SULLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE E VARIETÀ.

Memoria di **Francesco Severi** (Padova).

Adunanza del 25 febbraio 1917.

In questo lavoro rielaboro, da un punto di vista più geometrico del consueto, la teoria della curvatura delle superficie e varietà.

Lo spunto per tale rielaborazione mi venne da un'osservazione che mi capitò di fare parlando col Collega Prof. Levi-Civita dei notevoli risultati da lui or ora ottenuti nella Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura riemanniana,* pubblicata in questo volume dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo [1]).

L'osservazione cui alludo si riferiva a ciò: che il concetto di parallelismo fra direzioni, entro una varietà V_n, a metrica qualsiasi, introdotto con felice idea dal Collega, poteva presentarsi sotto una forma geometrica affatto indipendente dallo spazio euclideo S_N in cui la V_n è immersa, restando così a priori manifesto il carattere intrinseco di quel concetto, rispetto alla data varietà; cosa che al Levi-Civita risulta a posteriori dalle equazioni differenziali, che esprimon il modