A_n(R)$ est égal à $\frac{1}{n^{\frac{n}{\nu}}}$, la fonction $N(R, r)$ sera d'ordre apparent ν par rapport à r. On verrait de même que cette fonction est d'ordre apparent μ par rapport à R.

Étude de la régularité de la croissance.

17. Lemme. — *Soient:*

(P) $\qquad p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n, \; \ldots$

(Q) $\qquad q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_n, \; \ldots$

deux suites croissantes de nombres entiers positifs, telles que tous les éléments de la suite (Q) *appartiennent à la suite* (P); je dis *que, si l'on a:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1,$$

on aura également:

$$\lim_{m=\infty} \frac{\log p_{m+1}}{\log p_m} = 1.$$

En effet, soit p_m un nombre de la suite (P) vérifiant la relation:

$$q_n \leqq p_m < q_{n+1};$$

nous aurons alors $p_{m+1} \leqq q_{n+1}$ et par suite:

$$\frac{\log p_{m+1}}{\log p_m} \leqq \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n},$$

ce qui nous montre que la plus grande limite de la suite des nombres $\frac{\log p_{m+1}}{\log p_m}$ est au plus égale à 1. D'autre part, comme par hypothèse $p_{m+1} > p_m$, la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{\log p_{m+1}}{\log p_m}$ est au moins égale à 1. Il résulte de là que l'on a:

$$\lim_{m=\infty} \frac{\log p_{m+1}}{\log p_m} = 1.$$

Remarque. — Le lemme précédent subsiste encore dans le cas où tous les nombres q_n font partie de la suite (P), sauf au plus un nombre fini d'entr'eux.

18. Supposons que $N(R_1, r)$, où R_1 désigne une quantité positive, soit une fonction entière en r d'ordre apparent μ et à croissance régulière.

Désignons par

$$A_{q_1}(R_1),\quad A_{q_2}(R_1),\ \ldots,\ A_{q_n}(R_1),\ \ldots \tag{10}$$

les coefficients de $N(R_1, r)$ tels que les nombres $\frac{-\log A_{q_n}(R_1)}{q_n \log q_n}$ fassent partie de la suite principale S_δ de la suite (S) des nombres $\frac{-\log A_n(R_1)}{n \log n}$; nous aurons (cfr. n° 6), quel que petit que soit le nombre positif δ,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1. \tag{11}$$

Ceci étant, soit R_2 une quantité positive quelconque, mais distincte de R_1. Désignons par

$$A_{p_1}(R_2),\quad A_{p_2}(R_2),\ \ldots,\ A_{p_m}(R_2),\ \ldots \tag{12}$$

les coefficients de $N(R_2, r)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log A_{p_m}(R_2)}{p_m \log p_m}$ fassent partie de la suite principale $S^{(1)}_{2\delta}$ de la suite $(S^{(1)})$ des nombres $\frac{-\log A_n(R_2)}{n \log n}$. Je dis que la suite (12) comprendra toutes les fonctions $A_{q_n}(R)$ qui, pour $R = R_1$, font partie de la suite (10), sauf au plus un nombre fini d'entr'elles. En effet, de la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log A_n(R_2)}{\log A_n(R_1)} = 1,$$

établie au n° 13, nous déduisons, en observant que les nombres $\frac{-\log A_{q_n}(R_1)}{q_n \log q_n}$ sont en valeur absolue au plus égaux à $\frac{1}{\mu}+\delta$,

$$\frac{-\log A_{q_n}(R_2)}{q_n \log q_n} = \frac{-\log A_{q_n}(R_1)}{q_n \log q_n} + \varepsilon_{q_n} \qquad (\lim_{n=\infty} \varepsilon_{q_n} = 0).$$

Ceci posé, de la relation

$$\left|\frac{-\log A_{q_n}(R_2)}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \left|\frac{-\log A_{q_n}(R_1)}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| + |\varepsilon_{q_n}|$$

nous déduisons, en observant que d'après ce qui précède ε_{q_n} converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$,

$$\left|\frac{-\log A_{q_n}(R_2)}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq 2\delta$$

à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande. Il résulte de là que toutes les fonctions $A_{q_n}(R)$ qui, pour $R=R_1$, font partie de la suite (10), appartiennent pour $R=R_2$ à la suite (12), sauf au plus un nombre fini d'entr'elles. Par suite, tous les indices q_n des éléments de la suite (10) font partie de la suite des indices p_n des éléments de la suite (12), sauf au plus un nombre fini d'entr'eux. Comme la relation (11) est vérifiée par hypothèse, on aura (cfr. n° 17, *Remarque*):

$$\lim_{m=\infty} \frac{\log p_{m+1}}{\log p_m} = 1.$$

Par suite, puisque δ est arbitrairement petit (cfr. n° 6), la fonction $N(R_2, r)$ sera une fonction entière en r à croissance régulière. Nous obtenons donc le théorème suivant, en observant que R_2 est une quantité positive arbitraire:

Si la fonction entière en r, $N(R_1, r)$, supposée d'ordre apparent μ est à croissance régulière, $N(R, r)$ sera une fonction entière en r d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour toutes les valeurs positives de R.

Nous dirons alors que la fonction entière $N(R, r)$ est à croissance régulière par rapport à r.

19. Désignons toujours par g_n le coefficient maximum de $A_n(R)$; d'après le contenu du n° 15 et en procédant d'une manière analogue à celle du n° 18, on voit que:

Si $N(R, r)$ est à croissance régulière par rapport à r, il en sera de même de la fonction entière en r, $g(r)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n$, et réciproquement.

Comparaison des ordres apparents.

20. Les résultats des n^{os} 13-19 ont été établis sans faire aucune hypothèse sur l'ordre apparent total de $N(R, r)$. En nous plaçant actuellement dans le cas où cette fonction est d'ordre apparent total fini λ, nous allons comparer les deux nombres λ et μ, μ étant l'ordre apparent de $N(R, r)$ par rapport à r.

Comme pour une valeur fixe de R:

$$N(R, r) < N(r, r)$$

à partir d'une certaine valeur de r, nous aurons:

$$N(R, r) < e^{r^{\lambda+\varepsilon}}$$

dès que r sera suffisamment grand; et par suite:

$$\mu \leqq \lambda.$$

Donc, *l'ordre apparent* μ *de* $N(R, r)$ *par rapport à* r *est au plus égal à l'ordre apparent total* λ *de cette fonction.*

21. Pour obtenir des résultats beaucoup plus précis dans la comparaison des nombres λ et μ, nous introduirons la suite (S) des nombres à deux indices:

$$\frac{1}{\lambda_{p,q}} = \frac{-\log g_{p,q}}{(p+q)\log(p+q)}$$

et nous désignerons par

$$\frac{1}{\lambda_{p_1,q_1}}, \quad \frac{1}{\lambda_{p_2,q_2}}, \ldots, \frac{1}{\lambda_{p_n,q_n}}, \quad \ldots$$

les nombres de cette suite faisant partie de la suite principale S_δ; trois cas pourront se présenter, δ étant supposé arbitrairement petit:

1° $\lim\limits_{p_n+q_n=\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = 0$. Je dis que *dans ce cas la fonction* $N(R, r)$ *est d'ordre apparent* λ *par rapport à* r.

En effet, g_n étant le coefficient maximum de $A_n(R)$, nous aurons:

$$(13) \qquad \frac{-\log g_{q_n}}{q_n \log q_n} < -\frac{\log g_{p_n,q_n}}{q_n \log q_n}.$$

Comme

$$(13') \qquad \frac{-\log g_{p_n,q_n}}{q_n \log q_n} = \frac{-\log g_{p_n,q_n}}{(p_n+q_n)\log(p_n+q_n)} \times \frac{(p_n+q_n)\log(p_n+q_n)}{q_n \log q_n}$$

et que, d'après notre hypothèse, l'ensemble des nombres $\dfrac{(p_n+q_n)\log(p_n+q_n)}{q_n\log q_n}$ admet l'unité parmi ses éléments limites et cela quel que petit que soit le nombre positif δ, il en résulte que $\dfrac{1}{\lambda}$ est un élément limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log g_{p_n,q_n}}{q_n \log q_n}$. Par suite, d'après (13), la plus petite limite des nombres $\dfrac{-\log g_n}{n \log n}$, qui est égale à $\dfrac{1}{\mu}$ (cfr. n° 15), sera au plus égale à $\dfrac{1}{\lambda}$. Par conséquent, nous aurons: $\mu \geqq \lambda$. Comme, d'après le résultat établi au n° 20, on doit avoir $\mu \leqq \lambda$, il s'ensuit que les deux nombres λ et μ sont égaux.

Réciproquement, *admettons que* $\mu = \lambda$; *je dis que* $\lim\limits_{n+q_n=} \dfrac{p_n}{q_n} = 0$. En effet, de la suite des nombres g_{φ_n}, nous pouvons, d'après notre hypothèse, en extraire une suite infinie :

$$g_{s_1}, \quad g_{s_2}, \ldots, g_{s_n}, \quad \ldots$$

telle que : $\lim\limits_{s_n=\infty} \dfrac{-\log g_{s_n}}{s_n \log s_n} = \dfrac{1}{\lambda}$. Comme g_{s_n} est le plus grand des nombres g_{p,s_n} où s_n a une valeur fixe et où p prend toutes les valeurs entières et positives, il existe une valeur t_n de p_n telle que

$$g_{t_n,s_n} = g_{s_n}.$$

Nous déduisons de cette égalité :

$$(14) \qquad \frac{-\log g_{s_n,t_n}}{(s_n + t_n)\log(s_n + t_n)} = \frac{-\log g_{s_n}}{s_n \log s_n} \times \frac{s_n \log s_n}{(s_n + t_n)\log(s_n + t_n)}.$$

Comme $\lim\limits_{s_n=\infty} \dfrac{-\log g_{s_n}}{s_n \log s_n}$ et que $\dfrac{s_n \log s_n}{(s_n + t_n)\log(s_n + t_n)} < 1$, il en résulte que la plus grande limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log g_{s_n,t_n}}{(s_n + t_n)\log(s_n + t_n)}$ pour $t_n + s_n = \infty$ est au plus égale à $\dfrac{1}{\lambda}$. Comme, par hypothèse, la plus petite limite de cette suite pour $s_n + t_n = \infty$ est au moins égale à $\dfrac{1}{\lambda}$, il s'ensuit que la suite des nombres $\dfrac{-\log g_{s_n,t_n}}{(s_n + t_n)\log(s_n + t_n)}$ admet $\dfrac{1}{\lambda}$ comme élément limite unique. Par suite, on en conclut, en tenant compte de (14), que l'on a

$$\lim_{s_n+t_n=\infty} \frac{s_n \log s_n}{(s_n + t_n)\log(s_n + t_n)} = 1.$$

Or cette dernière relation ne peut subsister que si l'on a

$$\lim_{s_n+t_n=\infty} \frac{t_n}{s_n} = 0.$$

Par suite, en remarquant que la suite des nombres s_n fait partie de la suite des nombres p_n, du moins à partir d'une valeur de s_n suffisamment grande, on a finalement :

$$\lim_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = 0.$$

2° $\lim\limits_{p_n+q_n=\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = k$. D'après la réciproque précédente, μ sera inférieur à λ. En remarquant que la plus petite limite pour $p_n + q_n = \infty$ de la suite des nombres à deux indices $\dfrac{p_n + q_n}{q_n}$ est, d'après notre hypothèse, égale à $1 + k$, la relation (13′) nous montre que : $\dfrac{1}{\mu} \leqq \dfrac{1+k}{\lambda}$, c'est-à-dire : $\mu \geqq \dfrac{\lambda}{1+k}$. Donc, *si* $\lim\limits_{p_n+q_n=\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = k$, *quel que petit que soit le nombre positif* δ, *l'ordre apparent* μ *de* $N(R, r)$ *par rapport à* r *est inférieur à l'ordre apparent total* λ *de cette fonction et au moins égal à* $\dfrac{\lambda}{1+k}$.

3° $\lim\limits_{p_n+q_n=\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \infty$. L'ordre apparent μ sera un nombre positif ou nul inférieur à λ comme cela résulte de la réciproque de 1°, de l'hypothèse et des relations (13) et (13').

22. On peut déduire de ce qui précède le théorème suivant établi par M. BOREL [loc. cit. [4])]:

Si la fonction $N(R, r)$ est d'ordre apparent $\mu > 0$ par rapport à r et d'ordre apparent $\nu > 0$ par rapport à R, l'ordre apparent total λ de cette fonction est inférieur à $\mu + \nu$.

Cette proposition est évidente dans le cas où $\underline{\lim}_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = 0$, $\overline{\lim}_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = \infty$;

car, si $\underline{\lim}_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = 0$, on a: $\mu = \lambda$, et si $\overline{\lim}_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = \infty$, il vient: $\nu = \lambda$.

Supposons que

$$\underline{\lim}_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = k, \qquad \overline{\lim}_{p_n+q_n=\infty} \frac{p_n}{q_n} = k';$$

nous aurons (cfr. n° 21):

$$\mu \geqq \frac{\lambda}{1+k}, \qquad \nu \geqq \frac{\lambda k'}{1+k'}$$

et

$$\mu + \nu \geqq \lambda \left[\frac{1}{1+k} + \frac{k'}{1+k'}\right],$$

d'où le théorème énoncé, en observant que la quantité entre crochets dans le second membre de l'inégalité précédente est au moins égale à l'unité.

Remarque.—Dans le cas particulier où l'un des deux nombres μ et ν est nul, l'autre est égal à λ.

Remarques générales sur les fonctions entières à coefficients et à variables réels et positifs, et d'ordre apparent total fini.

23. Admettons que la fonction $N(R, r)$ soit d'ordre apparent $\mu > 0$ par rapport à r, et soit g_n le coefficient maximum de $A_n(R)$. Dans cette hypothèse (cfr. n° 15), la suite (G) des nombres $\frac{-\log g_n}{n \log n}$ admet $\frac{1}{\mu}$ comme plus petite limite. Désignons par

$$g_{q_1}, \quad g_{q_2}, \ldots, g_{q_n}, \ldots$$

les coefficients g_n tels que les nombres correspondants $\frac{-\log g_{q_n}}{q_n \log q_n}$ fassent partie de la suite principale G_δ de la suite (G) des nombres $\frac{-\log g_n}{n \log n}$.

Ceci étant, considérons l'ensemble des coefficients g_{p,q_n} de $N(R, r)$ vérifiant la relation:

$$(15) \qquad \left|\frac{-\log |g_{p,q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq 2\delta \qquad (\delta > 0).$$

D'après ce qui précède, pour chaque valeur de q_n il y aura au moins un coefficient

g_{p,q_n} vérifiant la relation (15), puisque g_{q_n} est un coefficient de $N(R, r)$. En général, pour une même valeur de q_n il y aura plusieurs coefficients g_{p,q_n} vérifiant la relation (15). Soit $\varphi(q_n)$ le plus grand des indices p de ces coefficients g_{p,q_n}; nous allons montrer que: *si $N(R, r)$ est d'ordre apparent total fini λ, il existe un nombre entier q indépendant de q_n, tel que l'on ait, pour toute valeur de q_n,*

$$\varphi(q_n) \leqq q q_n.$$

En effet, $N(R, r)$ étant d'ordre apparent total fini λ, nous avons:

$$A_{q_n}\left[\left(\frac{q_n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right] < \frac{e^{\frac{q_n}{\sigma}}}{\left(\frac{q_n}{\sigma}\right)^{\frac{q_n}{\sigma}}} \quad (\text{cfr. n}^\circ\ 9),$$

d'où

$$g_{p,q_n} < (e\sigma)^{\frac{q_n}{\sigma}} \frac{\sigma^{\frac{p}{\sigma}}}{q_n^{\frac{p+q_n}{\sigma}}}.$$

Cette dernière inégalité nous montre immédiatement que si μ est supérieur à zéro, il est possible de déterminer un nombre positif q indépendant de q_n, tel que l'on ait, quel que soit q_n et pour toute valeur de p supérieure à $q q_n$,

$$\frac{-\log g_{p,q_n}}{q_n \log q_n} > \frac{1}{\mu} + 2\delta \qquad (\delta > 0).$$

Posons

$$Q_{q_n}(R) = \sum_{p=0}^{\varphi(q_n)} \frac{g_{p,q_n}}{g_{q_n}} R^p;$$

tous les coefficients de $Q_{q_n}(R)$ seront au plus égaux à l'unité, puisque g_{q_n} est le plus grand des nombres g_{p,q_n} $(p = 0, 1, 2, \ldots, \varphi(q_n))$. Par suite nous aurons, pour toute valeur de R supérieure à l'unité,

$$(15') \qquad Q_{q_n}(R) < \varphi(q_n) R^{\varphi(q_n)} \qquad (\varphi(q_n) \leqq q q_n).$$

Ceci étant, désignons par $K(R, r)$ la fonction entière en R et r formée par tous les termes de $N(R, r)$ dont les coefficients $g_{p,q}$ ne vérifient pas la relation (15). Cette fonction $K(R, r)$ sera d'ordre apparent au plus égal à $\frac{\mu}{1+2\mu\delta}$ $(\delta > 0)$, car si g'_n est le coefficient maximum de la fonction entière en R, coefficient de r^n dans $K(R, r)$ ordonnée suivant les puissances entières de r, nous aurons d'après la façon même dont la fonction $K(R, r)$ a été définie:

$$\lim_{n=\infty} -\frac{\log g'_n}{n \log n} \geqq \frac{1}{\mu} + 2\delta.$$

Comme

$$(16) \qquad N(R, r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{q_n} Q_{q_n}(R) r^{q_n} + K(R, r),$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Si $N(R, r)$ est une fonction entière en R et r d'ordre apparent total fini λ et d'ordre apparent $\mu > 0$ par rapport à r, cette fonction peut se mettre sous la forme (16), les g_{q_n} étant tels que les nombres correspondants $\frac{-\log g_{q_n}}{q_n \log q_n}$ appartiennent à la suite principale G_δ de la suite (G) des nombres $\frac{-\log g_n}{n \log n}$; les $Q_{q_n}(R)$ des polynômes satisfaisant aux conditions suivantes: 1° si $\varphi(q_n)$ est le degré de $Q_{q_n}(R)$, il existe un nombre entier positif q tel que l'on ait pour toute valeur de q_n: $\varphi(q_n) \leqq qq_n$; 2° si R est une quantité positive supérieure à l'unité, on a, quel que soit q_n: $Q_{q_n}(R) < \varphi(q_n) R^{\varphi(q_n)}$; et *$K(R, r)$ étant une fonction entière en R et r d'ordre apparent au plus égal à $\frac{\mu}{1 + 2\mu\delta}$ par rapport à r.*

Variation de l'ordre apparent μ_1.

24. Pour étudier la variation de l'ordre apparent μ_1, nous nous placerons uniquement dans le cas où la fonction $N(R, r)$ est d'ordre apparent total fini, et nous désignerons comme plus haut par μ l'ordre apparent de $N(R, r)$ par rapport à r. La fonction $N(R, r)$ étant d'ordre apparent total fini λ, cette fonction peut se mettre sous la forme (16). Comme l'ordre apparent de $K(R, r)$ par rapport à r est inférieur à μ, il en résulte que si pour une positive quelconque R_1 de R, $N(R_1, r)$ est une fonction entière en r d'ordres apparents (μ, μ_1), $\sum_{n=1}^{\infty} g_{q_n} Q_{q_n}(R_1) r^{q_n}$ sera également une fonction entière en r d'ordres apparents (μ, μ_1), et réciproquement.

Cette remarque nous permet de remplacer pour l'étude de l'ordre apparent μ_1, la fonction $N(R, r)$ par la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} g_{q_n} Q_{q_n}(R) r^{q_n}$, les polynômes $Q_{q_n}(R)$ satisfaisant aux conditions énoncées au n° 23.

Ceci posé, des inégalités

$$R^{\varphi(q_n)} < \frac{Q_{q_n}(R)}{Q_{q_n}(1)} < 1 \quad \text{si} \quad R < 1 \quad \text{et} \quad 1 < \frac{Q_{q_n}(R)}{Q_{q_n}(1)} < R^{\varphi(q_n)} \quad \text{si} \quad R > 1 \qquad (\varphi(q_n) \leqq q q_n),$$

nous déduisons que la différence

$$\frac{-\log g_{q_n} Q_{q_n}(1) + \log g_{q_n} Q_{q_n}(R)}{q_n \log_2 q_n}$$

converge vers zéro, pour toute valeur positive de R, lorsque q_n croît au delà de toute limite. Il en sera de même de la différence

$$\frac{-\log \frac{g_{q_n} Q_{q_n}(1)}{q_n} - \log \frac{q_n}{\mu} + \log \frac{g_{q_n} Q_{q_n}(R)}{q_n} + \log \frac{q_n}{\mu}}{\log_2 q_n}.$$

Il résulte de là que si R_1 est une valeur positive quelconque de R, les éléments limites de la suite des nombres $\dfrac{-\log g_{q_n} Q_{q_n}(R_1) - \log \dfrac{q_n}{\mu}}{q_n \log_2 q_n}$ sont identiques aux éléments limites de la suite des nombres $\dfrac{-\log \dfrac{g_{q_n} Q_{q_n}(1)}{q_n} - \log \dfrac{q_n}{\mu}}{\log_2 q_n}$. Par suite, d'après sa définition même, la fonction inférieure de la suite des fonctions $\dfrac{-\log \dfrac{g_{q_n} Q_{q_n}(R)}{q_n} - \log \dfrac{q_n}{\mu}}{\log_2 q_n}$ sera une constante dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Si nous nous reportons à la définition du n° 5, nous voyons que si $\sum_{n=1} g_{q_n} Q_{q_n}(R) r^{q_n}$ est pour $R = 1$ une fonction entière en r d'ordres apparents (μ, μ_1), $\sum_{n=1}^{\infty} g_{q_n} Q_{q_n}(R) r^{q_n}$ sera pour toutes les valeurs positives de R une fonction entière en r d'ordres apparents (μ, μ_1). Par conséquent, en tenant compte de ce qui a été dit plus haut, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Si la fonction $N(R, r)$ entière en R et r supposée d'ordre apparent total fini λ est, pour $R = 1$, une fonction entière en r d'ordres apparents (μ, μ_1), $N(R, r)$ sera une fonction entière en r d'ordres apparents (μ, μ_1) pour toutes les valeurs positives de R.

Soit R_1 une valeur positive de R supérieure à l'unité; des inégalités

$$1 < Q_{q_n}(R_1) < \varphi(q_n) R_1^{\varphi(q_n)} \qquad [\varphi(q_n) \leqq q\, q_n]$$

nous déduisons que les deux suites de nombres

$$\frac{-\log \dfrac{g_{q_n}}{q_n} - \log \dfrac{q_n}{\mu}}{\log_2 q_n} \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{-\log g_{q_n} Q_{q_n}(R_1)}{q_n} - \log \dfrac{q_n}{\mu}}{\log_2 q_n}$$

ont les mêmes éléments limites. Par suite, en tenant compte de ce qui a été dit plus haut, nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Si la fonction $N(R, r)$ entière en R et r supposée d'ordre apparent total fini λ est d'ordres apparents (μ, μ_1) par rapport à r, la fonction entière en r $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{q_n} r^{q_n}$ sera d'ordres apparents (μ, μ_1), et reciproquement.

25. Si nous ne supposons plus que la fonction $N(R, r)$ est d'ordre apparent total fini, l'ordre apparent μ_1 peut varier d'une façon continue avec R, comme nous allons le montrer par un exemple.

Considérons la fonction $N(R, r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n R^{nE(\log_2 n)} r^n$, où g_n vérifie la relation: $\lim_{n=\infty} \dfrac{-\log g_n}{n \log n} = \dfrac{1}{\mu}$, et où $E(\log_2 n)$ est le plus grand nombre entier contenu dans $\log_2 n$. Cette fonction sera une fonction entière en R et r, puisque d'après notre hypothèse, $\sqrt[n]{g_n R^{nE(\log_2 n)}}$ converge vers zéro, pour toute valeur finie de R. Admettons en outre que $\lim_{n=\infty}\left(\frac{-\log g_n}{n\log n}-\frac{\log n}{n}\right)=0$; nous aurons:

$$\lim_{n=\infty}\frac{-\frac{\log g_n R^{nE(\log_2 n)}}{n}-\frac{\log n}{\mu}}{\log_2 n}=-R$$

et le nombre μ_1 sera égal à R pour toutes les valeurs positives de R.

Dans cet exemple, la fonction $N(R, r)$ est évidemment d'ordre apparent total infini.

Ordre apparent de $\frac{\partial^m N(R, r)}{\partial R^m}$ par rapport à r.

26. La fonction $\frac{\partial^m N(R, r)}{\partial R^m}$ ordonnée suivant les puissances croissantes de r peut s'écrire:

$$\frac{\partial^m N(R, r)}{\partial R^m}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(m)}(R)r^n,$$

où

$$A_n^{(m)}(R)=\sum_{p=0}^{\infty}p(p-1)\ldots(p-m+1)g_{p,n}R^{p-m}.$$

Deux cas sont à distinguer:

1° Les coefficients g_{p,q_n} de $A_{q_n}(R)$ vérifiant la relation (15) sont tels que le premier indice p reste inférieur ou au plus égal à un nombre entier fixe q. Dans ce cas $\frac{\partial^m N(R, r)}{\partial R^m}$ *sera d'ordre apparent μ par rapport à r pour toutes les valeurs de m inférieures ou égale à q ou du moins pour un certain nombre d'entr'elles, tandis qu'elle sera d'ordre apparent inférieur à μ pour toutes les valeurs de m supérieures à q.*

2° Parmi les coefficients g_{p,q_n} de $A_{q_n}(R)$ vérifiant la relation (15) il y en a au moins un, tel que le premier indice p augmente indéfiniment avec q_n et cela quel que petit que soit le nombre positif δ. Si $g_{q_n}^{(m)}$ est le coefficient maximum de $A_{q_n}^{(m)}(R)$, on aura, d'après notre hypothèse,

$$\lim_{q_n=\infty}\frac{-\log g_{q_n}^{(m)}}{q_n\log q_n}=\frac{1}{\mu}$$

et cela quel que soit l'indice m de dérivation. Par suite:

Si nous sommes dans le cas 2° $\frac{\partial^m N(R, r)}{\partial R^m}$ sera une fonction entière en R et r d'ordre apparent μ par rapport à r, quel que soit l'indice m de dérivation.

Ordre apparent de $N(tr, r)$ par rapport à r.

27. Si dans $N(R, r)$ nous posons $R=tr$, nous obtenons une fonction entière en t et r à coefficients et à variables réels et positifs. Par suite, si nous tenons compte des résultats des n^{os} 14 et 18, nous voyons que:

1° *Si $N(R, r)$ est d'ordre apparent total λ, $N(tr, r)$ sera d'ordre apparent λ par rapport à r.*

2° *Si $N(r, r)$ est à croissance régulière, $N(tr, r)$ sera à croissance régulière par rapport à r.*

CHAPITRE III.

Points limites réguliers de l'ensemble des zéros d'une suite de polynômes.

Cas où tous les zéros sont réels.

28. Soit

$$(A) \qquad A_{q_1}(x), \quad A_{q_2}(x), \ldots, A_{q_n}(x), \quad \ldots$$

une suite de polynômes de la variable réelle x, où

$$A_{q_n}(x) = (x - \alpha_{q_n,1})(x - \alpha_{q_n,2}) \ldots (x - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)}),$$

les $\alpha_{q_n,i}$ étant réels et $\varphi(q_n)$ augmentant indéfiniment avec q_n ou restant inférieur à un certain nombre fixe q.

Nous désignerons par E_x l'ensemble des zéros des polynômes $A_{q_n}(x)$. E_x sera dénombrable.

Le point $x = \alpha$ sera dit un point limite de E_x, s'il existe une infinité de polynômes $A_{q_n}(x)$ possédant au moins un zéro à l'intérieur d'un segment concentrique au point $x = \alpha$ et de longueur arbitrairement petite.

Cette définition du point limite de E_x permet de considérer comme points limites de cet ensemble, tous les points de E_x pour lesquels une infinité de polynômes $A_{q_n}(x)$ s'annulent.

L'ensemble formé par les points limites de E_x porte le nom de dérivé; on le note E'_x. E'_x est un ensemble fermé, c'est-à-dire qu'il contient tous ses points limites.

29. Nous dirons que le point $x = \alpha$ est un point limite régulier de E_x si au nombre positif ε, arbitrairement petit, on peut faire correspondre un entier Q_ε tel que, pour $q_n > Q_\varepsilon$, chacun des polynômes $A_{q_n}(x)$ possède au moins un zéro à l'intérieur d'un segment $\gamma_{2\varepsilon}$ concentrique au point $x = \alpha$ et de longueur 2ε.

S'il existe une infinité de polynômes $A_{q_n}(x)$ n'admettant que p zéros à l'intérieur de $\gamma_{2\varepsilon}$, quel que petit que soit ε, les autres en admettant au moins p, dès que $q_n > Q_\varepsilon$, nous dirons que le point $x = \alpha$ est un point limite régulier d'ordre p.

Dans le cas où le nombre des zéros de $A_{q_n}(x)$ appartenant à $\gamma_{2\varepsilon}$ augmente indéfiniment avec q_n, quel que petit que soit ε, le point $x = \alpha$ sera dit un point limite régulier d'ordre infini.

De la définition même du point limite régulier résulte que si le point $x = \beta$ n'est pas un point limite régulier de E_x, on peut extraire de la suite (A) une suite infinie de polynômes:

$$A_{p_1}(x), \quad A_{p_2}(x), \; \ldots, \; A_{p_n}(x), \; \ldots,$$

telle que si on désigne par H_x l'ensemble de leurs zéros et son dérivé par H'_x, le point $x = \beta$ ne fasse pas partie de H'_x.

Exemple. — L'origine est un point limite régulier de l'ensemble des zéros de chacune des suites de polynômes:

$$\begin{array}{llll} x - 1, & x - \frac{1}{2}, \; \ldots, & x - \frac{1}{n}, & \ldots, \\ (x-1)^p, & \left(x - \frac{1}{n}\right)^p, \; \ldots, & \left(x - \frac{1}{n}\right)^p, & \ldots, \\ (x-1), & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \; \ldots, & \left(x - \frac{1}{n}\right)^n, & \ldots; \end{array}$$

dans le premier exemple, le point $x = 0$ est un point limite régulier d'ordre 1, dans le second un point limite régulier d'ordre p, dans le troisième un point limite régulier d'ordre infini.

30. Supposons en particulier, que parmi les polynômes $A_{q_n}(x)$ il y en ait une infinité dont le degré ne dépasse pas un certain nombre fixe p. *Je vais montrer que le nombre des points limites réguliers de E_x est au plus égal à p.*

En effet, admettons que ce nombre soit égal à $p+1$ et soient: $x = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p+1)$ ces points. Il nous est possible de tracer de chacun de ces points comme centre des segments $\gamma_{2\varepsilon}$ de longueur 2ε suffisamment petite, pour que tous ces segments n'aient aucune portion, ni extrémités communes. Ces points $x = \alpha_i$ étant des points limites réguliers de E_x, chacun des polynômes $A_{q_n}(x)$ possèdera au moins un zéro à l'intérieur de chacun de ces segments dès que $q_n > Q_\varepsilon$. Il en résulterait que les $A_{q_n}(x)$ seraient au moins de degré $p + 1$, à partir d'une certaine valeur de q_n, ce qui est contraire à notre hypothèse.

En procédant de même, on verrait que, lorsque le degré de $A_{q_n}(x)$ augmente indéfiniment avec q_n, si le nombre des zéros de $A_{q_n}(x)$ appartenant à l'intervalle $(-R, R)$, (R étant une quantité positive arbitrairement grande) reste inférieur quel que soit q_n à un certain nombre Q_R qui peut croître avec R, l'ensemble des points limites réguliers de E_x ne comprendra qu'un nombre fini de points dans tout intervalle fini de Ox.

31. Désignons par R_x l'ensemble des points limites réguliers de E_x. *Je dis que R_x est un ensemble fermé.*

En effet, soit $x = \alpha$ un point limite de R_x, on peut trouver un point $x = \beta$ de R_x dont la distance au point $x = \alpha$ soit moindre que le nombre positif $\frac{\varepsilon}{2}$ donné à l'avance; $x = \beta$ étant un point limite régulier de E_x, au nombre positif $\frac{\varepsilon}{2}$ on peut faire correspondre un entier Q_ε, tel que pour $q_n > Q_\varepsilon$, chacun des polynômes $A_{q_n}(x)$ possède au moins un zéro à l'intérieur d'un segment γ_ε de longueur ε et concentrique au point $x = \beta$. Pour ces mêmes valeurs de q_n, chacun de ces polynômes possèdera au moins un zéro à l'intérieur d'un segment concentrique au point $x = \alpha$ et de longueur 2ε. Par suite, d'après la définition donnée au n° 29, le point $x = \alpha$ sera un point limite régulier de E_x.

Tout point limite de R_x est un point limite régulier de E_x d'ordre infini.

En effet, admettons qu'il n'en soit pas ainsi et que le point limite $x = \alpha$ de R_x soit un point limite régulier de E_x d'ordre p. Alors de ce point comme centre, il sera possible de décrire un segment γ_η de longueur η suffisamment petite pour que parmi les $A_{q_n}(x)$, il y en ait au moins une infinité possédant au plus p zéros à l'intérieur de ce segment. En reprenant le raisonnement du n° 30, on verrait que E_x admet au plus p points limites réguliers à l'intérieur du segment γ_η et le point $x = \alpha$ ne saurait être un point limite de R_x, ce qui est incompatible avec notre hypothèse.

L'ensemble R_x est : soit un ensemble dénombrable, soit un ensemble ayant la puissance du continu. Dans ce dernier cas, tous les points de l'axe Ox peuvent appartenir à R_x ou tous les points d'un segment quelconque de Ox. Ainsi tous les points du segment $0 - 1$ sont des points limites réguliers de l'ensemble E_x des zéros de la suite de polynômes :

$$A_{q_n}(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(x - \frac{n-1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

32. Examinons de plus près les points limites réguliers d'ordre infini, et soit $x = \alpha$ un tel point. Désignons à cet effet par $\Theta(q_n, \varepsilon)$ le nombre des zéros de $A_{q_n}(x)$ appartenant au segment $\gamma_{2\varepsilon}$ concentrique au point $x = \alpha$ et de longueur 2ε, $\Theta(q_n, \varepsilon)$ augmentera indéfiniment avec q_n, quel que petit que soit le nombre positif ε. Ceci posé, $\varphi(q_n)$ désignant comme plus haut le degré de $A_{q_n}(x)$, trois cas pourront se présenter : 1° il existe une valeur ε_1 de ε à partir de laquelle le rapport $\dfrac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)}$ converge vers zéro avec $\dfrac{1}{q_n}$; 2° $\lim\limits_{n=\infty, \varepsilon=0} \dfrac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} = 0$; 3° $\lim\limits_{n=\infty, \varepsilon=0} \dfrac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} = h'$, h' étant une quantité positive différente de zéro.

Dans l'exemple donné à la fin du n° précédent, tous les points du segment $0 - 1$ sont des points limites réguliers d'ordre infini satisfaisant à 2°.

Tous les points du segment $0 - 1$ sont des points limites réguliers satisfaisant à 1° de l'ensemble des zéros de la suite de polynômes $A_{q_n}(x)$, où $A_{q_n}(x)$ admet, comme zéro d'une part, les extrémités des intervalles obtenus en partageant le segment $0 - 1$ en $E(\log_2 n)$ parties égales et d'autre part les extrémités des intervalles obtenus en partageant le segment $1 - 2$ en $E(\log n)$ parties égales. De plus, tous les points du segment $1 - 2$ sont des points limites réguliers d'ordre infini satisfaisant à 2° de la suite des polynômes considérés.

Ces deux exemples nous montrent que l'ensemble des points de R_x satisfaisant soit à 1° soit à 2° peut avoir la puissance du continu.

Ceci étant, *je vais montrer que l'ensemble des points de R_x d'ordre infini pour lesquels on a, quel que petit que soit le nombre positif ε, $\dfrac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} > h$ (h étant une quantité positive finie), ne renferme qu'un nombre fini d'éléments.*

Désignons, à cet effet, par q le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{h}$ et admettons que le nombre des points considérés soit égal à q. En reprenant un raisonnement identique à celui du n° 30, on constate que le degré de $A_{q_n}(x)$ serait supérieur à $\varphi(q_n)$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Il en résulte que l'ensemble considéré renferme moins de q points.

D'une manière plus générale, l'ensemble des points de R_x d'ordre infini satisfaisant à 3° est au plus dénombrable.

Donnons-nous à cet effet une suite décroissante de nombres positifs:

$$(h) \qquad h_1, \ h_2, \ \ldots, \ h_n, \ \ldots$$

tels que $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$. Désignons par S_1 l'ensemble des points de R_x pour lesquels $\varlimsup\limits_{q_n=\infty, \varepsilon=0} \frac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} \geqq h_1$, puis par S_2 l'ensemble des points de R_x ne faisant pas partie de S_1 et pour lesquels on a $\varlimsup\limits_{q_n=\infty, \varepsilon=0} \frac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} \geqq h_2$, et d'une manière plus générale par S_i l'ensemble des points de R_x ne faisant pas partie de S_{i-1} et pour lesquels on a $\varlimsup\limits_{q_n=\infty, \varepsilon=0} \frac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} \geqq h_i$; puis posons

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_i \ldots.$$

Tout point de S satisfait évidemment à 3°. Inversement, tout point de R_x d'ordre infini satisfaisant à 3° fait partie de S. En effet, soit $x = \alpha$ un point de R_x satisfaisant à 3°, il existera une quantité positive h, telle que l'on ait

$$\varlimsup_{q_n=\infty, \varepsilon=0} \frac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)} = h;$$

si h_{i-1} et h_i sont les deux nombres de la suite (h) comprenant h, le point $x = \alpha$ considéré fera partie de l'ensemble S_i.

Il résulte de là que *l'ensemble S est identique à l'ensemble des points de R_x d'ordre infini satisfaisant à 3°.*

Comme chacun des ensembles S_i ne renferme qu'un nombre fini de points au plus, d'après une proposition établie plus haut, S sera un ensemble au plus dénombrable, d'où la proposition énoncée plus haut.

De là, si tous les points de R_x sont des points d'ordre infini satisfaisant à 3°, cet ensemble R_x sera dénombrable.

Exemple. — Considérons la suite de polynômes:

$$A_{q_1}(x), \quad A_{q_2}(x), \ \ldots, \ A_{q_n}(x), \ \ldots$$

où

$$A_{q_n}(x) = \left[\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)\right]^n,$$

p désignant un entier fixe et n prenant toutes les valeurs entières et positives. Les points ayant respectivement pour abscisse:

$$0, \quad \frac{1}{2}, \ \ldots, \ \frac{1}{p}$$

seront des points limites réguliers d'ordre infini satisfaisant à 3° de l'ensemble des zéros de la suite de polynômes considérés. En effet, pour chacun de ces points le rapport $\frac{\Theta(q_n, \varepsilon)}{\varphi(q_n)}$ sera constamment égal à $\frac{1}{p}$, quel que petit que soit le nombre positif ε.

33. Soit

$$(A^{(i)}) \qquad A_{q_{1,i}}(x), \quad A_{q_{2,i}}(x), \ \ldots, \ A_{q_{n,i}}(x), \ \ldots$$

une suite infinie de polynômes extraite de la suite (A); nous désignerons par $E_x^{(i)}$ l'ensemble des zéros des polynômes de cette suite $(A^{(i)})$. D'après la définition donnée au n° 29, tout point limite régulier de E_x sera un point limite régulier de $E_x^{(i)}$, mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que tout point limite régulier de $E_x^{(i)}$ n'est pas nécessairement un point limite régulier de E_x. Si nous désignons par $R_x^{(i)}$ l'ensemble des points limites réguliers de $E_x^{(i)}$, nous aurons:

$$R_x^{(i)} \geqq R_x.$$

Dans le cas particulier où la suite $(A^{(i)})$ ne diffère de la suite (A) que par un nombre fini de polynômes, on aura évidemment:

$$R_x^{(i)} = R_x.$$

Mais si la suite $(A^{(i)})$ diffère de la suite (A) par une infinité dénombrable d'éléments, l'ensemble $R_x^{(i)}$ pourra être plus étendu que l'ensemble R_x.

Exemple. — Supposons que les polynômes de la suite (A) soient définis de la façon suivante:

$$A_{q_n}(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right) \quad (p \text{ étant un nombre entier fixe})$$

si l'indice n de q_n est pair, et

$$A_{q_n}(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(x - \frac{n-1}{n}\right)$$

si l'indice n de q_n est impair.

L'ensemble R_x des points limites réguliers de E_x comprendra seulement p points.

Si nous considérons comme faisant partie de la suite $(A^{(i)})$ tous les polynômes $A_{q_n}(x)$ précédemment définis pour lesquels l'indice n de q_n est impair, l'ensemble $R_x^{i)}$ comprendra tous les points du segment $0 - 1$, extrémités comprises, de sorte que dans l'exemple considéré, l'ensemble R_x différera de l'ensemble $R_x^{(i)}$ par une infinité non dénombrable de points.

Remarque. — Admettons que le nombre des zéros des polynômes $A_{q_n}(x)$ dont le module est au plus égal à R, soit pour toute valeur de l'indice q_n au plus égal à Q_R. Dans cette hypothèse, l'ensemble des points limites réguliers de l'ensemble des zéros d'une suite quelconque $(A^{(i)})$ extraite de la suite (A) renfermera au plus Q_R points à l'intérieur de l'intervalle $(-R, R)$.

34. Il importe de savoir pour les applications, dans quels cas le nombre des zéros de $A_{q_n}(x)$ appartenant à l'intervalle $(-R, R)$, R étant une quantité positive arbitrairement grande, ne dépasse pas, quel que soit q_n, un certain nombre Q_R qui peut d'ailleurs croître avec R. Sans traiter la question à fond, nous remarquons qu'il en est certainement ainsi s'il existe un nombre fini p tel que les sommes

$$\sum_{i=1}^{\varphi(q_n)} \frac{1}{\alpha_{q_n,i}^{2p}}$$

soient limitées supérieurement, c'est-à-dire qu'il existe une quantité positive L telle que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{\varphi(q_n)} \frac{1}{\alpha_{q_n,i}^{2p}} < L$$

pour toutes les valeurs de l'indice q_n.

Comme on peut calculer, pour chaque valeur de q_n, les sommes $\sum_{i=1}^{\varphi(q_n)} \frac{1}{\alpha_{q_n,i}^{2p}}$ en fonction des coefficients de $A_{q_n}(x)$ à l'aide des formules de NEWTON, on voit que la connaissance des coefficients de $A_{q_n}(x)$ nous permet de conclure, dans un certain nombre de cas, si le nombre des zéros de $A_{q_n}(x)$ dont le module est au plus égal à un nombre positif R arbitrairement grand ne dépasse pas Q_R.

Cas où les zéros sont imaginaires.

35. Soit

$$(P) \qquad P_{q_1}(u), \quad P_{q_2}(u), \ldots, P_{q_n}(u), \ldots$$

une suite de polynômes de la variable complexe u, à coefficients réels ou imaginaires, où

$$P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \ldots (u - a_{q_n,\varphi(q_n)}),$$

les $a_{q_n,i}$ étant imaginaires et $\varphi(q_n)$ augmentant indéfiniment avec q_n ou restant inférieur à un certain nombre fixe q.

Nous désignerons par E l'ensemble des zéros de la suite de polynômes (P). Toutes les définitions et propriétés que nous avons données aux n^{os} 30-35 s'étendent à l'ensemble E des zéros de la suite de polynômes (P): il suffit de remplacer l'expression segment de longueur 2ε par cercle de rayon ε.

Par exemple, nous dirons que le point $u = a$ est un point limite régulier de E, si au nombre positif ε correspond un entier Q_ε tel que, pour $q_n > Q_\varepsilon$, chacun des polynômes $P_{q_n}(u)$ possède au moins un zéro à l'intérieur d'un cercle concentrique au point $u = a$ et de rayon ε.

Posons:

$$P_{q_n}(u) = V_{q_n}(x, y) + iW_{q_n}(x, y),$$

$$a_{q_n,i} = \alpha_{q_n,i} + i\beta_{q_n,i};$$

les $\alpha_{q_n,i}$ sont pour une même valeur de l'indice q_n racines de l'équation $A_{q_n}(x)$ que l'on obtient en égalant à zéro le résultat de l'élimination de y entre les équations:

$$V_{q_n}(x, y) = 0, \qquad W_{q_n}(x, y) = 0;$$

de même si $B_{q_n}(y)$ est le résultat de l'élimination de x entre les deux équations précédentes, les $\beta_{q_n,i}$ seront pour une même valeur de q_n racines de l'équation $B_{q_n}(y) = 0$. Désignons respectivement par E_x et E_y les ensembles des zéros des polynômes $A_{q_n}(x)$ et $B_{q_n}(y)$. En utilisant les relations:

$$|a_{q_n,i} - a| \geqq |\alpha_{q_n,i} - \alpha|, \quad |a_{q_n,i} - a| \geqq |\beta_{q_n,i} - \beta|,$$

on voit que, si *le point* $u = a = \alpha + i\beta$ *est un point limite régulier de* E, *les points* $x = \alpha$ *et* $y = \beta$ *seront respectivement des points limites réguliers pour chacun des ensembles* E_x *et* E_y. *Mais la réciproque n'est pas toujours vraie.*

CHAPITRE IV.

Points de moindre croissance.

Cas où tous les zéros sont réels.

36. Soit

$$(G) \qquad G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}(x), \ \ldots, \ G_{q_n}(x), \ \ldots,$$

où $G_{q_n}(x) = (x - \alpha_{q_n,1})(x - \alpha_{q_n,2}) \ldots (x - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)})$, une suite de polynômes de la variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes:

1° tous les zéros de ces polynômes sont réels et appartiennent à un intervalle fini AB de l'axe des x;

2° si $\varphi(q_n)$ désigne le degré de $G_{q_n}(x)$, il existe un entier q tel que l'on ait pour toute valeur de q_n: $\varphi(q_n) < q q_n$.

Soit R une quantité positive supérieure au nombre représentant la longueur du segment AB; nous aurons pour tout point x de ce segment, en vertu des deux conditions précédentes,

$$(17) \qquad G_{q_n}(x) < R^{\varphi(q_n)}.$$

Ceci posé, soit $x = \beta$ un point quelconque du segment AB; nous déduisons de (17):

$$\frac{-\log|G_{q_n}(\beta)|}{q_n \log q_n} > \frac{-\varphi(q_n)\log R}{q_n \log q_n},$$

ce qui nous montre, en tenant compte de 2°, qu'en tout point $x = \beta$ du segment AB la plus petite limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta)|}{q_n \log q_n}$ est au moins égale à zéro.

Désignons comme plus haut par E_x l'ensemble des zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$ et par R_x l'ensemble des points limites réguliers de E_x. Soit $x = \beta$ un point ne faisant pas partie de R_x, si toutefois il y a de tels points $x = \beta$. Il est possible d'extraire de la suite (G) une suite infinie de polynômes:

$$G_{p_1}(x), \quad G_{p_2}(x), \ \ldots, \ G_{p_n}(x), \ \ldots,$$

tels que si l'on désigne par H_x l'ensemble de leurs zéros et son dérivé par H'_x, le point $x = \beta$ ne fasse pas partie de H'_x. Désignons par η le minimum de la distance du point $x = \beta$ à l'ensemble H'_x. Nous aurons, à partir d'une valeur de p_n suffisamment grande,

$$|G_{p_n}(\beta)| > \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\varphi(p_n)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{-\log|G_{p_n}(\beta)|}{p_n \log p_n} < \frac{-\varphi(p_n)\log\left(\frac{\eta}{2}\right)}{p_n \log p_n},$$

ce qui nous montre, en tenant compte de 2°, que la plus grande limite de la suite des nombres $\frac{-\log|G_{p_n}(\beta)|}{p_n \log p_n}$ est au plus égale à zéro. Par suite, en tenant compte d'un résultat précédemment établi, on voit que si $x = \beta$ est un point du segment AB n'appartenant pas à R_x, la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|G_{q_n}(\beta)|}{q_n \log q_n}$ est égale à zéro.

Supposons maintenant que le point $x = \beta$ appartienne à R_x. Deux cas pourront se présenter: ou bien la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|G_{q_n}(\beta)|}{q_n \log q_n}$ est égale à zéro, ou bien cette plus petite limite est une quantité positive k' finie ou infinie.

Ceci étant, nous dirons que le point $x = \alpha$ est un point de moindre croissance de la suite de polynômes (G) si l'on a en ce point:

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\beta)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie. De cette définition et de ce qui précède résulte que tout point de moindre croissance fait partie de R_x, mais que tout point de R_x n'est pas nécessairement un point de moindre croissance. Par suite, si nous représentons par N_x l'ensemble des points de moindre croissance de la suite de polynômes (G), nous pourrons écrire:

$$N_x \leqq R_x.$$

De la résulte que si R_x comprend un nombre fini de points, N_x comprendra un nombre fini de points au plus. De plus, si R_x est dénombrable, il en sera de même de N_x, car toute portion d'ensemble dénombrable est elle-même un ensemble dénombrable.

Nous allons étudier l'ensemble N_x au double point de vue de la puissance et de la mesure; mais, auparavant nous établirons un certain nombre de propriétés des ensembles de points intérieurs au sens strict à un ensemble de segments à deux indices.

Sur certains ensembles de points intérieurs au sens strict à un ensemble de segments à deux indices.

37. Soit (γ) un ensemble de segments à deux indices appartenant à un intervalle fini AB de l'axe des x:

$$\gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,2}, \quad \cdots, \quad \gamma_{n,\varphi(n)},$$

où $\varphi(n)$ ayant une valeur finie pour chaque valeur finie de n, augmente indéfiniment avec n. Nous supposerons en outre que cette suite de segments (γ) jouit des propriétés suivantes:

1° pour une même valeur de n, les segments $\gamma_{n,i}$ n'ont aucune partie, ni extrémités communes;

2° si σ_m est la somme totale des longueurs de tous les segments $\gamma_{n,i}$ dont le premier indice est m, on a: $\lim\limits_{m=\infty} \sigma_m = 0$.

Ceci posé, nous dirons que le point $x = \alpha$ est intérieur au sens strict à l'ensemble de segments (γ), s'il existe un nombre entier Q tel que, pour chaque valeur de n supérieure à Q, il y ait un segment $\gamma_{n,i}$ comprenant le point $x = \alpha$ à son intérieur au sens étroit. D'après 1°, pour une même valeur de n, il y aura un seul segment $\gamma_{n,i}$ comprenant le point $x = \alpha$ à son intérieur et cela pour toutes les valeurs de n supérieures à Q.

Nous désignerons par M l'ensemble des points intérieurs au sens strict à l'ensemble de segments (γ).

Si M admet au moins un point, d'après la définition précédente, il existera une valeur p de n à partir de laquelle il y aura un segment $\gamma_{n,i}$ ayant une partie commune avec un segment $\gamma_{n+1,h}$ au moins. Par suite, s'il existe un nombre entier p tel que, pour $n > p$, un segment $\gamma_{n,i}$ quelconque n'ait aucune partie commune avec un segment $\gamma_{n+1,h}$ quelconque, on peut affirmer que l'ensemble M ne renfermera aucun point.

Soient $x = \alpha$ et $x = \beta$ deux points distincts de M: il existe un nombre entier Q tel que, pour $n > Q$, le segment $\gamma_{n,i}$ comprenant le point $x = \alpha$ à son intérieur est distinct du segment $\gamma_{n,h}$ qui renferme le point $x = \beta$ à son intérieur. Car s'il n'en était pas ainsi, il existerait une infinité de valeurs de n pour lesquelles les deux segments $\gamma_{n,i}$ et $\gamma_{n,h}$ coïncideraient et comme d'après 2° les longueurs des segments $\gamma_{n,i}$ et $\gamma_{n,h}$ convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, les deux points $x = \alpha$ et $x = \beta$ coïncideraient, ce qui est contraire à notre hypothèse.

38. Désignons par M_l l'ensemble des points de M tels que chacun d'eux soit intérieur au sens étroit à un segment $\gamma_{n,i}$ pour toutes les valeurs de n supérieures à $p + l - 1$ et pour celles-là seulement. Nous avons évidemment:

$$M_{l+1} \geqq M_l.$$

Soit M'_{l+1} l'ensemble des points de M_{l+1} ne faisant pas partie de M_l, je dis que l'on a:

$$M = M'_1 + M'_2 + \cdots + M'_l + \cdots \qquad (M'_1 = M_1).$$

En effet, tout point $x = \alpha$ de l'ensemble M'_l est intérieur au sens étroit à un segment $\gamma_{n,i}$ pour toutes les valeurs de n supérieures à $p + l - 1$; il appartient donc à M. Inversement, soit $x = \beta$ un point de M; il existe un nombre entier q tel que pour chaque valeur de n supérieure à q, ce point soit intérieur au sens étroit à un segment $\gamma_{n,i}$. Donc, si $q = p + l - 1$, le point $x = \beta$ appartiendra à l'ensemble M'_l et si $q \leqq p - 1$, il fera partie de M'_1 et la proposition se trouve démontrée.

Par suite, si chacun des ensembles M'_l contient au plus un nombre fini de points, l'ensemble M sera au plus dénombrable, car l'ensemble somme d'une infinité denombrable d'ensembles tels que chacun d'eux renferme au plus un nombre fini de points, est au plus dénombrable.

De plus, si l'un des ensembles M'_l a la puissance du continu, il en sera de même de l'ensemble M. En effet, admettons que M'_i ait la puissance du continu; comme

$$M \geqq M'_i,$$

la puissance de M sera au moins égale à celle du continu. D'autre part, elle ne peut lui être supérieure puisque l'ensemble C de tous les points du segment AB a la puissance du continu et que

$$M < C \qquad \text{(cfr. n° 42).}$$

39. Supposons que pour $n > p - 1$, chacun des segments $\gamma_{n,i}$ ait une partie commune avec un segment $\gamma_{n+1,h}$ au plus, je dis que, dans cette hypothèse, l'ensemble M_l aura au plus un point à l'intérieur du segment $\gamma_{p+l,i}$. En effet, admettons que M_l possède au moins deux points à l'intérieur du segment $\gamma_{p+l,i}$: $x = \alpha$ et $x = \beta$. D'après une remarque du n° 37, il existe un entier Q tel qu'à partir de $n > Q$, la suite S_α des segments $\gamma_{n,i}$ comprenant le point $x = \alpha$ à leur intérieur est distincte de la suite S_β des segments $\gamma_{n,h}$ qui renferment le point $x = \beta$ à leur intérieur. Comme Q serait au moins égal à $p + l$, il en résulte qu'à partir d'une valeur de n supérieure à $p - 1$, il y aurait au moins un segment $\gamma_{n,i}$ ayant une partie commune respectivement avec deux segments $\gamma_{n+1,h}$ et $\gamma_{n+1,k}$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc il y a au plus un point de M_l à l'intérieur du segment $\gamma_{p+l,i}$. Comme le nombre des segments $\gamma_{p+l,i}$ est égal à $\varphi(p + l)$, il en résulte que l'ensemble M_l possède au plus $\varphi(p + l)$ points. La propriété précédente ayant lieu quel que soit l'indice l de M_l, il s'ensuit que chacun des ensembles M'_l possède au plus un nombre fini de points. Par conséquent, en tenant compte d'une remarque du n° précédent, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

S'il existe un entier p tel que pour $n > p - 1$, chaque segment $\gamma_{n,i}$ ait une partie commune avec un segment $\gamma_{n+1,h}$ au plus, l'ensemble M des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments (γ) est au plus dénombrable.

40. Le segment γ_h est dit intérieur au sens étroit au segment γ_i si les extrémités de γ_h sont intérieures au sens étroit au segment γ_i.

Soit

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \; \ldots, \; \gamma_n, \quad \ldots$$

une suite de segments tels que chacun d'eux soit intérieur au sens étroit au segment qui le précède dans la suite, et en outre tels que la longueur de γ_n converge vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$. Il existe, comme on le sait, un point $x = \alpha$ commun à tous ces segments et de plus ce point $x = \alpha$ est intérieur au sens étroit à chacun des segments γ_n.

Cette proposition étant rappelée, admettons que pour toutes les valeurs de n supérieures à $p - 1$, un segment $\gamma_{n,i}$ comprenne à son intérieur au sens étroit un segment $\gamma_{n+1,h}$ et n'ait aucune portion commune avec l'un quelconque des segments $\gamma_{n+1,k}$ restants.

D'après la proposition que nous venons de rappeler, l'ensemble M_l possédera au moins un point à l'intérieur du segment $\gamma_{p+l,i}$, mais il ne pourra en admettre d'autres comme on le constate aisément en reprenant un raisonnement analogue à celui du n° précédent. Par suite, l'ensemble M_l possédera $\varphi(p+l)$ points et $\varphi(p+l)$ seulement. Comme $\varphi(n)$ augmente indéfiniment avec n, l'ensemble M'_l admettra au moins un point pour une infinité de valeurs de l. Par suite, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Si pour toutes les valeurs de n supérieures à $p-1$ et quel que soit i, chaque segment $\gamma_{n,i}$ comprend à son intérieur au sens étroit un segment $\gamma_{n+1,h}$ et n'a pas de portions communes avec l'un quelconque des segments $\gamma_{n+1,k}$ restants, l'ensemble M admet effectivement une infinité de points formant un ensemble dénombrable.

41. Considérons maintenant le cas où pour toutes les valeurs de n supérieures à $p-1$ et quel que soit i, chaque segment $\gamma_{n,i}$ comprend $q_{n,i}$ segments $\gamma_{n+1,h}$ à son intérieur au sens étroit, $q_{n,i}$ étant au moins égal à 2. Affectons d'un accent tous les segments $\gamma_{p+1,h}$ compris à l'intérieur des segments $\gamma_{p,i}$, puis tous les segments $\gamma_{p+2,k}$ compris à l'intérieur des segments $\gamma_{p+1,h}$ précédemment accentués et ainsi de suite indéfiniment. L'ensemble des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments accentués n'est autre que l'ensemble M_1 des points de M qui sont intérieurs à un segment $\gamma_{n,i}$ pour toutes les valeurs de n supérieures à $p-1$.

I. *Tout segment γ'_{q,i_q} comprend à son intérieur au moins un point de M_1.*

En effet, puisque chaque segment $\gamma'_{n,i}$ contient à son intérieur au sens étroit au moins deux segments $\gamma'_{n+1,h}$, nous pouvons extraire de la suite des segments accentués une suite infinie:

$$(\gamma') \qquad \gamma'_{p,i_p}, \ \gamma'_{p+1,i_{p+1}}, \ \ldots, \ \gamma'_{q,i_q}, \ \ldots, \ \gamma'_{n,i_n}, \ \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes:

1° elle contient le segment γ'_{q,i_q};

2° tout segment de cette suite est intérieur au sens étroit au segment qui le précède dans la suite.

D'après la proposition rappelée au début du n° précédent, il existe un point intérieur au sens étroit à tous les segments de la suite (γ'). Par suite M_1 admet au moins un point à l'intérieur du segment γ'_{q,i_q}.

II. *Tout segment γ'_{q,i_q} contient à son intérieur une infinité de points de M_1.*

En effet, supposons qu'il y ait seulement p points de M_1 à l'intérieur du segment considéré. Il est nécéssaire d'après I que le nombre des segments $\gamma'_{n,i}$ intérieurs au segment γ'_{q,i_q} soit au plus égal à p et cela pour toutes les valeurs de n supérieures à q. Or ceci est impossible, puisque, d'après notre hypothèse, le nombre des segments $\gamma'_{n,i}$ compris à l'intérieur du segment γ'_{q,i_q} augmente indéfiniment avec n. Il y a donc une infinité de points de M_1 intérieurs au segment γ'_{q,i_q}. De plus, tous ces points sont intérieurs au sens étroit à ce segment γ'_{q,i_q}, puisque l'un quelconque de ces points doit être intérieur à l'un quelconque des segments $\gamma'_{q+1,h}$, qui sont intérieurs au sens étroit au segment γ'_{q,i_q}.

III. *Tout point $x = \alpha$ de M_1 est un point limite de cet ensemble.*

En effet, soit ρ un segment de longueur aussi petite que l'on veut et comprenant le point $x = \alpha$ à son intérieur au sens étroit. Ce segment ρ contiendra au moins un segment $\gamma'_{n,i}$ à son intérieur au sens étroit et par suite, d'après II, ce segment ρ comprendra à son intérieur une infinité de points de M_1. Comme la longueur du segment ρ est supposée arbitrairement petite, le point $x = \alpha$ est donc un point limite de M_1.

IV. *Tout point limite $x = \beta$ de M_1 fait partie de cet ensemble.*

En effet, soit l_1 un nombre positif moindre que la longueur minimum des intervalles séparant deux segments $\gamma'_{p+1,h}$ consécutifs. Le point $x = \beta$ étant un point limite de M_1, il y aura une infinité de points $x = \alpha_i$ de cet ensemble à l'intérieur du segment ρ_1 concentrique à ce point et de longueur l_1. Tous ces points $x = \alpha_i$ appartiendront à un même segment $\gamma'_{p+1,i_{p+1}}$ d'après la façon même dont nous avons défini le segment ρ_1. Par suite, le point $x = \beta$, qui est point limite de points intérieurs au segment $\gamma'_{p+1,i_{p+1}}$, sera intérieur à ce segment, soit au sens étroit, soit au sens large. Comme le segment $\gamma'_{p+1,i_{p+1}}$ est intérieur au sens étroit à un segment γ'_{p,i_p}, le point $x = \beta$ sera intérieur au sens étroit au segment γ'_{p,i_p}. En continuant ainsi indéfiniment, nous formerons une suite infinie de segments:

$$\gamma'_{p,i_p}, \quad \gamma'_{p+1,i_{p+1}}, \ldots, \gamma'_{n,i_n}, \quad \ldots,$$

tels que le point $x = \beta$ soit intérieur à chacun d'eux au sens étroit. Il en résulte que le point $x = \beta$ fait partie de M_1.

D'après III et IV, l'ensemble M_1 est un ensemble parfait. Comme d'après un théorème dû à M. Georges Cantor, tout ensemble parfait a la puissance du continu, l'ensemble M_1 aura la puissance du continu. Par suite, d'après une remarque du n° 38, il en sera de même de l'ensemble M et nous obtenons le théorème suivant:

Si pour $n > p - 1$ et quel que soit i, chaque segment $\gamma_{n,i}$ comprend à son intérieur au sens étroit $q_{n,i}$ segments $\gamma_{n+1,h}$, $q_{n,i}$ étant au moins égal à 2, l'ensemble M des points intérieurs au sens strict à l'ensemble de segments (γ) a la puissance du continu.

Remarque. — On peut établir que l'ensemble M_1 est un ensemble parfait, en montrant que cet ensemble s'obtient en enlevant du segment AB tous les points intérieurs au sens étroit à une infinité dénombrable de segments sans partie ni extrémités communes.

42. Un ensemble de points répartis sur un segment fini de droite est dit de mesure linéaire nulle, si tous les points de cet ensemble peuvent être renfermés dans une infinité dénombrable de segments dont la somme totale des longueurs est aussi petite que l'on veut.

Cette définition rappelée, il est facile de montrer que *l'ensemble M des points intérieurs au sens strict à l'ensemble de segments (γ) a une mesure linéaire nulle.*

En effet, soit ε un nombre positif arbitrairement petit. Déterminons une suite décroissante de nombres positifs:

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

tels que:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots;$$

σ_n ayant pour limite zéro, lorsque n croît au delà de toute limite (cfr. n° 37), il nous est possible de déterminer une suite de nombres entiers positifs:

$$p_1, \quad p_2, \ldots, p_n, \quad \ldots,$$

tels que l'on ait:

$$\sigma_{p_n} < \varepsilon_n.$$

Ceci posé, considérons l'ensemble des points de M intérieurs aux segments $\gamma_{n,i}$ à partir de $n=p$, p ayant une valeur inférieure ou au plus égale à p_1. Ces points sont compris à l'intérieur des segments $\gamma_{p_1,i}$ dont la somme totale des longueurs est moindre que ε_1. Considérons ensuite les points de M qui sont intérieurs aux segments $\gamma_{n,i}$ à partir de $n=p$, p étant au moins égal à p_1+1 et au plus égal à p_2. Ces points sont à l'intérieur des segments $\gamma_{p_2,i}$ dont la somme totale des longueurs est moindre que ε_2. En continuant ainsi indéfiniment, on constate que l'ensemble M peut être renfermé dans une infinité dénombrable de segments dont la somme totale des longueurs est moindre que le nombre positif ε donné à l'avance. Il en résulte que l'ensemble M a une mesure linéaire nulle.

43. Désignons par M' l'ensemble des points du segment AB tels que chacun d'eux soit intérieur au sens étroit à une infinité de segments $\gamma_{n,i}$. Cet ensemhle M' comprendra tous les points de l'ensemble M défini au n° 37, mais il pourra contenir d'autres points, à savoir les points intérieurs au sens étroit à une infinité de segments $\gamma_{n,i}$, n ne prenant pas toutes les valeurs supérieures à un nombre fixe, mais seulement une infinité d'entr'elles.

Ceci étant, *si la série* $\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n$ *est convergente, non seulement on peut affirmer que l'ensemble M a une mesure linéaire nulle, mais qu'il en est de même de l'ensemble M'.*

En effet, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n$ étant convergente, au nombre positif ε donné à l'avance, on peut faire correspondre un entier p tel que:

$$\sum_{n=p+1}^{n=\infty}\sigma_n < \varepsilon.$$

Comme l'un quelconque des points de M' doit être intérieur au sens étroit à une infinité dénombrable de segments $\gamma_{n,i}$, par suite au moins à un segment $\gamma_{n,i}$ dès que $n>p$, notre proposition se trouve établie.

Sur la puissance de l'ensemble N_x.

44. Soit

$$(G) \qquad G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}(x), \ldots, G_{q_n}(x), \quad \ldots$$

une suite de polynômes de la variable réelle x satisfaisant aux conditions énoncées au n° 36. Désignons par $G'_{q_n}(x)$ le polynôme dérivé de $G(x)$. Des relations:

$$|G_{q_n}(x)| < R^{\varphi(q_n)}, \qquad |G'_{q_n}(x)| < \varphi(q_n)R^{\varphi(q_n)}, \qquad (\varphi(q_n) \leqq q\,q_n),$$

où R est une quantité positive supérieure au nombre représentant la longueur du segment AB, nous déduisons:

$$\underline{\lim}_{q_n=\infty} \frac{-\log |G_{q_n}(\zeta_n)|}{q_n \log q_n} \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{q_n=\infty} \frac{-\log |G'_{q_n}(\zeta_n)|}{q_n \log q_n} \geq 0,$$

$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ étant les abscisses d'une infinité dénombrable de points appartenant au segment AB.

Soit $\beta_{q_n,i}$ la racine de l'équation $G'_{q_n}(x)=0$ appartenant à l'intervalle $(\alpha_{q_n,i-1}\,\alpha_{q_n,i})$, $\alpha_{q_n,i-1}$ et $\alpha_{q_n,i}$ étant deux zéros consécutifs de $G_{q_n}(x)$, et posons:

$$|G_{q_n}(\beta_{q_n,2})| = e^{-k_{q_n,2}q_n\log q_n}, \ldots, |G_{q_n}(\beta_{q_n,\varphi(q_n)})| = e^{-k_{q_n,\varphi(q_n)}q_n\log q_n}.$$

D'après un résultat que nous venons d'établir, la plus petite limite de l'ensemble des nombres $k_{q_n,i}$ sera au moins égale à zéro. Il en résulte que si k_{q_n} est le plus grand des nombres $k_{q_n,i}$ correspondant à une même valeur de q_n, on aura à fortiori:

$$\underline{\lim}_{q_n=\infty} k_{q_n} \geq 0.$$

Remarquons que $e^{-k_{q_n}q_n\log q_n}$ ne sera autre que le module de la racine de l'équation $\Delta_{q_n}(y)=0$ ayant la plus petite valeur absolue, $\Delta_{q_n}(y)$ étant le discriminant du polynôme $G_{q_n}(x)$.

Ceci étant, nous allons étudier la puissance de l'ensemble N_x des points de moindre croissance des polynômes $G_{q_n}(x)$ en nous plaçant uniquement dans le cas où la suite (k) des nombres:

$$(k) \qquad k_1, \quad k_2, \ldots, k_{q_n}, \quad \ldots,$$

admet zéro comme élément limite unique. A cet effet, nous déterminerons, en nous plaçant dans cette hypothèse, une valeur approchée de la longueur des segments $\gamma_{q_n,i}$ en chaque point desquels on a

$$\frac{-\log |G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} - k \geq 0.$$

Mais auparavant, nous ferons diverses remarques qui nous seront utiles pour cette détermination.

45. I. *Soit k une quantité positive quelconque; on peut lui faire correspondre un entier Q_k tel que, pour $q_n > Q_k$, chacune des équations:*

$$(18) \qquad \frac{-\log |G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} - k = 0$$

admette $2\varphi(q_n)$ racines distinctes.

En effet, k_{q_n} convergeant vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$, il existe un nombre entier Q_k tel que, pour $q_n > Q_k$, on ait:

$$k_{q_n} < k.$$

Par suite, d'après la définition même du nombre k_{q_n}, on aura, pour ces mêmes valeurs de q_n et quel que soit i,

$$k_{q_n,i} < k,$$

d'où l'on déduit aisément que l'équation (18) possède deux racines dans chacun des intervalles $(\alpha_{q_n,i-1}, \alpha_{q_n,i})$ si $q_n > Q_k$, et comme elle admet une racine dans chacun des intervalles $(-\infty, \alpha_{q_n,1})$ et $(\alpha_{q_n,\varphi(q_n)}, +\infty)$, elle aura donc $2\varphi(q_n)$ racines pour les valeurs de q_n considérées.

L'équation (18) possédant $2\varphi(q_n)$ racines dès que $q_n > Q_k$, le nombre des segments $\gamma_{q_n,i}$ en chaque point desquels on a

$$\frac{-\log|G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} \geqq k$$

sera égal à $\varphi(q_n)$, et chacun de ces segments comprendra à son intérieur un zéro et un seul de $G_{q_n}(x)$.

II. *L'ensemble des nombres*

$$\frac{-\log|\alpha_{q_n,i} - \beta_{q_n,i}|}{q_n \log q_n}, \qquad \frac{-\log|\alpha_{q_n,i-1} - \beta_{q_n,i}|}{q_n \log q_n} \qquad [i=2, 3, \ldots \varphi(q_n),\ n=1, 2, 3, \ldots]$$

admet zéro comme élément limite unique.

En effet, de la relation :

$$G_{q_n}(\beta_{q_n,i}) = (\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i})G'_{q_n}(x_{q_n,i}),$$

où $x_{q_n,i}$ est un nombre appartenant à l'intervalle $(\alpha_{q_n,i}, \beta_{q_n,i})$, nous déduisons, en remarquant que, d'après notre hypothèse sur la suite (k), l'ensemble des nombres $\dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme élément limite unique :

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}|}{q_n \log q_n} \frac{-\log|G'_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0;$$

et comme (n° 44)

$$\varliminf_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}|}{q_n \log q_n} \geqq 0, \qquad \varliminf_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} \geqq 0,$$

la relation précédente ne peut avoir lieu que si l'on a à la fois :

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}|}{q_n \log q_n} = 0, \qquad \lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0.$$

De même, de la relation :

$$G_{q_n}(\beta_{q_n,i}) = (\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i-1})G'_{q_n}(x'_{q_n,i}),$$

où $x'_{q_n,i}$ est un nombre appartenant à l'intervalle $(\beta_{q_n,i}, \alpha_{q_n,i-1})$, nous déduisons comme précédemment :

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i-1}|}{q_n \log q_n} = 0, \qquad \lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(x'_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Posons

$$B^{(1)}_{q_n}(x_{q_n,i}) = \prod_{m=2}^{i}(x_{q_n,i} - \beta_{q_n,m}); \qquad B^{(2)}_{q_n}(x_{q_n,i}) = \prod_{m=i+1}^{\varphi(q_n)}(x_{q_n,i} - \beta_{q_n,i}),$$

$x_{q_n,i}$ n'étant autre que le nombre de l'intervalle $(\beta_{q_n,i}, \alpha_{q_n,i})$ considéré plus haut. Comme on a

$$G'_{q_n}(x_{q_n,i}) = \varphi(q_n) B^{(1)}_{q_n}(x_{q_n,i}) B^{(2)}_{q_n}(x_{q_n,i}),$$

il résulte d'un résultat précédemment établi que

$$\lim_{q_n+i=\infty} \left[\frac{-\log|B^{(1)}_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} - \frac{\log|B^{(2)}_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} \right] = 0,$$

en observant toutefois que, d'après notre hypothèse sur $\varphi(q_n)$, on a

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log\varphi(q_n)}{q_n \log q_n} = 0.$$

De la relation précédente, nous déduisons:

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|B^{(l)}_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0 \qquad (l=1, 2),$$

en remarquant que, d'après une démonstration analogue à celle du n° 44, on a

$$\varliminf_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|B^{(l)}_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} \geqq 0 \qquad (l=1, 2).$$

III. *L'ensemble des nombres*

$$\frac{-\log|\alpha_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i-1}|}{q_n \log q_n} \qquad [i=2, 3, \ldots, \varphi(q_n), \; n=1, 2, \ldots]$$

admet zéro comme élément limite unique.

Cette proposition résulte immédiatement de II et des relations:

$$|\alpha_{q_n,i} - \beta_{q_n,i}| < |\alpha_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i-1}| = |\alpha_{q_n,i} - \beta_{q_n,i}| + |\alpha_{q_n,i-1} - \beta_{q_n,i}|.$$

IV. $$\operatorname{Lim}_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(\alpha_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Désignons, à cet effet, par $x_{q_n,i}$ et $x'_{q_n,i}$ les nombres appartenant respectivement aux intervalles $(\alpha_{q_n,i}, \beta_{q_n,i})$ et $(\alpha_{q_n,i}, \beta_{q_n,i+1})$ et définis par les relations:

$$G_{q_n}(\beta_{q_n,i}) = (\beta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}) G'_{q_n}(x_{q_n,i}); \quad G_{q_n}(\beta_{q_n,i+1}) = (\beta_{q_n,i+1} - \alpha_{q_n,i}) G'_{q_n}(x'_{q_n,i}).$$

Posons

$$B^{(1)}_{q_n}(x_{q_n,i}) = \prod_{m=2}^{i} (x_{q_n,i} - \beta_{q_n,m}), \qquad B^{(2)}_{q_n}(x'_{q_n,i}) = \prod_{m=i+1}^{\varphi(q_n)} (x'_{q_n,i} - \beta_{q_n,m});$$

nous aurons

$$\frac{-\log|G'_{q_n}(\alpha_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} < \frac{-\log|B^{(1)}_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} - \frac{\log|B^{(2)}_{q_n}(x'_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} - \frac{\log\varphi(q_n)}{q_n \log q_n}.$$

Comme, d'après notre hypothèse sur $\varphi(q_n)$,

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log\varphi(q_n)}{q_n \log q_n} = 0,$$

puis, d'après II,

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|B^{(1)}_{q_n}(x_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0, \qquad \lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|B^{(2)}_{q_n}(x'_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0$$

et enfin, d'après le n° 44,

$$\underline{\lim}_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(\alpha_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} \geqq 0,$$

il viendra:

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(\alpha_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Si nous posons

$$G_{q_n}(x) = (x - \alpha_{q_n,i}) C_{q_n}(x),$$

nous aurons également:

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|C_{q_n}(\alpha_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0,$$

puisque:

$$C_{q_n}(\alpha_{q_n,i}) = G'_{q_n}(\alpha_{q_n,i}).$$

V. *D'une manière générale, si* $\zeta_{q_n,i}$ *est l'abscisse d'un point du segment* AB *dont la distance au point* $x = \alpha_{q_n,i}$ *est égale à* $e^{-hq_n \log q_n}$, h *étant une quantité positive quelconque, on a également:*

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|C_{q_n}(\zeta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Il suffit d'après la fin de IV de montrer que le rapport $\left|\frac{C_{q_n}(\zeta_{q_n,i})}{C_{q_n}(\alpha_{q_n,i})}\right|$ converge vers l'unité.

En effet, nous avons:

$$C_{q_n}(\zeta_{q_n,i}) = C_{q_n}(\alpha_{q_n,i}) + (\zeta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}) C'_{q_n}(\zeta'_{q_n,i}),$$

$\zeta'_{q_n,i}$ étant un nombre de l'intervalle $(\zeta_{q_n,i}, \alpha_{q_n,i})$ et par suite:

$$(19) \qquad \left|\frac{C_{q_n}(\zeta_{q_n,i})}{C_{q_n}(\alpha_{q_n,i})}\right| = \left|\pm 1 + \frac{(\zeta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}) C'_{q_n}(\zeta'_{q_n,i})}{C_{q_n}(\alpha_{q_n,i})}\right|.$$

Or

$$|C_{q_n}(\alpha_{q_n,i})| = e^{-h_{q_n,i} q_n \log q_n}$$

avec $\lim\limits_{q_n+i=\infty} h_{q_n,i} = 0$ d'après la fin de IV,

$$|\zeta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}| = e^{-hq_n \log q_n}, \qquad |C'_{q_n}(\zeta'_{q_n,i})| = e^{-h'_{q_n,i} q_n \log q_n}$$

avec $\underline{\lim}_{q_n+i=\infty} h'_{q_n,i} = 0$ d'après une démonstration analogue à celle du n° 44. Donc:

$$\frac{|\zeta_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}|\,|C'_{q_n}(\zeta'_{q_n,i})|}{|C_{q_n}(\alpha_{q_n,i})|} = e^{-(h + h'_{q_n,i} - h_{q_n,i}) q_n \log q_n},$$

ce qui nous montre que le premier membre de l'égalité précédente converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n + i}$. Par suite, d'après l'égalité (19) le rapport $\left|\frac{C_{q_n}(\zeta_{q_n,i})}{C_{q_n}(\alpha_{p_n,i})}\right|$ convergera vers l'unité.

On verrait de même que l'on a

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log |G'_{q_n}(\zeta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} = 0.$$

46. Nous sommes maintenant en état de déterminer une valeur approchée de la longueur des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ pour des valeurs de q_n suffisamment grandes. D'après I, chaque segment $\gamma^k_{q_n,i}$ pour des valeurs de q_n supérieures à Q_k, ne comprendra à son intérieur qu'un seul zéro $x = \alpha_{q_n,i}$ de $G_{q_n}(x)$. Désignons par $e^{-k^d_{q_n,i} q_n \log q_n}$ la longueur de la portion du segment $\gamma^k_{q_n,i}$ située à droite du point $x = \alpha_{q_n,i}$ et par $e^{-k^g_{q_n,i} q_n \log q_n}$ la longueur de la portion du même segment située à gauche du point $x = \alpha_{q_n,i}$. *Je dis que l'ensemble des nombres $k^d_{q_n,i}$ et $k^g_{q_n,i}$ admet k comme élément limite unique.*

Admettons qu'il n'en soit pas ainsi et supposons par exemple que la suite des nombres $k^d_{q_n,i}$ possède un élément limite k'' différent de k. Nous supposerons pour fixer les idées $k'' < k$. Soit η un nombre positif tel que $k - \eta > k''$. Il existera alors une infinité de valeurs de q_n:

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots, \quad p_n, \quad \dots$$

telles que l'on ait :

$$k^d_{p_n,i} < k - \eta.$$

Ceci posé, désignons par $x = \zeta_{p_n,i}$ le point du segment AB situé à droite du point $x = \alpha_{q_n,i}$ et dont la distance à ce dernier point soit égale à $e^{-(k-\eta)p_n \log p_n}$. De la relation :

$$\frac{-\log |G_{p_n}(\zeta_{p_n,i})|}{p_n \log p_n} = \frac{-\log |\alpha_{p_n,i} - \zeta_{p_n,i}|}{p_n \log p_n} - \frac{\log |C_{p_n}(\zeta_{p_n,i})|}{p_n \log p_n}$$

nous déduisons, en tenant compte de V,

$$\frac{-\log |G_{p_n}(\zeta_{p_n,i})|}{p_n \log p_n} = k - \eta + \varepsilon_{p_n,i} \qquad (\lim_{p_n+i=\infty} \varepsilon_{p_n,i} = 0).$$

Par suite, à partir d'une valeur de p_n suffisamment grande, nous aurons :

$$\frac{-\log |G_{p_n}(\zeta_{p_n,i})|}{p_n \log p_n} < k - \frac{\eta}{2}.$$

Il résulte de là que si l'ensemble des nombres $k^d_{p_n,i}$ admettait un élément limite k'' inférieur à k, il existerait, pour une infinité de valeurs de q_n, des points x d'un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ au moins pour lesquels on aurait

$$\frac{-\log |G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} < k,$$

ce qui est impossible, puisque, par définition, on a, en tout point x d'un segment $\gamma^k_{q_n,i}$, quelconque,

$$\frac{-\log|G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} \geq k.$$

On verrait d'une manière analogue que l'ensemble des nombres $k^d_{q_n,i}$ et $k^g_{q_n,i}$ ne peut admettre un élément limite supérieur à k.

47. La suite des nombres $k^d_{q_n,i}$ et $k^g_{q_n,i}$ convergeant vers k, au nombre positif k'' inférieur à k on peut faire correspondre un entier $Q_{k''}$ tel que, pour $q_n > Q_{k''}$, la longueur d'un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ soit moindre que $e^{-k'' q_n \log q_n}$, et cela quel que soit le second indice i.

Cette remarque faite, admettons que la suite des nombres

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \quad \ldots$$

vérifie la relation:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{q_{n+1}}{q_n} = m, \tag{20}$$

m étant une quantité positive finie. Désignons par p un nombre entier positif au moins égal à 4. Nous allons montrer qu'*à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande la $p^{\text{ième}}$ partie de la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_{n+1}}(x)$ est supérieure à la longueur d'un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ quelconque*. Posons, à cet effet,

$$\frac{|\alpha_{q_{n+1},i} - \alpha_{q_{n+1},i+1}|}{p} = e^{-h_{q_{n+1},i} q_{n+1} \log q_{n+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{q_{n+1}+i=\infty} h_{q_{n+1},i} = 0$, d'après n° 45, III, et que d'après notre hypothèse sur les q_n on a

$$\frac{q_n \log q_n}{q_{n+1} \log q_{n+1}} > \frac{1}{m'} \qquad (m' \text{ étant une quantité positive finie supérieure à } m),$$

nous pouvons déterminer un entier Q_k tel que l'on ait:

$$h_{q_{n+1},i} < \frac{k'' \, q_n \log q_n}{q_{n+1} \log q_{n+1}}, \tag{21}$$

k'' désignant une quantité positive inférieure à k, pour toutes les valeurs de q_n supérieures à Q_k et quel que soit l'indice i. L'inégalité précédente nous montre que, pour les valeurs de q_n considérées, la $p^{\text{ième}}$ partie de la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_{n+1}}(x)$ est supérieure à $e^{-k'' q_n \log q_n}$. D'autre part, d'après une remarque faite au début de ce n°, au nombre positif k'' correspond un entier $Q_{k''}$, tel que, pour $q_n > Q_{k''}$ et quel que soit i, on ait:

$$\text{longueur du segment } \gamma^k_{q_n,i} < e^{-k'' q_n \log q_n}.$$

Il en résulte donc que, pour toutes les valeurs de q_n supérieures au plus grand des deux nombres Q_k et $Q_{k''}$, la $p^{\text{ième}}$ partie $(p > 4)$ de la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_{n+1}}(x)$ est supérieure à la longueur d'un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ quelconque.

48. Désignons par M_k l'ensemble des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n,i}$. *Cet ensemble M_k est au plus dénombrable.* En effet, d'après le résultat du n° précédent, à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande, un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ a une partie commune avec un segment $\gamma^k_{q_{n+1},h}$ au plus. Par suite (cfr. n° 39) l'ensemble M_k est au plus dénombrable.

Comme le résultat du n° précédent subsiste quel que petit que soit le nombre positif k, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si les indices q_n des polynômes $G_{q_n}(x)$ de la suite (G) vérifient la relation (20) *et si le nombre k_{q_n} défini au* n° 44 *converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$, l'ensemble M_k des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ est au plus dénombrable et cela quel que petit que soit le nombre positif k.*

49. Désignons par $M_{k'}$ l'ensemble des points $x = \alpha$ de moindre croissance pour lesquels on a

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\alpha)|}{q_n \log q_n} \geqq k',$$

k' étant une quantité positive finie. Si k est une quantité positive inférieure à k', on aura, pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe et pour un point $x = \alpha$ de $M_{k'}$,

$$\frac{-\log|G_{q_n}(\alpha)|}{q_n \log q_n} > k.$$

Cette dernière inégalité a une interprétation géométrique très simple: elle signifie que pour chaque valeur de q_n supérieure à Q_k, le point $x = \alpha$ doit être intérieur au sens étroit à un segment $\gamma^k_{q_n,i}$.

Si M_k a la même signification qu'au n° 48, la remarque que nous venons de faire montre que tout point de $M_{k'}$ fait partie de M_k. Comme M_k peut contenir des points $x = \beta$ pour lesquels on a

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\beta)|}{q_n \log q_n} = k'',$$

k'' étant une quantité positive vérifiant la double inégalité:

$$k' > k'' \geqq k,$$

nous aurons:

$$M_k \geqq M_{k'},$$

ce qui nous montre que la puissance de l'ensemble $M_{k'}$ est au plus égale à la puissance de l'ensemble M_k. Par suite, en tenant compte de la proposition du n° précédent, nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Si les indices q_n des polynômes $G_{q_n}(x)$ vérifient la relation (20) *et si le nombre k_{q_n} défini au* n° 44 *converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$, l'ensemble $M_{k'}$ est au plus dénombrable.*

Soit

$$(k') \qquad k'_1, \ k'_2, \ \dots, \ k'_i, \ \dots$$

une suite décroissante de quantités positives telles que $\lim\limits_{i=\infty} k'_i = 0$. Désignons par $M_{k'_i}$ l'ensemble des points de moindre croissance $x = \alpha_i$ tels que

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\alpha_i)|}{q_n \log q_n} = k' \qquad (k_{i-1} > k' \geqq k_i).$$

Nous allons montrer *que l'on a*

$$N_x = M_{k'_1} + M_{k'_2} + \cdots + M_{k'_i} \ldots,$$

N_x étant l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$. En effet, soit $x = \alpha_i$ un point de l'ensemble $M_{k'_i}$; comme l'on a, en ce point,

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\alpha_i)|}{q_n \log q_n} = k' \qquad (k_{i-1} > k' \geqq k_i),$$

ce point fait partie de N_x. Inversement, soit $x = \alpha$ un point de N_x; il existe par définition une quantité positive k' telle que l'on ait:

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|G_{q_n}(\alpha)|}{q_n \log q_n} = k'.$$

Par suite, si k' vérifie la double inégalité:

$$k'_{i-1} > k' \geqq k'_i,$$

le point $x = \alpha$ appartiendra à l'ensemble $M_{k'_i}$.

Comme, moyennant les hypothèses énoncées dans le résultat précédent et en vertu de ce résultat, chaque ensemble $M_{k'_i}$ est au plus dénombrable, il en sera de même de l'ensemble N_x et nous obtenons le théorème suivant:

Si les indices q_n des polynômes $G_{q_n}(x)$ vérifient la relation (20) *et si le nombre k_{q_n} défini au* n° 44 *converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$, l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite de polynômes $G_{q_n}(x)$ est au plus dénombrable.*

50. Considérons la suite (D) de polynômes:

$$D_{q_2}(x),\quad D_{q_3}(x),\ \ldots,\ D_{q_{n+1}}(x),\ \ldots,$$

où

$$D_{q_{n+1}}(x) = G_{q_n}(x)\, G_{q_{n+1}}(x).$$

Les zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$ appartenant à un intervalle fini AB de l'axe des x, il en est de même des zéros des polynômes $D_{q_{n+1}}(x)$. Soit $\psi(q_{n+1})$ le degré de $D_{q_{n+1}}(x)$; l'égalité:

$$\psi(q_{n+1}) = \varphi(q_n) + \varphi(q_{n+1})$$

nous montre que l'on a, pour toute valeur de q_n,

$$\psi(q_{n+1}) \leqq 2 q q_{n+1}.$$

On en conclut que la suite de polynômes (D) satisfait aux mêmes conditions que la suite de polynômes (G). Soit $h_{q_{n+1}}$ le nombre qui par rapport au polynôme $D_{q_{n+1}}(x)$ est identique au nombre k_{q_n} par rapport au polynôme $G_{q_n}(x)$. Il résulte de ce qui précède, que, si $h_{q_{n+1}}$ converge vers zéro avec $\frac{1}{q_{n+1}}$, nous pouvons appliquer à la suite de polynômes (D) tous les résultats du n° 45. En particulier, l'application du n° 45, III nous montre que la suite des nombres

$$\frac{-\log|\alpha_{q_n,i}-\alpha_{q_{n+1},l}|}{q_{n+1}\log q_{n+1}} \quad [i=1,2,\ldots,\varphi(q_n), l=1,2,\ldots,\varphi(q_{n+1}); n=1,2,3,\ldots]$$

admettra zéro comme élément limite unique. Par suite, si nous supposons que la suite des nombres entiers q_n vérifie la relation (20), la suite des nombres

$$\frac{-\log|\alpha_{q_n,i}-\alpha_{q_{n+1},l}|}{q_n\log q_n} \quad [i=1,2,\ldots,\varphi(q_n), l=1,2,\ldots,\varphi(q_{n+1}), n=1,2,3,\ldots]$$

admettra également zéro comme élément limite unique. Si nous supposons également que le nombre k_{q_n} défini au n° 44 converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$ et si nous utilisons le résultat du n° 46, il résulte de ce qui précède qu'à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande, un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ quelconque n'aura aucune portion commune, ni extrémités communes avec un segment $\gamma^k_{q_{n+1},h}$ quelconque et cela quel que petit que soit le nombre positif k. Par suite, l'ensemble M_k des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ ne renfermera aucun point et cela quel que petit que soit le nombre positif k. Il en sera de même de l'ensemble $M_{k'}$ et cela quel que petit que soit le nombre positif k' et continuant comme au n° précédent, nous obtenons le théorème suivant:

Si les indices q_n des polynômes $G_{q_n}(x)$ vérifient la relation (20) *et si les nombres k_{q_n} et $h_{q_{n+1}}$ convergent vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$, l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ ne renfermera aucun point.*

51. Avant de donner des exemples, nous établirons la propriété suivante:

Si à partir d'une certaine valeur de q_n, la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_n}(x)$ est supérieure à $\frac{h}{q_n}$, h étant une quantité positive finie, la suite des nombres k_{q_n} admet zéro comme élément limite unique. En effet, désignons par $\beta'_{q_n,i}$ l'abscisse du point milieu de l'intervalle dont les extrémités ont respectivement pour abscisses $x=\alpha_{q_n,i}$ et $x=\alpha_{q_n,i-1}$, nous aurons évidemment à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande:

$$|\beta'_{q_n,i}-\alpha_{q_n,i+1}|>\frac{h}{q\,q_n}, \quad |\beta'_{q_n,i}-\alpha_{q_n,i+2}|>\frac{2h}{q\,q_n}, \ldots, \quad |\beta'_{q_n,i}-\alpha_{q_n,i-2}|>\frac{h}{q\,q_n},$$

d'où l'on déduit aisément:

$$|G_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|>\frac{h^{\varphi(q_n)}(q\,q_n!)}{(q\,q_n)^{q q_n}}.$$

Comme cette dernière inégalité, pour une même valeur de l'indice q_n est indépendante du second indice i, on en déduit, en utilisant une formule d'approximation de $n!$, que la plus grande limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log |G_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|}{q_n \log q_n}$ est au plus égale à zéro. Il en sera de même de la plus grande limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n}$ puisque :

$$|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})| \geqq |G_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|.$$

Comme $\lim\limits_{q_n+i=\infty} \dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n} \geqq 0$ (cfr. n° 44), il en résulte que la suite des nombres $\dfrac{-\log G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme élément limite unique. Par suite k_{q_n}, qui est égal au plus grand des nombres $\dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n}$ pour lesquels le premier indice est q_n, converge vers zéro avec $\dfrac{1}{q_n}$.

On verrait de même que k_{q_n} converge vers zéro avec $\dfrac{1}{q_n}$ si tout intervalle $(\alpha_{q_n,i}, \alpha_{q_n,i-1})$ de longueur supérieure à $\dfrac{h}{q_n}$ est suivi d'un nombre fini au plus égal à un entier fixe q d'intervalles $(\alpha_{q_n,i+1}, \alpha_{q_n,i})$ dont la longueur soit moindre que $\dfrac{h}{q_n}$, mais supérieure à $e^{-h_{q_n} q_n \log q_n}$ avec $\lim\limits_{q_n=\infty} h_{q_n} = 0$.

52. *Exemples.* — I. Considérons la suite de polynômes

$$G_2(x), \quad G_3(x), \ \dots, \ G_n(x), \ \dots,$$

où

$$G_n(x) = (x - \alpha_{n,1})(x - \alpha_{n,2}) \dots (x - \alpha_{n,n-1})$$

avec

$$\alpha_{n,i} = \frac{i}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Tous les zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$ ainsi définis appartiendront à l'intervalle $(0 - 1)$ et de plus tous les points de ce segment seront des points limites réguliers de l'ensemble de ces zéros. D'après la proposition établie au n° précédent, la suite des nombres k_{q_n} correspondant à la suite des polynômes considérés admettra zéro comme élément limite unique.

Ceci étant, chaque intervalle $(\alpha'_{n,i-1}, \alpha'_{n,i})$ séparant deux zéros consécutifs du produit $G_{q_n}(x)\,G_{q_{n+1}}(x)$ de longueur supérieure à $\dfrac{h}{n+1}$ $(h > 0)$ étant suivi d'un intervalle $(\alpha'_{n,i}, \alpha'_{n,i+1})$ séparant également deux zéros consécutifs du produit $G_{q_n}(x)\,G_{q_{n+1}}(x)$ de longueur moindre que $\dfrac{h}{n+1}$, mais supérieure à $\dfrac{1}{(n+1)^2}$, d'après la fin du n° 51, la suite des nombres h_{n+1} définis au n° 50 converge vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$. Par suite (cfr. n° 50) l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite de polynômes considérés ne renfermera aucun point.

II. Supposons maintenant que $G_n(x)$ admette comme zéro les n premiers nombres de la suite infinie :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

et ceux-là seulement. Tous les points du segment $0 - 1$ d'abscisses rationnelles (les points 0 et 1 étant exclus) sont des points de moindre croissance, puisque pour l'un quelconque de ces points $x = \alpha_p$, on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\frac{-\log |G_n(\alpha_p)|}{n \log n} = +\infty.$$

De plus, la considération des segments $\gamma^k_{n,i}$ nous permet de constater qu'il n'y a pas d'autres points de moindre croissance.

III. Partageons le segment $0 - 1$ en deux parties égales, puis chacune de ces parties en deux autres parties égales et ainsi de suite indéfiniment. Considérons la suite de polynômes

$$G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}(x), \ldots, G_{q_n}(x), \quad \ldots,$$

le polynôme $G_{q_n}(x)$ admettant comme zéros les points de la $n^{\text{ième}}$ division ne faisant pas partie de la $(n-1)^{\text{ième}}$. Le degré de ces polynômes $G_{q_n}(x)$ ainsi définis sera pour chaque valeur de l'indice q_n évidemment inférieur à q_n, si nous posons $q_n = 2^n$. Alors la limite du rapport $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ sera égale à 2, puisque l'on a, pour chaque valeur de l'indice n, $\frac{q_{n+1}}{q_n} = 2$. Comme $|\alpha_{q_n, i-1} - \alpha_{q_n, i}| > \frac{1}{q_n}$ (cfr. n° 51), la suite des nombres k_{q_n} correspondant à la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ considérés admettra zéro comme élément limite unique. D'autre part, comme l'intervalle séparant deux zéros consécutifs quelconques du produit $G_{q_n}(x)\, G_{q_{n+1}}(x)$ a une longueur au moins égale à $\frac{1}{q_{n+1}}$ (cfr. n° 51), la suite des nombres $h_{q_{n+1}}$ définis au n° 50 admettra également zéro comme élément limite unique. Par suite (cfr. n° 50) l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite de polynômes considérés ne renfermera aucun point.

IV. Supposons maintenant que $G_{q_n}(x)$ admette comme zéros tous les points de la $n^{\text{ième}}$ division et ceux-là seulement, l'indice q_n ayant la même valeur que dans l'exemple précédent. On aura encore $\lim\limits_{q_n = \infty} k_{q_n} = 0$. Tout point d'abscisse $x = \frac{p}{2^h}$ appartenant à l'intervalle $0 - 1$, extrémités exclues, sera un point de N_x. En effet, en un tel point on a, à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande,

$$\frac{-\log \left| G_{q_n}\left(\frac{p}{2^h}\right) \right|}{q_n \log q_n} = +\infty$$

et la considération des segments $\gamma^k_{q_n, i}$ nous permet de voir que l'ensemble N_x ne renferme pas d'autres points.

Remarque. — Les ensembles de points de moindre croissance des exemples II et IV sont des ensembles dénombrables partout denses dans le segment $0 - 1$.

53. En restant toujours dans l'hypothèse où la suite des nombres k_{q_n} définis au n° 44 admet zéro comme élément limite unique, supposons que la plus grande limite de la suite des nombres $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ soit infinie. Nous allons montrer que, dans ces hypothèses, l'ensemble des points de moindre croissance de la suite de polynômes (G) peut avoir la puissance du continu. A cet effet, nous allons montrer qu'il est toujours possible de construire une suite de polynômes

$$G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}, \ldots, G_{q_n}(x), \quad \ldots,$$

telle que $\overline{\lim}_{q_n=\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \infty$ et jouissant en outre des propriétés suivantes: 1° tous les zéros de ces polynômes appartiennent à un intervalle fini AB de l'axe des x; 2° le degré de $G_{q_n}(x)$ est inférieur à q_n; 3° la suite des nombres k_{q_n} correspondant à cette suite de polynômes admet zéro comme élément limite unique; 4° si k est une quantité positive inférieure à l'unité, l'ensemble M_k des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n, i}$ a la puissance du continu. Nous nous placerons, pour simplifier, uniquement dans le cas où la suite des nombres $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ est une suite constamment croissante admettant $+\infty$ comme élément limite unique. Alors, si nous posons

$$q_n = q_{n-1}\Theta_n,$$

la suite des nombres Θ_n sera une suite constamment croissante convergeant vers $+\infty$. Par conséquent, si λ_n est l'exposant de la plus haute puissance de 2 contenue dans Θ_n, la suite des nombres λ_n sera non décroissante. De plus, nous pouvons admettre que q_1 a été choisi suffisamment grand, pour que l'on ait, quel que soit q_n,

$$e^{-q_n \log q_n} > 8\, e^{-2q_n \log q_n}.$$

Ceci étant, soit λ_{p_1} le plus petit des nombres λ_n vérifiant la relation $\lambda_n \geqq 1$, et $x = \alpha_{q_{p_1}}$ un point de l'axe Ox situé à distance finie. Portons de part et d'autre de ce point une longueur égale à $\frac{e^{-q_{p_1} \log q_{p_1}}}{2}$, nous obtiendrons un segment $e_{q_{p_1}}$ dont la longueur sera égale à $e^{-q_{p_1} \log q_{p_1}}$. Soit λ_{p_2} le plus petit nombre de la suite des λ_n distinct de λ_{p_1} et vérifiant la relation: $\lambda_n \geqq 2$. Nous déterminerons deux points $x = \alpha_{q_{p_2}, 1}$ et $x = \alpha_{q_{p_2}, 2}$ à l'intérieur du segment $e_{q_{p_1}}$ tels que la distance de chacun d'eux à l'extrémité la plus voisine du segment $e_{q_{p_1}}$ soit égale à $e^{-q_{p_2} \log q_{p_2}}(1 + \eta)$ (η étant une quantité positive inférieure à l'unité). D'après notre hypothèse sur les q_n, la distance entre ces deux points sera supérieure à $4 e^{-2q_{p_1} \log q_{p_1}}$. Alors, si nous portons de part et d'autre de ces points une longueur égale à $\frac{e^{-q_{p_2} \log q_{p_2}}}{2}$, nous obtiendrons deux segments $e_{q_{p_2}, 1}$ et $e_{q_{p_2}, 2}$ sans partie ni extrémités communes, et la distance entre les extrémités les plus voisines de ces segments sera supérieure à $2 e^{-2q_{p_1} \log q_{p_1}}$. De plus, ces deux segments seront intérieurs au sens étroit au segment $e_{q_{p_1}}$. En continuant ainsi indéfiniment, nous formerons d'une part une suite de nombres $\alpha_{q_{p_h},i}$ à deux indices, le nombres des $\alpha_{q_{p_h},i}$ ayant q_{p_h} pour premier indice étant égal à $2^{h-1} \leqq \Theta_{p_{h-1}}$, par suite moindre que Θ_{p_h}, et la longueur de l'intervalle $(\alpha_{q_{p_h},i}, \alpha_{q_{p_h},k})$ séparant deux nombres $\alpha_{q_h,i}$ et $\alpha_{q_{p_h},k}$ quelconques étant supérieure à $4e^{-2q_{p_{h-1}}\log q_{p_{h-1}}}$; et d'autre part une suite de segments à deux indices $e_{q_{p_h},i}$ telle que chaque segment $e_{q_{p_h},i}$ comprenne à son intérieur au sens étroit deux segments $e_{q_{p_{h+1}},k}$ et $e_{q_{p_{h+1}},l}$ et la longueur de l'intervalle séparant deux segments $e_{q_{p_h},i}$ et $e_{q_{p_h},l}$ consécutifs étant supérieure à $2e^{-2q_{p_{h-1}}\log q_{p_{h-1}}}$.

Ceci posé, nous définirons les polynômes $G_{q_n}(x)$ de la façon suivante: $G_{q_n}(x)$ admettra pour zéros les nombres $\alpha_{q_{p_h},i}$ pour lesquels le premier indice est égal à q_{p_h} et ceux-là seulement si q_n vérifie la relation:

$$q_{p_{h-1}} < q_n \leqq q_{p_h}.$$

Par suite, le degré de $G_{q_n}(x)$ sera inférieur à q_n et tous ses zéros appartiendront à un intervalle fini AB de Ox. Je dis, en outre, que la suite des nombres k_{q_n} correspondant à la suite de polynômes précédemment définis admet zéro comme élément limite unique. En effet, soit $x = \beta'_{q_n,i}$ l'abscisse du point milieu de l'intervalle dont les extrémités ont respectivement pour abscisses $x = \alpha_{q_n,i}$ et $x = \alpha_{q_n,i-1}$; $\alpha_{q_n,i-1}$ et $\alpha_{q_n,i}$ désignant deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_n}(x)$. Nous aurons évidemment, d'après la façon même dont nous avons défini les zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$ et d'après ce qui a été dit plus haut:

$$-\log|\beta'_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i}| < 2q_{n-1}\log q_{n-1}, \qquad -\log|\beta'_{q_n,i} - \alpha_{q_n,i-1}| < 2q_{n-1}\log q_{n-1}$$

et pour tout autre zéro $\alpha_{q_n,h}$ de $G_{q_n}(x)$ distinct de $\alpha_{q_n,i}$ et $\alpha_{q_n,i-1}$:

$$-\log|\beta'_{q_n,i} - \alpha_{q_n,h}| < 2q_{n-2}\log q_{n-2}.$$

Par suite, il viendra, en observant que le nombre des zéros de $G_{q_n}(x)$ ne dépasse pas Θ_n:

$$\frac{-\log|A_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|}{q_n\log q_n} < \frac{4q_{n-1}\log q_{n-1}}{q_n\log q_n} + \frac{2\Theta_n q_{n-2}\log q_{n-2}}{q_n\log q_n} = \frac{4q_{n-1}\log q_{n-1}}{q_n\log q_n} + \frac{2q_{n-2}\log q_{n-2}}{q_{n-1}\log q_{n-1}};$$

d'où l'on conclut que la plus grande limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|}{q_n\log q_n}$ est au plus égale à zéro, puisque d'après l'une de nos hypothèses le rapport $\dfrac{q_{n-2}\log q_{n-2}}{q_{n-1}\log q_{n-1}}$ converge vers zéro avec $\dfrac{1}{q_n}$. Comme $|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})| \geqq |G_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|$, la plus grande limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n\log q_n}$ sera au plus égale à zéro. D'autre part (cfr. n° 44), on a $\lim\limits_{q_n+i=\infty} \dfrac{-\log|G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n\log q_n} \geqq 0$. Il en résulte que la suite des nombres $\dfrac{-\log |G_{q_n}(\beta_{q_n,i})|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme élément limite unique. Il en sera de même de la suite des nombres k_{q_n} d'après leur définition donnée au n° 44.

Soit k une quantité positive inférieure à l'unité; un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ comprendra à son intérieur au sens étroit un segment $e_{q_{p_h},i}$ pour toutes les valeurs de q_n vérifiant la relation:

$$q_{p_{h-1}} < q_n \leqq q_{p_h}.$$

Il en résulte que l'ensemble M_k des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ comprendra tous les points de l'ensemble M' des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $e_{q_{p_h},i}$. Comme chaque segment $e_{q_{q_h},i}$ comprend à son intérieur au sens étroit deux segments $e_{q_{p_{h+1}},l}$ et $e_{q_{p_{h+1}},j}$, M' aura la puissance du continu (cfr. n° 41). Il en sera de même de l'ensemble M_k et par suite de l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite de polynômes considérés, puisque l'on a $N_x \geqq M_k$.

54. Il résulte en particulier de ce qui précède, que l'ensemble N_x peut avoir la puissance du continu lorsque les indices q_n vérifient les relations:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \infty, \qquad \overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m',$$

m' étant une quantité positive finie. En nous plaçant dans cette dernière hypothèse, nous allons déterminer un cas pour lequel on peut affirmer que cet ensemble N_x est au plus dénombrable, en admettant toujours que la suite des nombres k_{q_n} admet zéro comme élément limite unique. Désignons, à cet effet, par m_{q_n} le minimum des longueurs des intervalles séparant les zéros de $G_{q_n}(x)$. Il peut arriver qu'il existe une quantité positive $\varkappa$ telle que l'on ait

$$m_{q_n} > \frac{1}{q_n^\varkappa}$$

à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande. Dans ce cas l'inégalité (21) sera satisfaite à partir d'une certaine valeur de q_n. Continuant comme aux n^os 48-49, on obtient le théorème suivant:

Si l'ensemble des nombres k_{q_n} définis au n° 44 *admet zéro comme élément limite unique, l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ sera au plus dénombrable, si l'on suppose en outre:*

$$m_{q_n} > \frac{1}{q_n^\varkappa} \quad (\textit{à partir d'une certaine valeur de } q_n), \qquad \overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m',$$

$\varkappa$ et m' étant des quantités positives finies.

Designons par $n_{q_{n+1}}$ le minimum des longueurs des intervalles séparant les zéros du produit $G_{q_n}(x)\,G_{q_{n+1}}(x)$, et supposons que l'on ait, à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande:

$$n_{q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n+1}^{\varkappa}},$$

$\varkappa$ étant une quantité positive. Nous en déduisons, en tenant compte de la relation $\overline{\lim\limits_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m'$,

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|\alpha_{q_n,i} - \alpha_{q_{n+1},l}|}{q_n \log q_n} = 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, \varphi(q_n), \quad l = 1, 2, \ldots, \varphi(q_{n+1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots];$$

et par suite, à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande, un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ quelconque n'aura aucune portion, ni extrémités, communes avec un segment $\gamma^k_{q_{n+1},h}$ quelconque. L'ensemble M_k ne renfermera aucun point et cela quel que petit que soit le nombre positif k. Il en résulte donc que l'ensemble N_x ne contiendra aucun point et nous obtenons le théorème suivant:

Si l'ensemble des nombres k_{q_n} définis au n° 44 *admet zéro comme élément limite unique, l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ ne renfermera aucun point si l'on suppose en outre:*

$$n_{q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n+1}^{\varkappa}} \quad \text{à partir d'une certaine valeur de } q_n, \qquad \overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m',$$

$\varkappa$ et m' étant des quantités positives finies.

Exemple. — Désignons par q_n le plus grand nombre entier contenu dans e^{n^2}; nous aurons évidemment:

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1.$$

Ceci étant, admettons que $G_{q_n}(x)$ possède comme zéros toutes les fractions irréductibles ayant q_n comme dénominateur et ceux-là seulement. La suite des nombres k_{q_n} correspondant à la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ ainsi définis admettra zéro comme élément limite unique (cfr. n° 51). D'autre part nous avons:

$$n_{q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n+1}^{2}}.$$

Par suite, d'après le théorème précédent l'ensemble N_x ne renfermera aucun point.

55. Admettons que tous les points du segment AB soient des points limites réguliers de l'ensemble des zéros de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$. Alors, si M_{q_n} est le maximum de la longueur des intervalles séparant deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_n}(x)$, nous aurons $\lim\limits_{q_n=\infty} M_{q_n} = 0$. Ceci étant, *nous allons montrer que l'ensemble N_x a effectivement la puissance du continu, si la suite des nombres k_{q_n} admet zéro comme élément limite unique et s'il existe deux quantités positives $\varkappa$ ($\varkappa < 1$) et h telles que l'on ait:*

$$M_{q_n} < \frac{1}{q_n^{\varkappa}} \quad \text{et} \quad \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} > h\, q_n$$

à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande.

Soit k une quantité positive moindre que $h\varkappa$, et q un nombre positif quelconque que nous supposerons au moins égal à 3. Nous pourrons, d'après notre hypothèse, déterminer un entier Q, tel que pour $q_n > Q$ on ait:

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} > \frac{\log q}{\varkappa \log q_n} + \frac{k q_n}{\varkappa}$$

et par suite:

$$e^{-kq_n \log q_n} > \frac{q}{q_{n+1}^{\varkappa}}.$$

Cette dernière inégalité nous montre que, pour ces valeurs de q_n, le segment $\gamma^k_{q_n, i}$ comprendra à son intérieur au sens étroit au moins quatre zéros de $G_{q_{n+1}}(x)$ et cela quel que soit le second indice i. Comme (cfr. n° 45, I) un segment $\gamma^k_{q_{n+1}, i}$ ne comprend à son intérieur qu'un seul zéro de $G_{q_{n+1}}(x)$ si q_{n+1} est suffisamment grand, le segment $\gamma^k_{q_n, i}$ comprendra donc au moins deux segments $\gamma_{q_{n+1}, h}$ et $\gamma_{q_{n+1}, l}$ à son intérieur au sens étroit, et cela à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande et quel que soit l'indice i. Par suite (cfr. n° 41) l'ensemble M_k des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n, i}$ a la puissance du continu. Il en sera de même de l'ensemble $N_\varkappa$ puisque $N_\varkappa \geqq M_k$.

Remarque. — Le nombre positif $\varkappa$ de l'énoncé du théorème précédent doit être supposé au plus égal à 1. Car, si $\varkappa$ était supérieur à 1, la distance entre les deux zéros extrêmes de $G_{q_n}(x)$ convergerait vers zéro, comme on le constate aisément en tenant compte de l'hypothèse $\varphi(q_n) \leqq q q_n$ (q étant un nombre entier fixe). Par suite, l'ensemble des points limites réguliers de l'ensemble des zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$ admettrait au plus un point ce qui est contraire à l'une de nos hypothèses: à savoir que tous les points du segment AB sont des points limites réguliers.

Exemple. — Considérons la suite de polynômes

$$G_{q_1}(x), \quad G_{q_2}(x), \ldots, G_{q_n}(x), \quad \ldots,$$

où $G_{q_n}(x)$ admet comme zéros toutes les fractions qui ont q_n comme dénominateur. Si nous posons $q_n = e_{n^2}[n]$, nous aurons, à partir d'une certaine valeur de q_n,

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} > q_n.$$

Comme la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de $G_{q_n}(x)$ est égale à $\frac{1}{q_n}$, l'ensemble $N_\varkappa$ aura la puissance du continu d'après le théorème précédent.

56. Soient $G'_{q_n}(x)$ et $G''_{q_n}(x)$ les dérivées du premier et du second ordre de $G_{q_n}(x)$. Désignons par $\beta'_{q_n, i}$ la racine de l'équation $G''_{q_n}(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $(\beta_{q_n, i-1}, \beta_{q_n, i})$. Nous allons montrer que, *si la suite des nombres* k_{q_n} *définis au* n° 44 *admet zéro comme élément limite unique, la suite des nombres* $\frac{-\log |G'_{q_n}(\beta'_{q_n, i})|}{q_n \log q_n}$ *admettra également zéro comme élément limite unique.*

En effet (cfr. n° 45, V), si $x=\xi_{q_n,i-1}$ est un point dont la distance au point $x=\alpha_{q_n,i-1}$ est égale à $e^{-hq_n\log q_n}$ (h étant une quantité positive quelconque) et appartenant à l'intervalle $(\beta_{q_n,i-1}, \beta_{q_n,i})$, la suite des nombres $\dfrac{-\log|G'(\xi_{q_n,i-1})|}{q_n\log q_n}$ admet zéro comme élément limite unique. Il en sera de même de la suite des nombres $\dfrac{-\log|G'(\beta'_{q_n,i})|}{q_n\log q_n}$, puisque d'une part on a:

$$|G'_{q_n}(\beta'_{q_n,i})| \geqq |G'_{q_n}(\xi_{q_n,i-1})|$$

et d'autre part (cfr. n° 44):

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|G'_{q_n}(\beta'_{q_n,i})|}{q_n\log q_n} \geqq 0.$$

Par suite, si nous posons:

$$|G'_{q_n}(\beta'_{q_n,3})| = e^{-k^{(1)}_{q_n,3}q_n\log q_n}, \ldots, |G'_{q_n}(\beta'_{q_n,\varphi(q_n)})| = e^{-k^{(1)}_{q_n,\varphi(q_n)}q_n\log q_n},$$

l'ensemble des nombres $k^{(1)}_{q_n,i}$ admet zéro comme élément limite unique. Il en sera de même de la suite des nombres $k^{(1)}_{q_n}$, $k^{(1)}_{q_n}$ étant le plus grand des nombres $k^{(1)}_{q_n,i}$ ayant q_n pour premier indice.

Ceci étant, considérons la suite de polynômes

$$G'_{q_1}(x),\quad G'_{q_2}(x), \ldots, G'_{q_n}(x), \ldots$$

se déduisant de la suite (G) du n° 44 en remplaçant chaque polynôme $G_{q_n}(x)$ par son dérivé. Cette suite de polynômes $G'_{q_n}(x)$ satisfait aux mêmes conditions que la suite de polynômes (G). Puisque dans l'hypothèse où $\lim\limits_{q_n=\infty} k_{q_n}=0$ on a d'après ce qui précède $\lim\limits_{q_n=\infty} k^{(1)}_{q_n}=0$, tout ce que nous avons dit aux n^os^ 45-55 au sujet des polynômes $G_{q_n}(x)$ s'applique également aux polynômes $G'_{q_n}(x)$. En particulier, si nous désignons par $\gamma^{k,1}_{q_n,i}$ le segment comprenant le point $x=\beta_{q_n,i}$ à son intérieur et en tout point duquel on a

$$\frac{-\log|G'_{q_n}(x)|}{q_n\log q_n} \geqq k,$$

on aura à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande, en désignant par k'' un nombre positif moindre que k,

$$\text{longueur du segment } \gamma^k_{q_n,i} < e^{-k''q_n\log q_n}.$$

Comme (cfr. n° 45, III)

$$\lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|\alpha_{q_n,i-1}-\beta_{q_n,i}|}{q_n\log q_n}=0, \qquad \lim_{q_n+i=\infty} \frac{-\log|\alpha_{q_n,i}-\beta_{q_n,i}|}{q_n\log q_n}=0,$$

il en résulte, en tenant compte du résultat du n° 46 et de ce qui précède, qu'il existe un entier Q_k tel que pour $q_n > Q_k$, un segment $\gamma^k_{q_n,i}$ quelconque n'ait aucune partie, ni extrémités, communes avec un segment $\gamma^{k,1}_{q_n,i}$ quelconque. Soient M_k l'ensemble des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n,i}$, et $M^{(1)}_k$ l'ensemble des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^{k,1}_{q_n,i}$, *ces deux ensembles n'auront aucun point commun si* k_{q_n} *converge vers zéro avec* $\frac{1}{q_n}$. Car si ces deux ensembles avaient un point commun, il en résulterait que, pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe, il y aurait au moins un segment $\gamma^{k}_{q_n,i}$ ayant une partie commune avec un segment $\gamma^{k,1}_{q_n,i}$, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Comme ceci a lieu quel que petit que soit le nombre positif k, on en conclut que l'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ n'a aucun point commun avec l'ensemble $N^{(1)}_x$ des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G'_{q_n}(x)$. Donc:

Si k_{q_n} *converge vers zéro avec* $\frac{1}{q_n}$, *l'ensemble* N_x *des points de moindre croissance de la suite des polynômes* $G_{q_n}(x)$ *n'a aucun point commun avec l'ensemble* $N^{(1)}_x$ *des points de moindre croissance de la suite des polynômes* $G'_{q_n}(x)$.

Sur la mesure de l'ensemble N_x.

57. Soit AB le segment de l'axe des x renfermant à son intérieur tous les zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$ considérés au n° 44, les points A et B ayant respectivement pour abscisses a et b $(a < b)$. Les points du segment AB pour lesquels on a

$$\frac{-\log|G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} \geqq k$$

$(k > 0)$ constituent des segments $\gamma^{k}_{q_n,i}$ en nombre au plus égal à $\varphi(q_n)$ sans parties communes et ayant respectivement pour extrémités les points dont les abscisses sont les racines de l'équation $\frac{-\log|G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} = k$. Soit σ_{q_n} la somme totale des longueurs de ces segments, *je dis que* σ_{q_n} *converge vers zéro avec* $\frac{1}{q_n}$. Nous remarquons à cet effet que l'intégrale $I = -\int^{b} \log|x-\alpha|\,dx$ étant une fonction continue de α dans l'intervalle AB, extrémités comprises, admet un minimum m et un maximum M dans cet intervalle. Par suite, si nous posons

$$I_{q_n} = -\int_a^b \frac{\log|G_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n}\,dx,$$

nous aurons

$$\frac{m\,\varphi(q_n)}{q_n \log q_n} < I_{q_n} < \frac{M\,\varphi(q_n)}{q_n \log q_n},$$

ce qui nous montre que I_{q_n} converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$, en tenant compte de la relation: $\varphi(q_n) < q q_n$.

Cette remarque faite, admettons que la suite des nombres σ_{q_n} admette un élément limite σ différent de zéro. Il existera alors une infinité de valeurs de q_n:

$$p_1, \quad p_2, \ldots, p_n, \quad \ldots$$

telles que l'on ait

$$\sigma_{p_n} > \frac{\sigma}{2}.$$

Ceci étant, nous remarquons que l'on peut écrire:

$$I_{p_n} = -\int_{\sigma_{p_n}} \frac{\log |G_{p_n}(x)|}{p_n \log p_n} dx - \int_{AB-\sigma_{p_n}} \frac{\log |G_{p_n}(x)|}{p_n \log p_n} dx.$$

La seconde des intégrales figurant dans le second membre de l'égalité précédente a pour limite zéro. On le voit en reprenant le raisonnement par lequel nous avons montré que I_{q_n} converge vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$. La première de ces intégrales est supérieure à $\frac{k\sigma}{2}$, quel que soit l'indice p_n.

Donc l'hypothèse que la suite des nombres σ_{q_n} a un élément limite différent de zéro a comme conséquence que l'ensemble des nombres I_{q_n} admet au moins un élément limite différent de zéro, ce qui est en contradiction avec la remarque faite plus haut. Il en résulte donc que $\lim_{q_n=\infty} \sigma_{q_n} = 0$. σ_{q_n} ayant pour limite zéro, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{q_n}$ peut être convergente ou divergente. Nous allons donner un exemple pour lequel ce dernier cas se présente. Posons

$$G_n(x) = (x - \alpha)^n;$$

la longueur du segment γ_n pour lequel on a

$$\frac{-\log |G_n(x)|}{n \log n} \geqq k$$

est égale à $\frac{2}{n^k}$; nous aurons donc ici:

$$\sigma_n = \frac{2}{n^k}.$$

Par suite, si k est inférieur à l'unité, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n$ sera divergente.

Soit M_k l'ensemble des points intérieurs au sens strict à l'ensemble des segments $\gamma^k_{q_n, i}$; M_k aura une mesure linéaire nulle (cfr. n° 43). Il en sera de même de l'ensemble $M_{k'}$ des points $x = \alpha$ de moindre croissance pour lesquels on a

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log |G_{q_n}(\alpha)|}{q_n \log q_n} \geqq k' \qquad (k' > k).$$

Comme k peut être pris arbitrairement petit, il en résulte que *l'ensemble $M_{k'}$ a une mesure linéaire nulle et cela quelque petit que soit le nombre positif k'.*

Ceci étant, soit

$$(k') \qquad k'_1, \quad k'_2, \quad \ldots, \quad k'_i, \quad \ldots,$$

une suite de quantités positives décroissantes, telles que $\lim\limits_{i=\infty} k'_i = 0$. Désignons par $M_{k'_i}$ l'ensemble des points $x = \alpha_i$ de moindre croissance vérifiant la relation:

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log |G_{q_n}(\alpha_i)|}{q_n \log q_n} = k' \qquad (k_{i-1} > k' \geqq k_i).$$

Nous avons vu (cfr. n° 49) que l'on a

$$N_x = M_{k'_1} + M_{k'_2} + \cdots + M_{k'_i} + \cdots.$$

Chacun des ensembles $M_{k'_i}$ ayant une mesure linéaire nulle d'après ce qui précède, l'ensemble N_x aura également une mesure linéaire nulle, puisque l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensemble de mesure linéaire nulle a également une mesure linéaire nulle. Donc:

L'ensemble N_x des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle.

58. La conclusion qui résulte de nos recherches au sujet de l'ensemble N_x est la suivante :

L'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle pouvant avoir la puissance du continu.

Cas où les zéros sont imaginaires.

59. Soit

$$(P) \qquad P_{q_1}(u), \quad P_{q_2}(u), \quad \ldots, \quad P_{q_n}(u), \quad \ldots,$$

où $P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \ldots (u - a_{q_n,\varphi(q_n)})$, une suite de polynômes de la variable complexe u satisfaisant aux conditions suivantes:

1° tous les zéros de ces polynômes appartiennent à un cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0;

2° si $\varphi(q_n)$ est le degré de $P_{q_n}(u)$ il existe un nombre entier q, tel que l'on ait pour toute valeur de q_n:

$$\varphi(q_n) \leqq q q_n.$$

Ceci posé, désignons par E l'ensemble des zéros des polynômes $P_{q_n}(u)$, et par R l'ensemble des points limites réguliers de E. Nous dirons que le point $u = a$ est un point de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$, si l'on a en ce point:

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log |P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie. En procédant de la même manière qu'au n° 36, on voit que tout point de moindre croissance appartient à R, mais que tout point de R n'est pas nécessairement un point de moindre croissance. De là résulte que, si N est l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$, on a

$$N \leqq R.$$

On en conclut de là que, si R contient au plus un nombre fini de points, il en sera de même de N; et que si R est au plus dénombrable, N sera également au plus dénombrable.

60. Posons

$$a_{q_n,i} = \alpha_{q_n,i} + \beta_{q_n,i}\sqrt{-1},$$

$$G_{q_n}(x) = (x - \alpha_{q_n,1})(x - \alpha_{q_n,2}) \ldots (x - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)}),$$

$$H_{q_n}(y) = (y - \beta_{q_n,1})(y - \beta_{q_n,2}) \ldots (x - \beta_{q_n,\varphi(q_n)});$$

les suites de polynômes $G_{q_n}(x)$ et $H_{q_n}(y)$ ainsi définis vérifieront les conditions énoncées au n° 36. Désignons par N_x l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $G_{q_n}(x)$, et par N_y l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $H_{q_n}(y)$. Les relations:

$$|\alpha - \alpha_{q_n,i}| \leqq |a - a_{q_n,i}|, \quad |\beta - \beta_{q_n,i}| \leqq |a - a_{q_n,i}|,$$
$$(a = \alpha + \beta\sqrt{-1})$$

nous montrent que si le point $u = a$ $(a = \alpha + \beta\sqrt{-1})$ appartient à N, les points $x = \alpha$ et $y = \beta$ appartiendront respectivement aux ensembles N_x et N_y. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par suite si N'_x et N'_y sont les projections respectives de N sur O_x et O_y, nous aurons:

$$N'_x \leqq N_x, \qquad N'_y \leqq N_y.$$

Comme les ensembles N_x et N_y peuvent avoir la puissance du continu (cfr. n° 58) et que dans cette hypothèse, il peut se faire que l'on ait:

$$N'_x = N_x, \qquad N'_y = N_y \qquad \text{(cfr. n° 66)},$$

il en résulte que l'ensemble N peut avoir la puissance du continu. Donc:

L'ensemble N des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$ peut avoir la puissance du continu.

N'_x étant la projection orthogonale de N sur Ox, comme $N'_x \leqq N_x$ on voit, en tenant compte du résultat du n° 57 et en remarquant que la direction de Ox peut être prise arbitrairement, que la projection orthogonale de N sur une droite quelconque a une mesure linéaire nulle et nous obtenons le résultat suivant:

La projection orthogonale de N sur une droite quelconque a une mesure linéaire nulle.

Ce résultat peut encore se mettre sous la forme suivante:

Les droites parallèles à une direction donnée et portant des points de N déterminent sur une perpendiculaire à leur direction commune un ensemble de points de mesure linéaire nulle.

61. Désignons par r le module de u, et par $r_{q_n,i}$ le module de $a_{q_n,i}$; nous aurons évidemment:

$$|P_{q_n}(u)| \geqq Q_{q_n}(r) \qquad (|u| = r), \tag{22}$$

en posant

$$Q_{q_n}(r) = (r - r_{q_n,1})(r - r_{q_n,2}) \dots (r - r_{q_n,\varphi(q_n)}).$$

Ces polynômes $Q_{q_n}(r)$ satisferont aux conditions énoncées au n° 36. Par suite, si N_r est l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $Q_{q_n}(r)$, N_r aura une mesure linéaire nulle (cfr. n° 57). Soit $r = \rho$ un point quelconque de l'axe des r dont la distance à l'origine est au plus égale à R_0 et n'appartenant pas à N_r. On peut alors extraire de la suite des polynômes $Q_{q_n}(r)$ une suite infinie de polynômes:

$$Q_{p_1}(r),\quad Q_{p_2}(r), \dots, Q_{p_n}(r), \dots$$

tels que l'on ait:

$$\lim_{p_n=\infty} \frac{-\log|Q_{p_n}(\rho)|}{p_n \log p_n} = 0.$$

Soit C_ρ la circonférence de rayon ρ concentrique à l'origine. De (22), nous déduisons que l'on a, pour tout point u de C_ρ,

$$\frac{-\log|Q_{p_n}(\rho)|}{p_n \log p_n} > \frac{-\log|P_{p_n}(u)|}{p_n \log p_n}. \tag{23}$$

D'autre part, la relation:

$$P_{p_n}(u) < R'^{\varphi(p_n)} \qquad [R' > R_0 \text{ et } \varphi(p_n) \leqq q p_n],$$

satisfaite pour tout point u du cercle C_ρ, nous fait voir que l'on a également pour tout point u de la circonférence C_ρ:

$$\frac{-\log|P_{p_n}(u)|}{p_n \log p_n} > \frac{-\varphi(p_n)\log R'}{p_n \log p_n} \qquad (\varphi(p_n) \leqq q p_n). \tag{24}$$

(23) et (24) nous montrent, en tenant compte de notre hypothèse sur les polynômes $Q_{p_n}(r)$ au point $r = \rho$, que la suite des fonctions $\dfrac{-\log|P_{p_n}(u)|}{p_n \log p_n}$ converge uniformément vers zéro sur la circonférence C_ρ. Donc:

Si le point $r = \rho$ n'appartient pas à N_r, il est possible d'extraire de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$ une suite infinie de polynômes $P_{p_n}(u)$ tels que la suite des fonctions $\dfrac{-\log|P_{p_n}(u)|}{p_n \log p_n}$ converge uniformément vers zéro sur la circonférence C_ρ concentrique à l'origine et de rayon ρ.

Il en résulte que parmi les circonférences concentriques à l'origine, celles qui portent des points de N sont comprises parmi les circonférences ayant pour rayons les abscisses des divers points de N_r. Donc:

Les circonférences concentriques à l'origine et portant des points de N déterminent sur une droite quelconque passant par l'origine un ensemble de points de mesure linéaire nulle.

Si nous prenons pour origine des coordonnées un point quelconque $u = a$ de N, il résulte en particulier du résultat précédent que:

D'un point quelconque $u = a$ de N on peut décrire une circonférence de rayon moindre que le nombre positif ε donné à l'avance et ne renfermant, sur son contour, aucun point de l'ensemble N.

62. Considérons un angle COD ayant son sommet à l'origine des coordonnées et détachant sur le cercle trigonométrique concentrique à l'origine un arc de longueur s suffisamment petite pour que l'expression

$$1 - \frac{s^2}{4!} + \frac{s^4}{6!} \cdots$$

soit supérieure à $\frac{1}{4}$. Désignons par θ l'argument de u et par

$$\theta_{q_n,1}, \quad \theta_{q_n,2}, \ldots, \theta_{q_n,\psi(q_n)} \qquad (\psi(q_n) \leqq \varphi(q_n))$$

les arguments des zéros du polynôme $P_{q_n}(u)$ intérieurs à la région Δ du plan des u intérieure à l'angle COD et extérieure à une circonférence C_ε concentrique à l'origine et de rayon très petit ε. Posons

$$S_{q_n}(\theta) = (\theta - \theta_{q_n,1})(\theta - \theta_{q_n,2}) \ldots (\theta - \theta_{q_n,\psi(q_n)}).$$

Ces polynômes $S_{q_n}(\theta)$ satisferont aux conditions énoncées au n° 36. Par suite, si N_θ est l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $S_{q_n}(\theta)$, N_θ aura une mesure linéaire nulle (cfr. n° 57).

Ceci étant, posons

$$P_{q_n}(u) = P^{(1)}_{q_n}(u) P^{(2)}_{q_n}(u),$$

$P^{(1)}_{q_n}(u)$ étant un polynôme dont le coefficient de la plus haute puissance de u est égale à l'unité et admettant comme zéros les zéros de $P_{q_n}(u)$ dont les arguments sont racines de l'équation $S_{q_n}(\theta) = 0$ et ceux-là seulement. Soit u un point quelconque de la région Δ définie plus haut et $a_{q_n,i}$ un zéro quelconque de $P_{q_n}(u)$. De la relation:

$$|u - a_{q_n,i}|^2 = r^2 + r^2_{q_n,i} - 2 r r_{q_n,i} \cos(\theta - \theta_{q_n,i}),$$

qui peut s'écrire:

$$|u - a_{q_n,i}|^2 = (r - r_{q_n,i})^2 + \frac{2 r r_{q_n,i}(\theta - \theta_{q_n,i})^2}{2}\left[1 - \frac{(\theta - \theta_{q_n,i})^2}{4!} + \cdots\right],$$

nous déduisons, en tenant compte de nos hypothèses,

$$|u - a_{q_n,i}|^2 > \frac{r\varepsilon^2(\theta - \theta_{q_n,i})^2}{4},$$

d'où

$$(25)\qquad |P_{q_n}^{(1)}(u)| > \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\psi(q_n)} S_{q_n}(\theta).$$

Soit $\theta = \theta_0$ un point de l'arc s ne faisant pas partie de l'ensemble N_θ et distinct des extrémités de cet arc. Traçons une demi-droite issue de O et passant par le point $\theta = \theta_0$ et déterminons sur cette demi-droite un point A dont la distance à l'origine O soit égale à 2ε, puis désignons par B l'intersection de cette demi-droite avec le cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0. On aura, pour tout point $u = b$ du segment AB ainsi défini,

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log |P_{q_n}^{(2)}(b)|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Le point $\theta = \theta_0$ ne faisant pas partie de l'ensemble N_θ, on peut détacher de la suite des polynômes $S_{q_n}(\theta)$, une suite infinie de polynômes

$$S_{p_1}(\theta),\quad S_{p_2}(\theta),\ \ldots,\ S_{p_n}(\theta),\ \ldots$$

tels que

$$\lim_{p_n=\infty} \frac{-\log |S_{p_n}(\theta_0)|}{p_n \log p_n} = 0.$$

De l'inégalité (25), nous déduisons:

$$\frac{-\log |P_{q_n}^{(1)}(u)|}{p_n \log p_n} < \frac{-\log |S_{p_n}(\theta_0)|}{p_n \log p_n} - \frac{\psi(p_n)}{p_n \log p_n} \log \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\psi(p_n) \leqq q p_n),$$

ce qui nous montre que l'on a, pour tout point $u = b$ du segment AB:

$$\overline{\lim_{p_n=\infty}} \frac{-\log |P_{p_n}^{(1)}(b)|}{p_n \log p_n} \leqq 0;$$

et comme

$$\underline{\lim_{p_n=\infty}} \frac{-\log |P_{p_n}^{(1)}(b)|}{p_n \log p_n} \geqq 0,$$

il en résulte que l'on a, pour tout point $u = b$ du segment AB,

$$\lim_{p_n=\infty} \frac{-\log |P_{p_n}^{(1)}(b)|}{p_n \log p_n} = 0$$

et par suite, en utilisant un résultat précédemment établi,

$$\lim_{p_n=\infty} \frac{-\log |P_{p_n}(b)|}{p_n \log p_n} = 0,$$

puisque

$$P_{p_n}(b) = P_{p_n}^{(1)}(b) P_{p_n}^{(2)}(b).$$

Ceci étant, soit

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_i,\ \ldots$$

une suite décroissante de quantités positives telles que l'on ait $\lim\limits_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$; désignons par N_θ^i l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $S_{q_n}^i(\theta)$, le polynôme $S_{q_n}^i(\theta)$ admettant pour racines les arguments de tous les zéros du polynôme $P_{q_n}(u)$ appartenant à la région du plan intérieure à l'angle COD et extérieure au cercle C_{ε_i} concentrique à l'origine et de rayon ε_i. Chacun des ensembles N_θ^i est un ensemble de mesure linéaire nulle. Il en est donc de même de leur somme N_θ^1. Soit $\theta = \theta_1$ un point de l'arc s n'appartenant pas à N_θ^1 et traçons la demi-droite OB joignant l'origine au point $\theta = \theta_1$. Nous aurons, pour tout point $u = b$ de cette demi-droite distinct de O, en vertu d'un résultat précédemment établi:

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Par conséquent, l'ensemble N ne renfermera aucun point sur le segment OB, à l'exception peut être du point O. Il en résulte donc que les demi-droites issues de O et portant des points de N distincts de O déterminent sur l'arc s un ensemble de points de mesure linéaire nulle. On en conclut aisément que:

Les demi-droites issues du point O et portant des points de N distincts de O déterminent sur le cercle trigonométrique concentrique au point O un ensemble de points de mesure linéaire nulle.

Soient A et B deux points quelconques de l'ensemble N. Il est possible de tracer de l'origine comme centre une circonférence C ne renfermant aucun point de N. D'autre part, d'après le théorème précédent, on peut tracer deux demi-droites issues respectivement de A et B et ne contenant pas de points de N en dehors des points origines. Soient D et E les points de rencontre respectifs de ces demi-droites avec la circonférence C. La ligne continue constituée par les deux segments rectilignes AD et BE et par l'arc de cercle DE ne contiendra pas de points de N en dehors des points A et B. Par suite:

Il est possible de joindre deux points quelconques A et B de N par une ligne continue ne renfermant pas d'autres points de N que les points A et B considérés.

63. Pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de désigner sous le nom d'ensemble ponctuel, tout ensemble de points répartis dans un plan et tel que l'ensemble formé par tous les points de l'ensemble considéré appartenant à une aire finie quelconque jouisse des propriétés suivantes:

1° la projection orthogonale de cet ensemble sur une droite quelconque a une mesure linéaire nulle;

2° les circonférences concentriques à un point $u = a$ situé à distance finie et portant des points de l'ensemble déterminent sur une droite quelconque passant par le point $u = a$ un ensemble de points de mesure linéaire nulle;

3° les demi-droites issues d'un point $u = a$ situé à distance finie et portant des points de l'ensemble déterminent sur une circonférence concentrique au point $u = a$ un ensemble de points de mesure linéaire nulle.

Moyennant cette définition, nous pouvons réunir les résultats obtenus aux n^{os} 60, 61 et 62 dans le théorème suivant:

L'ensemble N des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$ est un ensemble ponctuel.

Remarquons que l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ponctuels est lui-même un ensemble ponctuel. Cette propriété résulte de ce que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure linéaire nulle est également un ensemble de mesure linéaire nulle.

64. Désignons par $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ les nombres identiques au nombre k_{q_n} défini au n° 44 et correspondant respectivement aux polynômes $G_{q_n}(x)$ et $H_{q_n}(y)$. Admettons que les nombres $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ convergent vers zéro avec $\frac{1}{q_n}$. Alors (cfr. n° 49) si les indices q_n des polynômes $P_{q_n}(u)$ vérifient la relation (20), les ensembles N_x et N_y seront tous deux des ensembles au plus dénombrables. Comme les projections orthogonales N'_x et N'_y de N sur Ox et Oy sont respectivement au plus égales à N_x et à N_y, l'ensemble N sera lui-même au plus dénombrable. Donc:

Si les deux suites de nombres $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ admettent zéro comme élément limite unique, l'ensemble N des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$ est au plus dénombrable, si l'on suppose en outre que les indices q_n vérifient la relation:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{q_{n+1}}{q_n} = m,$$

m étant une quantité positive finie.

Désignons par $h^x_{q_{n+1}}$ et $h^y_{q_{n+1}}$ les nombres identiques au nombre $h_{q_{n+1}}$ défini au n° 50 et correspondant respectivement aux polynômes $G_{q_n}(x)G_{q_{n+1}}(x)$ et $H_{q_n}(y)H_{q_{n+1}}(y)$. Si outre les conditions précédentes, nous supposons que l'une au moins des deux suites de nombres $h^x_{q_{n+1}}$ et $h^y_{q_{n+1}}$ admet zéro comme élément limite unique (cfr. n° 50), l'un au moins des ensembles N_x et N_y ne renfermera aucun point. Il en sera de même de l'ensemble N, puisque N_x et N_y sont au moins égaux aux projections orthogonales respectives de N sur Ox et Oy. Par suite:

Si les deux suites de nombres $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ admettent zéro comme élément limite unique et s'il en est de même de l'une au moins des deux suites de nombre $h^x_{q_{n+1}}$ et $h^y_{q_{n+1}}$, l'ensemble N ne renfermera aucun point si l'on suppose en outre que les indices q_n des polynômes $P_{q_n}(u)$ vérifient la relation:

$$\overline{\lim} \frac{q_{n+1}}{q_n} = m,$$

m étant une quantité positive finie.

65. En restant toujours dans l'hypothèse où la suite des nombres $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ admet zéro comme élément limite unique, supposons que les indices q_n des polynômes $P_{q_n}(u)$ vérifient la relation suivante:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty.$$

Dans ce cas les ensembles N_x et N_y peuvent avoir la puissance du continu (cfr. n° 53); il en résulte donc que dans ce cas l'ensemble N peut avoir la puissance du continu.

En nous plaçant dans l'hypothèse où les indices q_n vérifient la relation:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m',$$

m' étant une quantité positive finie, nous allons indiquer un cas où l'on peut affirmer que l'ensemble N est au plus dénombrable. Désignons à cet effet par $m_{q_n}^x$ et $m_{q_n}^y$ les nombres identiques au nombre m_{q_n} défini au n° 54 et correspondant respectivement aux polynômes $G_{q_n}(x)$ et $H_{q_n}(y)$. Supposons qu'il existe une quantité positive $\varkappa$ telle que l'on ait, pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe Q,

$$m_{q_n}^x > \frac{1}{q_n^\varkappa}, \qquad m_{q_n}^y > \frac{1}{q_n^\varkappa}.$$

Alors (cfr. n° 54) les ensembles N_x et N_y seront des ensembles au plus dénombrables et il en sera de même de l'ensemble N. Donc:

Si les suites de nombres $k_{q_n}^x$ et $k_{q_n}^y$ admettent zéro comme élément limite unique, l'ensemble N sera au plus dénombrable si l'on a, à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande,

$$m_{q_n}^x > \frac{1}{q_n^\varkappa}, \qquad m_{q_n}^y > \frac{1}{q_n^\varkappa} \qquad (\varkappa > 0)$$

et si de plus les indices q_n des polynômes $P_{q_n}(u)$ vérifient la relation:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m' \text{ (m' étant une quantité positive finie).}$$

Si $n_{q_n}^x$ et $n_{q_n}^y$ sont les nombres identiques au nombre n_{q_n} défini au n° 54 et correspondant respectivement aux polynômes $G'_{q_n}(x)$ et $H'_{q_n}(y)$, on voit d'une manière analogue, en tenant compte d'un résultat du n° 54 que:

Si les suites de nombres $k_{q_n}^x$ et $k_{q_n}^y$ admettent zéro comme élément limite unique et si l'on a, à partir d'une certaine valeur de q_n,

$$n_{q_n}^x > \frac{1}{q_n^\varkappa}, \qquad n_{q_n}^y > \frac{1}{q_n^\varkappa},$$

l'ensemble N ne renfermera aucun point, si l'on suppose en outre que les indices q_n des polynômes $P_{q_n}(u)$ vérifient la relation:

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = m',$$

m' étant une quantité positive finie.

66. Admettons que tous les points d'un cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0 soient des points limites réguliers de l'ensemble des zéros des polynômes $P_{q_n}(u)$. Si A et B sont les points de rencontre du cercle C_{R_0} avec l'axe des x, tous les points du segment AB seront des points limites réguliers de l'ensemble des zéros des polynômes $G_{q_n}(x)$; de même, si C et D sont les points de rencontre du cercle C_{R_0} avec l'axe des y, tous les points du segment CD seront des points limites réguliers de l'ensemble des zéros des polynômes $H_{q_n}(y)$. Ceci étant, soient $M^x_{q_n}$ et $M^y_{q_n}$ les nombres identiques au nombre M_{q_n} défini au n° 55 et correspondant respectivement aux polynômes $G_{q_n}(x)$ et $H_{q_n}(y)$, et supposons qu'il existe d'une part un nombre positif $\varkappa$ au plus égal à 1, tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de q_n,

$$M^x_{q_n} < \frac{1}{q_n^\varkappa}, \qquad M^y_{q_n} < \frac{1}{q_n^\varkappa};$$

et d'autre part qu'il existe un nombre positif h tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de q_n suffisamment grande,

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} > h q_n.$$

Chacun des ensembles N_x et N_y aura effectivement la puissance du continu (cfr. n° 55). Il en sera de même de l'ensemble N puisque dans ce cas, comme on le vérifie aisément en tenant compte d'un résultat du n° 45, les projections N'_x et N'_y de N sont respectivement égales à N_x et N_y, et nous obtenons le résultat suivant:

Si les suites de nombres $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ admettent zéro comme élément limite unique et si les conditions énoncées dans ce n° *sont satisfaites, l'ensemble N aura effectivement la puissance du continu.*

67. Considérons une infinité dénombrable de suites de polynômes

$$\begin{array}{ll} (P^0) & P_{q_1}(u), \quad P_{q_2}(u), \quad \ldots, P_{q_n}(u), \ldots \\ \ldots & \ldots \\ (P^i) & P_{q_{1,i}}(u), \quad P_{q_{2,i}}(u), \quad \ldots, P_{q_{n,i}}(u), \ldots \\ \ldots & \ldots, \end{array}$$

les polynômes de la suite (P^0) satisfaisant aux conditions énoncées au n° 59 et la suite de rang i se déduisant de la suite de rang $i-1$, quel que soit l'indice i, par la suppression d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de polynômes. Tous les polynômes de la suite (P^i) appartiendront, quel que soit l'indice i, à la suite (P^0). Nous supposerons en outre que l'indice $q_{n,i}$ du polynôme $P_{q_{n,i}}(u)$ est égal à l'indice que possède ce polynôme dans la suite (P^0). Soit N^i l'ensemble des points de moindre croissance des polynômes de la suite (P^i); comme tous les polynômes $P_{q_{n,i}}(u)$ satisfont par hypothèse aux conditions énoncées au n° 59, l'ensemble N^i est un ensemble ponctuel (cfr. n° 63) et cela quel que soit l'indice i.

Tout point de N^{i-1} fait partie de N^i. En effet, si le point $u=a$ fait partie de N^{i-1}, il existera une quantité positive k' telle que l'on ait:

$$\lim_{q_{n,i-1}=\infty} \frac{-\log|P_{q_{n,i-1}}(a)|}{q_{n,i-1}\log q_{n,i-1}} = k';$$

on aura également, puisque les polynômes $P_{q_{n,i}}(u)$ appartiennent avec leurs indices à la suite (P^{i-1}):

$$\lim_{q_{n,i}=\infty} \frac{-\log|P_{q_{n,i}}(a)|}{q_{n,i}\log q_{n,i}} = k',$$

ce qui nous montre que le point $u = a$ fait partie de N^i. Dans le cas particulier où la suite (P^i) diffère de la suite (P^{i-1}) par un nombre fini de polynômes, tout point de N^i appartiendra également à N^{i-1}, de sorte que l'on aura dans cette hypothèse:

$$N^i = N^{i-1}.$$

Mais si la suite (P^i) diffère de la suite (P^{i-1}) par une infinité dénombrable de polynômes, l'ensemble N^i pourra admettre des points n'appartenant pas à N^{i-1}; de sorte que l'on aura dans ce cas:

$$N^i \geqq N^{i-1}.$$

De ce qui précède résulte également que si le point $u = a$ appartient à l'ensemble N^j, il appartiendra à chacun des ensembles N^i pour chaque valeur de i supérieure à j.

Soit N la somme de tous les ensembles N^i précédemment définis, *l'ensemble N sera un ensemble ponctuel,* comme étant la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ponctuels (cfr. n° 63). En général on aura

$$N > N^0;$$

mais si pour chaque valeur de l'indice i, la suite (P^i) diffère de la suite (P^{i-1}) seulement par un nombre fini de polynômes, nous aurons, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$N^i = N^{i-1}$$

et par suite:

$$N^i = N^0;$$

et cela quel que soit l'indice i. Donc:

Dans le cas particulier où la suite (P^i) diffère de la suite (P^{i-1}), pour chaque valeur de l'indice i, par un nombre fini de polynômes, l'ensemble N est identique à l'ensemble N^0 des points de moindre croissance de la suite de polynômes (P^0).

Admettons en particulier que les polynômes $P_{q_n}(u)$ soient de degré au plus égal à p; l'ensemble R^i des points limites réguliers de l'ensemble des zéros des polynômes $P_{q_{n,i}}(u)$ admettra au plus p points (cfr. n° 30) et comme l'on a

$$N^i \leqq R^i \quad \text{(cfr. n° 36)}$$

l'ensemble N^i comprendra au plus p points, et cela quel que soit l'indice i. Il en résulte que, dans ce cas particulier, *l'ensemble N admettra au plus p points.*

L'ensemble N étant un ensemble ponctuel, il existe des points du cercle C_{R_0} ne faisant pas partie de N. Soit $u = b$ l'un quelconque de ces points. Le point $u = b$ ne faisant pas partie de N, n'appartiendra à aucun des ensembles N^i, quel que soit i. Par suite, en un tel point $u = b$, on aura, pour chaque valeur de i,

$$\lim_{q_{n,i}=\infty} \frac{-\log|P_{q_{n,i}}(b)|}{q_{n,i}\log q_{n,i}} = 0.$$

Si δ_i est une quantité positive convergeant vers zéro avec $\frac{1}{i}$, nous pouvons détacher de la suite des nombres $\frac{-\log|P_{q_{n,i}}(b)|}{q_{n,i}\log q_{n,i}}$, un nombre $\frac{-\log|P_{p_i}(b)|}{p_i \log p_i}$ tel que

$$-\delta_i < \frac{-\log|P_{p_i}(b)|}{p_i \log p_i} < \delta_i;$$

et la suite des nombres $\frac{-\log|P_{p_i}(b)|}{p_i \log p_i}$ ainsi obtenus admettra zéro comme élément limite unique.

CHAPITRE V.

Fonctions entières de deux variables.

Ordre apparent total.

68. Soit $F(u, v) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} c_{pq} u^p v^q$ une fonction entière en u et v; on sait que l'on a

$$\lim_{p+q=\infty} \sqrt[p+q]{|c_{p,q}|} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{p+q=\infty} \frac{-\log|c_{p,q}|}{(p+q)\log(p+q)} = +\infty.$$

S'il existe une quantité positive finie λ telle que l'on ait

$$\varliminf_{p+q=\infty} \frac{-\log|c_{p,q}|}{(p+q)\log(p+q)} = \frac{1}{\lambda},$$

nous dirons que la fonction entière en u et v, $F(u, v)$, est d'ordre apparent total fini λ.

Désignons par $N(R, r)$ la fonction majorante de $F(u, v)$ définie par l'égalité:

$$N(R, r) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} |c_{p,q}| R^p r^q;$$

la fonction $N(R, r)$ sera également d'ordre apparent total λ (cfr. n° 7). Par suite (cfr. n° 8), la fonction entière en r, $N(r, r)$, est d'ordre apparent λ. Comme

$$|F(v, v)| \leqq N(r, r),$$

il en résulte que la fonction entière en v, $F(v, v)$, est d'ordre apparent au plus égal à λ. Par suite:

Si la fonction entière en u et v, $F(u, v)$, est d'ordre apparent total λ, la fonction entière en v, $F(v, v)$, sera d'ordre apparent au plus égal à λ.

Nous verrons plus loin (cfr. n° 79) que la fonction entière en v, $F(v, v)$, est effectivement d'ordre apparent λ sauf dans des cas exceptionnels pour lesquels elle est d'ordre apparent inférieur à λ.

69. La fonction $F(u, v)$ ordonnée suivant les puissances entières de v s'écrit:

$$F(u, v) = a_0(u) + a_1(u)v + a_2(u)v^2 + \cdots + a_n(u)v^n + \cdots,$$

les $a_n(u)$ étant des fonctions entières en u. La fonction majorante $N(R, r)$ ordonnée suivant les puissances entières de r s'écrit:

$$N(R, r) = A_0(R) + A_1(R)r + \cdots + A_n(R)r^n + \cdots,$$

$A_n(R)$ étant la fonction majorante de $a_n(u)$.

Ceci posé, comme $N(R, r)$ est d'ordre apparent total λ, on a (cfr. n° 9):

$$A_n\left(\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < \frac{e^{\frac{n}{\sigma}}}{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{n}{\sigma}}} \qquad (\sigma = \lambda + \varepsilon)$$

à partir de $n = p$; par suite, nous aurons pour tous les points d'un cercle C_n concentrique à l'origine et de rayon $\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$, n étant un nombre entier quelconque supérieur à p,

$$|a_n(u)| < \frac{e^{\frac{n}{\sigma}}}{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{n}{\sigma}}}, \tag{26}$$

puisque l'on a, pour tout point de ce cercle,

$$|a_n(u)| \leqq A_n\left(\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

Donc, *si $F(u, v)$ est d'ordre apparent total fini λ, on a l'inégalité* (26) *pour chaque valeur de n supérieure à un certain nombre fixe et pour tout point u du cercle C_n concentrique à l'origine et de rayon* $\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$.

Ordre apparent de $T(u, v)$ par rapport à v.

70. Soit

$$T(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} P_{q_n}(u) v^{q_n}$$

une fonction entière en u et v ordonnée suivant les puissances entières de v satisfaisant aux conditions suivantes:

1° les polynômes $P_{q_n}(u)$ satisfont aux conditions énoncées au n° 59;

2° les c_{q_n} sont des constantes telles que $\lim\limits_{q_n=\infty} \dfrac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \dfrac{1}{\mu}$ et en outre telles que l'on ait, quel que soit l'indice q_n,

$$\left|\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \delta,$$

δ étant une quantité positive différente de zéro.

Nous nous proposons de déterminer l'ordre apparent de $T(u, v)$ par rapport à v en tout point u du cercle C_{R_0} qui renferme à son intérieur tous les zéros des polynômes $P_{q_n}(u)$. Considérons, à cet effet, une suite décroissante de quantités positives

$$(\delta) \qquad \delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \ \delta_i, \ \ldots \qquad (\delta_1 < \delta),$$

telles que l'on ait $\lim\limits_{i=\infty} \delta_i = 0$. Désignons par

$$c_{q_{1,i}}, \ c_{q_{2,i}}, \ \ldots, \ c_{q_{n,i}}, \ \ldots$$

la suite des coefficients c_{q_n} tels que les nombres correspondants $\dfrac{-\log|c_{q_{n,i}}|}{q_{n,i}\log q_{n,i}}$ vérifient la relation :

$$\left|\frac{-\log|c_{q_{n,i}}|}{q_{n,i} \log q_{n,i}} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \delta_i,$$

l'indice $q_{n,i}$ de $c_{q_{n,i}}$ étant égal à l'indice que possède ce coefficient dans la suite des coefficients c_{q_n}; par $P_{q_{n,i}}(u)$ le polynôme $P_{q_n}(u)$ ayant $c_{q_{n,i}}$ pour coefficient dans $T(u, v)$ et par (P^i) la suite des polynômes $P_{q_{n,i}}(u)$ ainsi définis.

Soient N^i l'ensemble des points de moindre croissance des polynômes $P_{q_{n,i}}(u)$, et N la somme de tous ces ensembles N^i. N est un ensemble ponctuel. Il existe donc des points du cercle C_{R_0} n'appartenant pas à N. Soit $u = b$ l'un quelconque de ces points. Le point $u = b$ n'appartenant pas à N ne fera pas partie des ensembles N^i quel que soit i. Par suite, on peut extraire de la suite des nombres $\dfrac{-\log|P_{q_{n,i}}(b)|}{q_{n,i}\log q_{n,i}}$ (cfr. n° 67) un nombre $\dfrac{-\log|P_{p_i}(b)|}{p_i \log p_i}$, tel que

$$-\delta_i < \frac{-\log|P_{p_i}(b)|}{p_i \log p_i} < \delta_i.$$

Comme le coefficient c_{p_i} de $P_{p_i}(u)$ vérifie la relation :

$$\left|\frac{-\log|c_{p_i}|}{p_i \log p_i} - \frac{1}{\mu}\right| < \delta_i,$$

et que δ_i converge vers zéro avec $\dfrac{1}{i}$, il s'ensuit que la suite des nombres $\dfrac{-\log|c_{p_i} P_{p_i}(b)|}{p_i \log p_i}$ admet $\dfrac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. Par suite $\dfrac{1}{\mu}$ est un élément limite de la suite des nombres $\dfrac{-\log|c_{q_n} \log P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n}$; et comme $\lim\limits_{q_n=\infty} \dfrac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} \geqq 0$, il en résulte que $\frac{1}{\mu}$ est la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}\log P_{q_n}(b)|}{q_n\log q_n}$. Donc:

Si $f(v)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} v^{q_n}$ *est une fonction entière en* v *d'ordre apparent* μ, $T(u, v)$ *sera une fonction entière en* v *d'ordre apparent* μ *en tout point* u *intérieur au cercle* C_{R_0} *et n'appartenant pas à* N.

Soit $u=a$ un point de N; il existe un entier j tel que ce point n'appartienne pas à N^i pour les valeurs de i inférieures à j, mais fasse partie de l'ensemble N^j et par suite de chacun des ensembles N^i pour toutes les valeurs de i supérieures à j. Nous partagerons la suite (S) des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}P_{q_n}(a)|}{q_n\log q_n}$ en deux suites partielles (S^1) et (S^2). La suite (S^1) comprendra tous les nombres $\frac{-\log|c_{p_n}\log P_{p_n}(a)|}{p_n\log p_n}$ de la suite (S) dont les indices p_n sont distincts des indices $q_{n,j}$. Alors nous aurons, d'après la définition même des indices $q_{n,j}$,

$$\left|\frac{-\log|c_{p_n}|}{p_n\log p_n}-\frac{1}{\mu}\right|>\delta_j,\quad \text{d'où}\quad \lim_{p_n=\infty}\frac{-\log|c_{p_n}|}{p_n\log p_n}\geq\frac{1}{\mu}+\delta_j\,.$$

D'autre part, comme le point $u=a$ n'appartient à aucun des ensembles N^i pour $i<j$, nous aurons

$$\lim_{p_n=\infty}\frac{-\log|P_{p_n}(a)|}{p_n\log p_n}=0.$$

Par conséquent, la plus petite limite de la suite $(S^{(1)})$ sera un nombre positif $\frac{1}{\mu'}$ au moins égal à $\frac{1}{\mu}+\delta_j$ et par suite supérieur à $\frac{1}{\mu}$. La suite (S^2) comprendra tous les nombres de la suite (S) ayant les $q_{n,j}$ pour indices et ceux-là seulement. Le point $u=a$ étant un point de N^j, il existe une quantité positive k' telle que l'on ait:

$$\lim_{q_{n,j}=\infty}\frac{-\log|P_{q_{n,j}}(a)|}{q_{n,j}\log q_{n,j}}=k'.$$

Par suite, la plus petite limite $\frac{1}{\mu''}$ de la suite (S^2) est au moins égale à $\frac{1}{\mu}+k'$ et par conséquent supérieure à $\frac{1}{\mu}$. Il en résulte que la plus petite limite de la suite (S) qui est égale au plus petit des nombres $\frac{1}{\mu'}$ et $\frac{1}{\mu''}$ sera supérieure à $\frac{1}{\mu}$. Par conséquent la fonction entière en v, $T(a, v)$, est d'ordre apparent inférieur à μ. Donc:

Si la fonction entière en v, $f(v)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} v^{q_n}$, *est d'ordre apparent* μ, *la fonction entière en* v, $T(u, v)$, *sera une fonction entière en* v *d'ordre apparent inférieur à* μ *en tout point* u *appartenant à l'ensemble* N.

En réunissant les deux résultats de ce n°, on obtient le théorème suivant:

Si la fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} v^{q_n}$, est d'ordre apparent μ, $T(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du cercle C_{R_0} à l'exception des points d'un ensemble N ponctuel pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à μ.

Remarque. — En tout point extérieur au cercle C_{R_0}, la fonction $T(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ, puisque pour l'un quelconque de ces points $u = b$, on a

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log |P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

et par suite, les éléments limites de la suite des nombres $\dfrac{-\log |c_{q_n} P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n}$ sont identiques aux éléments limites de la suite des nombres $\dfrac{-\log |c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$.

71. L'ensemble N considéré dans le n° précédent est indépendant de la loi suivant laquelle les nombres δ_i convergent vers zéro. Il suffit de montrer que si l'on part d'une suite de nombres positifs

$$\delta'_1, \quad \delta'_2, \ldots, \delta'_l, \quad \ldots,$$

tels que $\lim_{l=\infty} \delta'_l = 0$ et distincte de la suite des δ_i on obtient le même ensemble N.

Désignons par

$$c_{q_{1,l}}, \quad c_{q_{2,l}}, \ldots, c_{q_{i,l}}, \quad \ldots$$

la suite des coefficients c_{q_n} vérifiant la relation:

$$\left| \frac{-\log |c_{q_{i,l}}|}{q_{n,l} \log q_{n,l}} - \frac{1}{\mu} \right| \leqq \delta'_l,$$

l'indice $q_{n,l}$ de $c_{q_{n,l}}$ étant égal à l'indice que possède ce nombre dans la suite des c_{q_n}, et par $P_{q_{n,l}}(u)$ le polynôme $P_{q_n}(u)$ admettant $c_{q_{n,l}}$ pour coefficient dans $T(u, v)$. Soit N^l l'ensemble des points de moindre croissance des polynômes $P_{q_{n,l}}(u)$, et N' la somme de tous ces ensembles N^l. Tout point de N' appartient à N. En effet, soit $u = a$ un point de N', il appartient donc à un certain ensemble N^l; par suite, comme la suite des indices $q_{n,l}$ comprend tous les indices $q_{n,i}$ si $\delta'_l \geqq \delta_i$, ce point $u = a$ appartiendra à l'ensemble N^i et par suite à N. On verrait de même que tout point de N fait partie de N'.

72. Admettons que $\dfrac{1}{\mu}$ soit un élément limite isolé de la suite des nombres $\dfrac{-\log |c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$; en disposant convenablement des notations et supprimant s'il est nécessaire une infinité dénombrable de termes dans $T(u, v)$, on peut toujours s'arranger en sorte que la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. Alors, en tenant compte d'un résultat du n° 2, la suite des nombres $q_{n,i}$ se déduira de la suite des nombres $q_{n,i-1}$ en supprimant au plus un nombre fini d'éléments; par suite, la suite de polynômes (P^i) se déduira de la suite (P^{i-1}) pour chaque valeur de i, en supprimant au plus un nombre fini de polynômes dans cette dernière suite. Dans ce cas (cfr. n° 67) l'ensemble N est identique à l'ensemble N^0 des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$.

Supposons maintenant que $\frac{1}{\mu}$ soit un élement limite non isolé de la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$; on pourra toujours choisir (cfr. n° 2) la suite des nombres δ_i de telle manière que pour chaque valeur de l'indice i, la suite (P^i) se déduise de la suite (P^{i-1}) par la suppression d'une infinité dénombrable de polynômes, de sorte que dans ce cas on pourra avoir, quel que soit l'indice i,

$$N > N^i.$$

Ordre apparent de $G(u, v)$ par rapport à v.

73. Soit

$$G(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n}(u) v^{q_n}$$

une fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini λ, où

$$c_{q_n}(u) = c_{0,q_n} + \cdots + c_{\varphi(q_n),q_n} u^{\varphi(q_n)}$$

est un polynôme dont le degré $\varphi(q_n)$ vérifie, pour chaque valeur de q_n, la relation:

$$\varphi(q_n) \leqq q q_n,$$

q étant un nombre entier fixe. Nous nous proposons d'étudier l'ordre apparent de la fonction entière en v, $G(u, v)$, pour chaque valeur finie de u, en supposant que la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ [c_{q_n} étant le coefficient maximum de $c_{q_n}(u)$] possède $\frac{1}{\mu}$ comme plus petite limite et en admettant en outre qu'il existe une quantité positive δ telle que l'on ait, pour toute valeur de l'indice q_n,

$$\left| \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu} \right| \leqq \delta.$$

Mais auparavant, nous ferons un certain nombre de remarques.

Posons

$$P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \ldots (u - a_{q_n,\psi(q_n)}),$$

$a_{q_n,1}, a_{q_n,2}, \ldots, a_{q_n,\Phi(q_n)}$ étant les zéros de $c_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R_0 + \eta$ (R_0 et η étant deux quantités positives), et

$$c_{q_n}(u) = P_{q_n}(u)\, b_{q_n}(u);$$

les $b_{q_n}(u)$ seront des polynômes en u n'admettant aucun zéro à l'intérieur du cercle $C_{R_0+\eta}$ concentrique à l'origine et de rayon $R_0 + \eta$. *Si* $B_{q_n}(R)$ *est la fonction majorante de* $b_{q_n}(u)$ *pour* $|u| = R$, *nous allons montrer que le rapport* $\dfrac{\log B_{q_n}(R)}{\log |c_{q_n}|}$ *converge vers l'unité pour toute valeur positive de* R. Nous désignerons à cet effet par $C_{q_n}(R)$ la fonction majorante de $c_{q_n}(u)$, $(R = |u|)$.

Soit $|c_{q_n}(\xi_{q_n})|$ le maximum de $|c_{q_n}(u)|$ atteint pour le point $u = \xi_{q_n}$ de la circonférence $C_{R_0+2\eta}$ de rayon $R_0 + 2\eta$ concentrique à l'origine. Des relations

$$|c_{m,q_n}| \leqq \frac{|c_{q_n}(\xi_{q_n})|}{(R_0 + 2\eta)^m}$$

nous déduisons

$$|c_{q_n}(\xi_{q_n})| > A_1 C_{q_n}(R + \eta),$$

A_1 étant une quantité positive finie indépendante de q_n. Par suite, en remarquant que l'on a, pour tout point u de la circonférence $C_{R_0+2\eta}$,

$$|P_{q_n}(u)| < (R_0 + 2\eta)^{\psi(q_n)},$$

nous déduisons, de l'inégalité précédente,

$$|b_{q_n}(\xi_{q_n})| > \frac{A_1 C_{q_n}(R_1)}{(R_0 + 2\eta)^{\psi(q_n)}} \qquad (R_1 = R_0 + \eta) \qquad (\psi(q_n) \leqq q\, q_n)$$

et par conséquent

$$B_{q_n}(R_2) > \frac{A_1 C_{q_n}(R_1)}{(R_0 + 2\eta)^{\psi(q_n)}} \qquad (R_2 = R_0 + 2\eta) \tag{26}$$

puisque

$$B_{q_n}(R_2) \geqq |b(\xi_{q_n})|.$$

Comme (cfr. n° 15) le rapport $\dfrac{-\log C_{q_n}(R_1)}{-\log |c_{q_n}|}$ converge vers l'unité lorsque q_n augmente indéfiniment, l'inégalité (26) nous montre que

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{\log B_{q_n}(R_2)}{\log |c_{q_n}|} \leqq 1,$$

en observant que d'après nos hypothèses on a

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{\psi(q_n)}{q_n \log q_n} = 0.$$

Soit $|b_{q_n}(\xi'_{q_n})|$ le maximum de $|b_{q_n}(u)|$ atteint pour le point $u=\xi'_{q_n}$ de la circonférence $C_{R_2+3\eta}$ concentrique à l'origine et de rayon $R_0+3\eta$; nous aurons

$$B_{q_n}(R_2) < A_2|b_{q_n}(\xi'_{q_n})| \qquad (R_2 = R_0 + 2\eta),$$

A_2 désignant une quantité positive finie indépendante de q_n, et par suite

$$B_{q_n}(R_2) < A_2 \frac{|c_{q_n}(\xi'_{q_n})|}{|P_{q_n}(\xi'_{q_n})|},$$

d'où

$$B_{q_n}(R_2) < A_2 \frac{|C_{q_n}(R_0+3\eta)|}{(2\eta)^{\psi(q_n)}}, \tag{27}$$

en remarquant que $C_{q_n}(R_0+3\eta) \geqq |c_{q_n}(\xi'_{q_n})|$ et en observant que l'on a

$$|P_n(u)| \geqq \frac{1}{(2\eta)^{\psi(q_n)}}$$

pour tout point u de la circonférence $C_{R_0+3\eta}$.

De l'inégalité (27) nous déduisons, en tenant compte de (15) et des hypothèses énoncées au début de ce n°, que

$$\varlimsup_{q_n=\infty} \frac{\log|B_{q_n}(R_2)|}{\log|c_{q_n}|} \geqq 1.$$

Il en résulte donc que le rapport $\dfrac{-\log|B_{q_n}(R_2)|}{\log|c_{q_n}|}$ converge vers l'unité lorsque q_n croît au delà de toute limite. Comme (cfr. n° 13)

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{\log B_{q_n}(R)}{\log B_{q_n}(R_2)} = 1$$

pour toute valeur finie de R, il en résultera, d'après ce qui précède, que

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{\log B_{q_n}(R)}{\log|c_{q_n}|} = 1$$

pour toute valeur fine et positive de R.

Désignons par $|b_{q_n}(\zeta_{q_n})|$ le maximum de $|b_{q_n}(u)|$ pour $|u| = \dfrac{\eta}{4}$ atteint pour un point $u=\zeta_{q_n}$ de la circonférence $C_{\frac{\eta}{4}}$ concentrique à l'origine et de rayon $\dfrac{\eta}{4}$. Des inégalités:

$$A_1 B_{q_n}\left(\frac{\eta}{8}\right) < |b_{q_n}(\zeta_{q_n})| < B_{q_n}\left(\frac{\eta}{4}\right),$$

où A_1 est une quantité positive finie, nous déduisons, en tenant compte du résultat précédent,

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{\log|b(\zeta_{q_n})|}{\log|c_{q_n}|} = 1.$$

Par conséquent, les éléments limites de la suite des nombres $\dfrac{-\log|b(\zeta_{q_n})|}{q_n \log q_n}$ sont identiques aux éléments limites de la suite des nombres $\dfrac{-\log|b(\zeta_{q_n})|}{q_n \log q_n}$. Par suite, si nous posons

$$b_{q_n}(u) = c_{q_n} g_{q_n}(u),$$

la suite des nombres $\dfrac{-\log|g_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n \log q_n}$ admettra zéro comme élément limite unique, en remarquant que d'après notre hypothèse sur les c_{q_n} on a

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} \leqq \frac{1}{\mu} + \delta.$$

74. La fonction entière en u et v, $G(u, v)$, étant d'ordre apparent total fini λ, si σ est une quantité positive supérieure à λ, nous aurons, pour tous les points d'un cercle C_{q_n} concentrique à l'origine et de rayon $\left(\dfrac{q_n}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ et à partir d'une certaine valeur de q_n (cfr. n° 69),

$$|c_{q_n}(u)| < \frac{e^{\frac{q_n}{\sigma}}}{\left(\dfrac{q_n}{\sigma}\right)^{\frac{q_n}{\sigma}}}.$$

A fortiori, nous aurons, pour tous les points d'une circonférence $C_{R_0+2\eta}$ de rayon $R_0+2\eta$, concentrique à l'origine et à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande,

$$|c_{q_n}(u)| < \frac{e^{\frac{q_n}{\sigma}}}{\left(\dfrac{q_n}{\sigma}\right)^{\frac{q_n}{\sigma}}};$$

et en observant que l'on a, pour tout point u de cette circonférence $C_{R_0+2\eta}$,

$$|P_{q_n}(u)| > \eta^{\psi(q_n)} \qquad (\psi(q_n) \leqq \varphi(q_n)),$$

il en résultera que l'on aura, pour tous les points du cercle $C_{R_0+2\eta}$,

$$|b_{q_n}(u)| < \frac{e^{\frac{q_n}{\sigma}}}{\left(\dfrac{q_n}{\sigma}\right)^{\frac{q_n}{\sigma}}} \times \frac{1}{\eta^{\psi(q_n)}} \qquad (\psi(q_n) \leqq \varphi(q_n)).$$

On en conclut, en tenant compte de notre hypothèse sur $\varphi(q_n)$, que les fonctions harmoniques $\dfrac{-\log|b_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n}$ sont positives, à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande, en tout point u du cercle $C_{R_0+\eta}$ concentrique à l'origine et de rayon $R_0+\eta$. Comme le cercle $C^{(q_n)}$ concentrique au point $u=\zeta_{q_n}$ et de rayon $R_0+\frac{\eta}{2}$ fait partie du cercle $C_{R_0+\eta}$, il en résulte qu'à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande, chacune des fonctions harmoniques $\frac{-\log|b_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}$ sera positive pour tout point du cercle $C^{(q_n)}$ correspondant. De plus, chacune de ces fonctions sera régulière à l'intérieur et sur le contour du cercle $C^{(q_n)}$ correspondant, puisque les fonctions entières $b_{q_n}(u)$ ne possèdent aucun zéro à l'intérieur du cercle $C_{R_0+\eta}$ de rayon $R_0+\eta$ et concentrique à l'origine.

75. Soit R'_0 une quantité positive supérieure à $R_0+\eta$. Posons

$$P^{(1)}_{q_n}(u)=(u-a_{q_n,1})(u-a_{q_n,2})\ldots(u-a_{q_n,\chi(q_n)}),$$

$a_{q_n,1},\ a_{q_n,2},\ \ldots,\ a_{q_n\chi(q_n)}$ étant les zéros de $c_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R'_0+\eta$; puis

$$c_{q_n}(u)=P^{(1)}_{q_n}(u)\,b^{(1)}_{q_n}(u)$$

et enfin

$$P^{(1)}_{q_n}(u)=P_{q_n}(u)\,P^{(2)}_{q_n}(u);$$

nous aurons, pour tout point u intérieur au sens étroit au cercle $C_{R_0+\eta}$,

$$b_{q_n}(u)=b^{(1)}_{q_n}(u)\,P^{(2)}_{q_n}(u),$$

d'où

$$\frac{-\log|b_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}=\frac{-\log|b^{(1)}_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}-\frac{\log|P^{(2)}_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}=\frac{-\log|b^{(1)}_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}+\varepsilon_{q_n}(u),$$

$\varepsilon_{q_n}(u)$ convergeant uniformément vers zéro dans le cercle $C_{R_0+\frac{3}{4}\eta}$ concentrique à l'origine et de rayon $R_0+\frac{3}{4}\eta$, puisque l'on a, pour tout point u de ce cercle,

$$\left(\frac{\eta}{4}\right)^{\Theta(q_n)}<|P^{(2)}_{q_n}(u)|<\left(R'_0+\frac{3}{4}\eta\right)^{\Theta(q_n)}\qquad(\Theta(q_n)\leqq\varphi(q_n))$$

et que $\lim\limits_{q_n=\infty}\frac{\varphi(q_n)}{q_n\log q_n}=0$.

Il résulte en particulier de ce qui précède, que l'on aura

$$\frac{-\log|b_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n}=\frac{-\log|b^{(1)}_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n}+\varepsilon_{q_n}$$

avec $\lim\limits_{q_n=\infty}\varepsilon_{q_n}=0$.

76. Ceci étant, la fonction harmonique $\frac{-\log|b^{(1)}_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}$ étant régulière et positive à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande pour tout point u du cercle $C^{(q_n)}$ concentrique au point $u=\zeta_{q_n}$ et de rayon $R'_0+\frac{\eta}{2}$ (cfr. n° 74), nous aurons, en appliquant un théorème bien connu sur les fonctions harmoniques positives, pour tout point u

dont la distance au point $u = \zeta_{q_n}$ est au plus égale à $R_0 + \frac{\eta}{2}$,

$$(27)\qquad -(1-\alpha)\frac{\log|b^{(1)}_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} < \frac{-\log|b^{(1)}_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n} < -(1+\beta)\frac{\log|b^{(1)}_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n}$$

avec

$$\alpha = \frac{2R_0+\eta}{R_0+R'_0+\eta}, \qquad \beta = \frac{2R_0+\eta}{R'_0-R_0}.$$

Comme la distance d'un point quelconque u du cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0 au point $u = \zeta_{q_n}$ est au plus égale à $R_0 + \frac{\eta}{4}$, on en conclut que la double inégalité précédente sera vérifiée pour tout point u du cercle C_{R_0} et pour toutes les valeurs de q_n supérieures à un certain nombre fixe Q.

De (27) nous déduisons

$$-(1-\alpha)\frac{\log|b_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} + \varepsilon^{(1)}_{q_n}(u) < \frac{-\log|b_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n} < (1+\beta)\frac{\log|b_{q_n}(\zeta_{q_n})}{q_n\log q_n} + \varepsilon^{(2)}_{q_n}(u),$$

$\varepsilon^{(1)}_{q_n}(u)$ et $\varepsilon^{(2)}_{q_n}(u)$ convergeant uniformément vers zéro dans le cercle C_{R_0}, en vertu d'une remarque faite plus haut, et par suite

$$\varepsilon^{(1)}_{q_n}(u) + \frac{\alpha\log|c_{q_n}|}{q_n\log q_n} + \alpha\frac{\log|g_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} < \frac{-\log|g_{q_n}(u)|}{q_n\log q_n}$$
$$< -\beta\frac{\log|c_{q_n}|}{q_n\log q_n}\;\frac{-\log|g_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} + \varepsilon^{(2)}_{q_n}(u).$$

Ceci posé, soit ε un nombre positif donné à l'avance; comme les nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n\log q_n}$ sont bornés dans leur ensemble, nous pouvons déterminer le nombre positif R'_0 de manière que l'on ait, pour chaque valeur de q_n supérieure à Q,

$$\frac{\alpha\log|c_{q_n}|}{q_n\log q_n} > -\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \frac{-\beta\log|c_{q_n}|}{q_n\log q_n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le nombre R'_0 étant ainsi déterminé au nombre $\frac{\varepsilon}{3}$, nous pouvons faire correspondre un nombre entier $Q' \geqq Q$, tel que l'on ait

$$\varepsilon^{(1)}_{q_n}(u) > -\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \varepsilon^{(2)}_{q_n}(u) < \frac{\varepsilon}{3}$$

dès que $q_n > Q'$ et pour tout point u du cercle C_{R_0}; ceci est possible puisque les fonctions $\varepsilon^{(1)}_{q_n}(u)$ et $\varepsilon^{(2)}_{q_n}(u)$ convergent uniformément vers zéro dans C_{R_0}. D'autre part, puisque $\lim\limits_{q_n=\infty}\frac{-\log|g_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} = 0$, au nombre positif $\frac{\varepsilon}{3}$, il est possible de faire correspondre un entier Q'' tel que, pour $q_n > Q''$, on ait

$$\frac{\alpha\log|g_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} > -\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \frac{-\beta\log|g_{q_n}(\zeta_{q_n})|}{q_n\log q_n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en conclut que l'on aura, pour toutes les valeurs de q_n supérieures au plus grand des deux nombres Q' et Q'' et pour tout point u du cercle C_{R_0},

$$-\varepsilon < \frac{-\log|g_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n} < \varepsilon,$$

ce qui nous montre que *la suite des fonctions* $\frac{-\log|g_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n}$ *converge uniformément vers zéro à l'intérieur et sur le contour du cercle* C_{R_0}.

77. La suite des fonctions $\frac{-\log|g_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n}$ convergeant vers zéro en tout point u du cercle C_{R_0}, il en résulte que l'ordre apparent de la fonction entière en v, $G(u, v)$, en tout point u du cercle C_{R_0} est identique à l'ordre apparent de la fonction entière en v, $T(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} P_{q_n}(u) v^{q_n}$, c_{q_n} et $P_{q_n}(u)$ ayant la même signification qu'au n° 73. Comme les $P_{q_n}(u)$ satisfont aux conditions énoncées au n° 59, nous pouvons énoncer le résultat suivant (cfr. n° 70):

Si la fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} v^{q_n}$ [c_{q_n} désignant le coefficient maximum de $c_{q_n}(u)$], est d'ordre apparent μ, $G(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tout point u du cercle C_{R_0} concentrique à l'origine et de rayon R_0, sauf pour les points d'un ensemble ponctuel pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à μ.

Ceci étant, soit M l'ensemble des points du plan des u situés à distance finie et pour lesquels $G(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à μ. Comme le résultat précédent subsiste quel que grand que soit le nombre positif R_0, il en résulte que la portion de M appartenant à une aire finie quelconque est un ensemble ponctuel. Par suite (cfr. n° 63) l'ensemble M sera lui-même un ensemble ponctuel. Nous obtenons donc le théorème suivant:

Si la fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} v^{q_n}$ [c_{q_n} désignant le coefficient maximum de $c_{q_n}(u)$], est d'ordre apparent μ, $G(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, à l'exception des points d'un ensemble M ponctuel pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à μ.

Ordre apparent de $F(u, v)$ par rapport à v.

78. Soit $F(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u) v^n$ une fonction entière en u et v que nous supposerons d'ordre apparent total fini λ. Nous allons étudier l'ordre apparent de $F(u, v)$, considérée comme une fonction entière en v, pour chaque valeur finie de u, en supposant que la fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^n$, est d'ordre apparent $\mu > 0$ [c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(u)$].

La fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^n$, étant d'ordre apparent μ, $N(R, r)$ sera d'ordre apparent μ par rapport à r. Comme

$$|a_n(u)| < A_n(R) \quad (|u| \leqq R),$$

il en résulte que, pour toute valeur finie de u, $F(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent au plus égal à μ.

Cette remarque faite, comme $N(R, r)$ est une fonction entière en R et r d'ordre apparent total fini λ et d'ordre apparent $\mu > 0$ par rapport à r, cette fonction peut se mettre sous la forme (cfr. n° 23)

$$N(R, r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} Q_{q_n}(R) r^{q_n} + H(R, r),$$

c_{q_n} étant le coefficient maximum de $A_{q_n}(R)$ ou, ce qui revient au même, le coefficient maximum de $a_{q_n}(u)$ et vérifiant en outre pour chaque valeur de l'indice q_n la relation $\left| \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu} \right| \leqq \delta \ (\delta > 0)$, $Q_{q_n}(R)$ un polynôme dont le degré $\varphi(q_n)$ est pour chaque valeur de q_n au plus égal à $q q_n$ (q étant un nombre entier fixe) et $H(R, r)$ une fonction entière en R et r d'ordre apparent au plus égal à $\frac{\mu}{1 + 2\mu\delta}$ par rapport à r.

Désignons par $S_{q_n}(u)$ le polynôme formé par tous les termes de la fonction entière en u, $a_{q_n}(u)$, dont les modules des coefficients sont les coefficients de $Q_{q_n}(R)$ et par $B(u, v)$ l'ensemble de tous les termes de $F(u, v)$ dont les modules des coefficients sont les coefficients de $H(R, r)$; la fonction $F(u, v)$ pourra se mettre sous la forme:

$$F(u, v) = G(u, v) + B(u, v) \tag{28}$$

avec

$$G(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} S_{q_n}(u) v^{q_n}.$$

Comme $H(R, r)$ est d'ordre apparent au plus égal à $\frac{\mu}{1 + 2\mu\delta}$ par rapport à r, d'après la remarque faite plus haut $B(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent au plus égal à $\frac{\mu}{1 + 2\mu\delta}$ et par suite d'ordre apparent inférieur à μ pour toute valeur finie de u. D'autre part, la fonction $G(u, v)$ précédemment definie satisfait aux mêmes conditions que la fonction $G(u, v)$ considérée au n° 73. Par suite (cfr. n° 77), comme c_{q_n} est le coefficient maximum du polynôme $c_{q_n}(u) = c_{q_n} S_{q_n}(u)$ et que par hypothèse la fonction entière en v, $f_1(v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} v_{q_n}$, est d'ordre apparent μ, $G(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, sauf pour les points d'un ensemble M ponctuel pour lesquels elle est d'ordre apparent inférieur à μ. L'égalité (28) nous montre, en remarquant que $B(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à μ pour toute valeur finie de u, que $F(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent μ en tout point du plan des u situés à distance finie et n'appartenant pas à M et qu'en tout point de ce dernier ensemble $F(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à μ. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui est la conclusion de nos recherches:

Si $F(u, v)$ est une fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini λ et si la fonction entière en v, $f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^n$ [c_n étant le coefficient maximum de $a_n(u)$], est d'ordre apparent μ, $F(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, à l'exception des points d'un ensemble M ponctuel pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à μ.

Ce théorème peut encore se mettre sous la forme suivante:

Si $F(u, v)$ est une fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini λ et si $N(R, r)$ est d'ordre apparent μ par rapport à r, $F(u, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, sauf pour les points d'un ensemble M ponctuel pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à μ.

79. Considérons la fonction entière en w et v, $F(wv, v)$, se déduisant de la fonction entière en u et v, $F(u, v)$, que nous supposons d'ordre apparent total fini λ, en posant $u = wv$. Soit $N(tr, r)$ la fonction majorante de $F(wv, v)$; cette fonction $N(tr, r)$ sera d'ordre apparent λ par rapport à r (cfr. n° 27). Par suite, d'après le n° précédent $F(wv, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent λ pour tous les points du plan des w situés à distance finie, à l'exception des points d'un ensemble M_1 ponctuel pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à λ.

Par suite, si le point $w = 1$ n'appartient pas à M_1, la fonction entière en v, $F(v, v)$, sera d'ordre apparent λ, mais si le point $w = 1$ fait partie de l'ensemble M_1, $F(v, v)$ sera une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à λ.

Limite supérieure du nombre des zéros des $a_{q_n}(u)$ dont le module ne dépasse pas un nombre positif R_0 donné à l'avance.

80. Soit

$$a_{q_1}(u), \quad a_{q_2}(u), \ldots, a_{q_n}(u), \quad \ldots$$

la suite des fonctions entières $a_{q_n}(u)$ dont le coefficient maximum c_{q_n} vérifie pour chaque valeur de q_n la relation:

$$\left| \frac{-\log |c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu} \right| \leq \delta,$$

δ étant une quantité positive. Nous nous proposons de trouver une limite supérieure du nombre des zéros de $a_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal au nombre positif R_0

donné à l'avance. Nous remarquons à cet effet que l'on peut écrire:

$$a_{q_n}(u) = c_{q_n} S_{q_n}(u) + S^{(1)}_{q_n}(u),$$

$S_{q_n}(u)$ étant un polynôme dont le degré est au plus égal à $q q_n$ (q étant un nombre entier fixe), $S^{(1)}_{q_n}(u)$ étant une fonction entière en u dont le coefficient maximum c'_{q_n} vérifie pour toute valeur de l'indice q_n, la relation:

$$\frac{-\log|c'_{q_n}|}{q_n \log q_n} > \frac{1}{\mu} + 2\delta.$$

Posons

$$a_{q_n}(u) = c_{q_n} f_{q_u}(u);$$

nous aurons

$$f_{q_n}(u) = S_{q_n}(u) + \frac{S^{(1)}_{q_n}(u)}{c_{q_n}}.$$

Soit $S^{(1)}_{q_n}(R)$ la fonction majorante de $\dfrac{S^{(1)}(u)}{c_{q_n}}$; comme le coefficient maximum $\left|\dfrac{c'_{q_n}}{c_{q_n}}\right|$ de $S^{(1)}_{q_n}(R)$ vérifie la relation $\lim\limits_{q_n=\infty} \dfrac{-\log\left|\dfrac{c'_{q_n}}{c_{q_n}}\right|}{q_n \log q_n} \geqq \delta$, nous aurons également (cfr. n° 15)

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log S^{(1)}_{q_n}(R)}{q_n \log q_n} \geqq \delta$$

et par suite au nombre positif $\dfrac{\delta}{2}$ on peut faire correspondre un entier Q tel que, pour $q_n > Q$, on ait

$$\frac{-\log S^{(1)}_{q_n}\left(R_0 + \frac{\eta}{2}\right)}{q_n \log q_n} > \frac{\delta}{2} \quad \text{et par suite} \quad \frac{-\log\left|\dfrac{S^{(1)}_{q_n}(u)}{c_{q_n}}\right|}{q_n \log q_n} > \frac{\delta}{2} \left(|u| \leqq R_0 + \frac{\eta}{2}\right).$$

Ceci étant, posons

$$P_{q_n}(u) = (u - a_{q_n,1})(u - a_{q_n,2}) \ldots (u - a_{q_n,\varphi q_n}),$$

$a_{q_n,1}, a_{q_n,2}, \ldots, a_{q_n,\varphi(u)}$ étant les zéros de $S_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R_0 + \eta$ (η étant une quantité positive très petite), puis

$$S_{q_n}(u) = P_{q_n}(u) g_{q_n}(u);$$

la suite des fonctions $\dfrac{-\log|g_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n}$ converge uniformément vers zéro à l'intérieur et sur le contour du cercle $C_{R_0+\frac{\eta}{2}}$ concentrique à l'origine et de rayon $R_0 + \dfrac{\eta}{2}$ (cfr. n° 76), par conséquent au nombre positif $\dfrac{\delta}{8}$ nous pouvons faire correspondre un entier Q' tel que, pour $q_n > Q'$, on ait, pour tout point u du cercle $C_{R_0+\frac{\eta}{2}}$,

$$\frac{-\log|g_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n} < \frac{\delta}{8}.$$

$Q_{q_n}(r)$ ayant la même signification qu'au n° 69, désignons par σ_{q_n} la somme totale des longueurs des segments $\gamma^{\frac{\delta}{8}}_{q_n, i}$ de l'axe des r appartenant à l'intervalle $\left(R_0, R_0+\frac{\eta}{2}\right)$ et en chaque point desquels on a $\frac{-\log|Q_{q_n}(r)|}{q_n \log q_n} \geqq \frac{\delta}{8}$. Ces polynômes $Q_{q_n}(r)$ satisfaisant aux mêmes condition que les polynômes $A_{q_n}(x)$ considérés au n° 36, nous aurons $\lim\limits_{q_n=\infty} \sigma_{q_n} = 0$ (cfr. n° 57); par suite nous pourrons déterminer un entier Q'' tel que l'on ait, pour $q_n > Q''$,

$$\sigma_{q_n} < \frac{\eta}{4}.$$

Soit q_n un nombre de la suite des indices q_n supérieur au plus grand des trois nombres Q, Q', Q''. q_n étant supérieur à Q'', il existera au moins un point $r=\rho$ dans l'intervalle $\left(R_0, R+\frac{\eta}{2}\right)$ et tel que l'on ait

$$\frac{-\log|Q_{q_n}(\rho)|}{q_n \log q_n} < \frac{\delta}{8}.$$

Comme

$$P_{q_n}(u) \geqq |Q_{q_n}(r)| \qquad |u| = r,$$

nous aurons, pour tout point de la circonférence C_ρ concentrique à l'origine et de rayon ρ:

$$\frac{-\log|P_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n} < \frac{\delta}{8}$$

et par suite, puisque $q_n > Q'$ et que la circonférence C_ρ est toute entière à l'intérieur du cercle $C_{R_0+\frac{\eta}{2}}$,

$$\frac{-\log|S_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n} < \frac{\delta}{4}.$$

Comme d'après ce qui a été dit plus haut on a, en remarquant que $q_n > Q$, pour tout point de la circonférence C_ρ,

$$\frac{-\log\left|\frac{S^{(1)}_{q_n}(u)}{c_{q_n}}\right|}{q_n \log q_n} > \frac{\delta}{2},$$

on en conclut que l'on aura pour tous les points de la circonférence C_ρ:

$$\left|\frac{S^{(1)}_{q_n}(u)}{c_{q_n} S_{q_n}(u)}\right| < 1.$$

Le polynôme $S_{q_n}(u)$ ne possédant aucun zéro sur la circonférence C_ρ il résulte d'un théorème bien connu que le nombre des zéros de $f_{q_n}(u)$ et par suite de $a_{q_n}(u)$ est égal au nombre des zéros du polynôme $S_{q_n}(u)$ à l'intérieur du même cercle.

Comme le degré de $S_{q_n}(u)$ est au plus égal à $q q_n$ (q étant un nombre entier fixe) il en résulte que le nombre des zéros de $a_{q_n}(u)$ dont le module ne dépasse pas R_0 est au plus égal à $q q_n$. On conclut de ce qui précède que, *si la fonction entière en* u *et* v $F(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u) v^n$ *et si les* $a_{q_n}(u)$ *ont la même signification qu'au début de ce* n°, *au nombre positif* R_0 *on peut faire correspondre un entier* Q_{R_0} *tel que, pour* $q_n > Q_{R_0}$, *le nombre des zéros de* $a_{q_n}(u)$ *dont le module ne dépasse pas* R_0 *soit au plus égal à* $q q_n$ (*q étant un nombre entier positif indépendant de* R_0 *et* q_n).

Remarque. — En procédant de la même manière que précédemment, on constate que tout point limite de l'ensemble des zéros des polynômes $S_{q_n}(u)$ est également un point limite de l'ensemble des zéros des fonctions entières $a_{q_n}(u)$.

81. Posons

$$P^{(1)}_{q_n}(u) = (u - a^{(1)}_{q_n,1})(u - a^{(1)}_{q_n,2}) \ldots (u - a^{(1)}_{q_n,\psi(q_n)}),$$

$a^{(1)}_{q_n,1}, a^{(2)}_{q_n,2}, \ldots, a^{(1)}_{q_n,\psi(q_n)}$ étant les zéros de $f_{q_n}(u)$ dont le module est au plus égal à $R_0 + \eta$ et

$$f_{q_n}(u) = P^{(1)}_{q_n}(u) g^{(1)}_{q_n}(u).$$

En procédant comme au n° 76, on constate que la suite des fonctions $\dfrac{-\log |g^{(1)}_{q_n}(u)|}{q_n \log q_n}$ converge uniformément vers zéro dans le cercle $C_{R_0+\frac{\eta}{2}}$ concentrique à l'origine et de rayon $R_0 + \dfrac{\eta}{2}$.

Soit N_1 l'ensemble des points du plan des u qui par rapport aux polynômes $P^{(1)}_{q_n}(u)$ est identique à l'ensemble N par rapport aux polynômes $P_{q_n}(u)$ et défini au n° 70. La relation

$$P^{(1)}_{q_n}(u) g^{(1)}_{q_n}(u) = P_{q_n}(u) g_{q_n}(u) + \frac{S^{(1)}_{q_n}(u)}{c_{q_n}}$$

nous montre, en tenant compte de ce qui précède et du résultat du n° 76, que tout point de N_1 intérieur au sens large au cercle C_{R_0} est un point de N intérieur au sens large au cercle C_{R_0}, et inversement. Cette remarque va nous permettre de substituer à la suite des polynômes $P_{q_n}(u)$, la suite des polynômes $P^{(1)}_{q_n}(u)$, pour l'étude de la portion de l'ensemble M appartenant au cercle C_{R_0}, M étant l'ensemble des points du plan des u situés à distance finie pour lesquels la fonction entière en v, $F(u, v)$, est d'ordre apparent inférieur à μ.

Examen de cas particuliers.

82. Les $P^{(1)}_{q_n}(u)$ ayant la même signification que dans le n° précédent, nous désignerons par $P^{(1)}_{q_n,i}(u)$ le polynôme extrait de la suite des $P^{(1)}_{q_n}(u)$ tel que le coefficient maximum $c_{q_{n,i}}$ de la fonction entière $a_{q_{n,i}}(u)$ correspondante vérifie la relation:

$$\left|\frac{-\log|c_{q_{n,i}}|}{q_{n,i}\log q_{n,i}} - \frac{1}{\mu}\right| \leqq \delta_i,$$

δ_i étant un nombre de la suite (δ) considérée au n° 70; puis par N_1^i l'ensemble des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P^{(1)}_{q_{n,i}}(u)$ ainsi définis; et par N_1 la somme de tous ces ensembles N_1^i. D'après le n° précédent, la portion de l'ensemble N_1 appartenant au cercle C_{R_0} coïncide avec la portion de N appartenant à ce cercle.

Ceci posé, soient $k^x_{q_n}(R_0)$ et $k^y_{q_n}(R_0)$ les nombres qui par rapport au polynôme $P^{(1)}_{q_n}(u)$ sont identiques aux nombres $k^x_{q_n}$ et $k^y_{q_n}$ par rapport au polynôme $P_{q_n}(u)$ et définis au n° 64. Si nous faisons varier R_0 (η restant fixe), $k^x_{q_n}(R_0)$ et $k^y_{q_n}(R_0)$ deviendront des fonctions non décroissantes de la variable réelle et positive R_0. Nous allons étudier l'ensemble M des points du plan des u pour lesquels $F(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à μ en admettant que les deux suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$ admettent zéro comme fonction limite unique.

Il peut arriver que, quel que soit i, les indices $q_{n,i}$ des polynômes $P^{(1)}_{q_{n,i}}(u)$ vérifient la relation:

$$\overline{\lim_{q_{n,i}=\infty}} \frac{q_{n+1,i}}{q_{n,i}} \leqq m,$$

m étant une quantité positive finie. Alors chacun des ensembles $N_1^{(i)}$ sera au plus dénombrale (cfr. n° 64) et il en sera de même de l'ensemble N_1, puisque la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est-elle même un ensemble au plus dénombrable. Il en résulte que la portion de l'ensemble M appartenant au cercle C_{R_0} est au plus dénombrable. Comme ce qui précède a lieu pour toute valeur positive de R, on en conclut que l'ensemble M est au plus dénombrable. Donc:

Si les deux suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$ admettent zéro comme fonction limite unique et si les indices $q_{n,i}$ des polynômes $P^{(1)}_{q_{n,i}}(u)$ vérifient, quel que soit i, la relation:

$$\overline{\lim_{q_{n,i}=\infty}} \frac{q_{n+1,i}}{q_{n,i}} \leqq m,$$

m étant une quantité positive finie, l'ensemble des points du plan des u pour lesquels $F(u, v)$ est d'ordre apparent inférieur à μ est un ensemble au plus dénombrable.

Soient $h^x_{q_{n+1}}(R)$ et $h^x_{q_{n+1}}(R)$ les fonctions qui pour une valeur déterminée R_0 de R sont par rapport au polynôme $P^{(1)}_{q_n}(u) \times P^{(1)}_{q_{n+1}}(u)$ identiques aux nombres $h^x_{q_{n+1}}$ et $h^y_{q_{n+1}}$ par rapport à $P_{q_n}(u) \times P_{q_{n+1}}(u)$ et définis au n° 64. Admettons qu'outre les conditions du résultat précédent, *l'une au moins des deux suites de fonctions $h^x_{q_{n+1}}(R)$ et $h^y_{q_{n+1}}(R)$ admette zéro comme fonction limite unique, on verrait de même que l'ensemble M ne renferme aucun point, et par suite que $F(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie.*

83. En restant toujours dans l'hypothèse où les suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$

admettent zéro comme fonction limite unique, supposons qu'à partir d'une certaine valeur j de l'indice i, la suite des nombres $\frac{q_{n+1,i}}{q_{n,i}}$ admette $+\infty$ comme élément limite; dans ce cas l'un quelconque des ensembles N_1^i pour $i \geqq j$ peut avoir la puissance du continu (cfr. n° 65). Par suite, dans ce cas l'ensemble M pourra avoir la puissance du continu. En supposant que les indices $q_{n,i}$ vérifient quel que soit i la relation:

$$\overline{\lim_{q_{n,i}=\infty}} \frac{\log q_{n+1,i}}{\log q_{n,i}} \leqq m',$$

m' étant une quantité positive finie, nous allons indiquer un cas pour lequel l'ensemble M est au plus dénombrable. Désignons à cet effet respectivement par $m^x_{q_n}(R_0)$ et $m^y_{q_n}(R_0)$ les minima des projections sur Ox et Oy des segments ayant pour extrémités les zéros de $P^{(1)}_{q_n}(u)$. Les fonctions $m^x_{q_n}(R)$ et $m^y_{q_n}(R)$ seront des fonctions positives de R (en écrivant R au lieu de R_0). Admettons qu'il existe un nombre positif $\varkappa$ tel que pour chaque valeur de R on ait

$$m^x_{q_n}(R) > \frac{1}{q_n^\varkappa} \quad \text{et} \quad m^y_{q_n}(R) > \frac{1}{q_n^\varkappa}$$

dès que $q_n > Q_R$ (Q_R pouvant varier avec R); alors pour chaque valeur positive de R (cfr. n° 65) chacun des ensembles N_1^i sera au plus dénombrable et cela quel que soit i. Il en sera de même de l'ensemble N_1 et par suite de l'ensemble M et nous obtenons le théorème suivant:

Si les deux suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$ admettent zéro comme fonction limite unique et si l'on a, pour toutes les valeurs de q_n supérieures à Q_R,

$$m^x_{q_n}(R) > \frac{1}{q_n^\varkappa} \quad \textit{et} \quad m^y_{q_n}(R) > \frac{1}{q_n^\varkappa},$$

l'ensemble M des points du plan des u situés à distance finie, pour lesquels $F(u, v)$ est une fonction entière en v d'ordre apparent inférieur à μ, est un ensemble au plus dénombrable si l'on suppose en outre que les indices $q_{n,i}$ vérifient pour chaque valeur de i la relation

$$\overline{\lim_{q_{n,i}=\infty}} \frac{\log q_{n+1,i}}{\log q_{n,i}} = m',$$

m' étant une quantité positive finie.

Désignons par $n^x_{q_{n+1}}(R)$ et $n^y_{q_{n+1}}(R)$ les minima des projections respectives sur Ox et Oy de tous les segments joignant deux zéros du produit $P^{(1)}_{q_n}(u)\,P^{(1)}_{q_{n+1}}(u)$; on verrait de même en tenant compte d'un résultat du n° 65 que:

Si les deux suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$ admettent zéro comme fonction limite unique et si l'on a, pour toutes les valeurs de q_n supérieures à Q_R,

$$n^x_{q_{n+1}}(R) > \frac{1}{q_{n+1}^\varkappa}, \qquad n^y_{q_{n+1}}(R) > \frac{1}{q_{n+1}^\varkappa},$$

l'ensemble M ne renfermera aucun point et par suite $F(u, v)$ sera une fonction entière *en v d'ordre apparent* μ *pour tous les points du plan des u situés à distance finie, si l'on suppose en outre que les indices* $q_{n,i}$ *vérifient pour chaque valeur de i la relation:*

$$\overline{\lim_{q_{n,i}=\infty}} \frac{\log q_{n+1,i}}{\log q_{n,i}} = m',$$

m' étant une quantité positive finie.

84. Il sera excessivement difficile de reconnaître si les suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$ admettent zéro comme fonction limite unique. Nous allons indiquer un cas pour lequel on peut affirmer qu'il en est ainsi. Supposons qu'*il existe une fonction positive de R, h(R), telle que l'on ait, pour toutes les valeurs de* $q_n > Q_R$,

$$m^x_{q_n}(R) > \frac{h(R)}{q_n}, \qquad m^y_{q_n}(R) > \frac{h(R)}{q_n};$$

en tenant compte du résultat du n° 51, *on constate que les fonctions* $k^x_{q_n}(R)$ *et* $k^y_{q_n}(R)$ *admettent zéro comme fonction limite unique.*

Exemples: I. — Posons:

$$F(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} (c'_{q_n} \sin \pi n u) v^{q_n} + c_0,$$

où $q_n = n^2$ et où les constantes c'_{q_n} vérifient la relation

$$\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|c'_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu} \qquad (\mu > 0).$$

Cette fonction $F(u, v)$ sera une fonction entière en u et v d'ordre apparent total fini. Si c_{q_n} est le coefficient maximum de $c'_{q_n} \sin \pi n u$, on aura, d'après notre hypothèse sur les c'_{q_n}, $\lim_{q_n=\infty} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$. Comme tous les zéros des fonctions $\sin \pi n u$ appartiennent à l'axe des x et que la distance entre deux zéros consécutifs quelconques de $\sin \pi n u$ est égale à $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{q_n^{\frac{1}{2}}}$, il en résulte que les suites de fonctions $k^x_{q_n}(R)$ et $k^y_{q_n}(R)$ admettent zéro comme fonction limite unique. Posons

$$P^{(1)}_{q_n}(u) = u\left(u - \frac{1}{n}\right)\left(u - \frac{2}{n}\right) \dots (u - 1);$$

la portion de l'ensemble N_1 appartenant à l'intervalle o — 1 coincidera avec l'ensemble N des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P^1_{q_n}(u)$ appartenant à l'intervalle o — 1, puisque la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admet $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique.

Comme tous les polynômes $P_{q_n}(u)$ s'annulent pour $u = 0$ et pour $u = 1$, il en résulte que ces deux points appartiennent à N. La distance entre deux zéros consécutifs du produit $P_{q_n}(u) P_{q_{n+1}}(u)$ étant supérieure à $\frac{1}{q_{n+1}}$ dans tout intervalle intérieur au sens étroit à l'intervalle $0 - 1$ et les nombres q_n vérifiant la relation $\lim \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1$, il en résulte que N ne renfermera aucun point dans tout intervalle intérieur au sens étroit à l'intervalle $0 - 1$. Par suite la portion de N appartenant à l'intervalle $0 - 1$ renfermera uniquement les points $u = 0$ et $u = 1$. On en conclut, en tenant compte de la périodicité des fonctions $\sin \pi u$, que la fonction $F(u, v)$ considérée sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, à l'exception des points de l'axe des x d'abscisses entières pour lesquels cette fonction entière en v se réduit à une constante.

II. Considérons la fonction entière en u et v:

$$F(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} (c'_{q_n} \sin q_n \pi u)\, v^{q_n},$$

où $\lim\limits_{q_n=\infty} \frac{-\log |c'_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$, les indices q_n vérifiant la condition énoncée au n° 55. Posons

$$P^{(1)}_{q_n}(u) = u\left(u - \frac{2}{q_n}\right) \ldots (u - 1);$$

l'ensemble N_1 des points de moindre croissance de la suite des polynômes $P^{(1)}_{q_n}(u)$ aura effectivement la puissance du continu dans tout intervalle intérieur à l'intervalle $(0 - 1)$ (cfr. n° 55). On en déduit que l'ensemble M aura effectivement la puissance du continu. Donc la fonction $F(u, v)$ considérée sera une fonction entière en v d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, sauf pour les points d'un ensemble M appartenant à l'axe des x et ayant effectivement la puissance du continu, pour lesquels elle sera d'ordre apparent inférieur à μ.

85. Comme autre cas particulier, nous pouvons considérer le cas où le nombre des zéros des fonctions entières en u, $f_{q_n}(u)$, où $f_{q_n}(u) = \frac{a_{q_n}(u)}{c_{q_n}}$ dont le module est au plus égal à R ne dépasse pas un entier Q_R pouvant croître avec R. Alors pour chaque valeur de R le nombre des points limites réguliers de l'ensemble des zéros des polynômes $P^{(1)}_{q_n}(u)$ appartenant au cercle $C_{R+\eta}$, est fini; par suite il en est de même de la portion de l'ensemble M appartenant à ce cercle. On en conclut que, dans le cas considéré, *la fonction $F(u, v)$ est d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des u situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un ensemble M n'admettant aucun point limite à distance finie et pour lesquels elle est d'ordre apparent inférieur à μ.*

Ce dernier cas comprend comme cas particulier celui dans lequel toutes les fonctions entières $f_{q_n}(u)$ sont bornées dans leur ensemble dans toute aire finie. Les fonctions entières $f_{q_n}(u)$ sont dites bornées dans leur ensemble, s'il existe une fonction entière $f(u)$ à coefficients positifs, telle que pour chaque valeur de q_n, le coefficient d'un terme quelconque de $f_{q_n}(u)$ soit en module au plus égal au coefficient correspondant de $f(u)$.

Donc, *si les fonctions entières* $f_{q_n}(u)$ *sont bornées dans leur ensemble dans toute aire finie, l'ensemble des points du plan des* u *pour lesquels* $F(u, v)$ *est une fonction entière en* v *d'ordre apparent inférieur à* μ *n'admet aucun point limite à distance finie.*

Belverne (Haute-Saône), 8 août 1910.

JULES SIRE.

TABLE DES MATIÈRES.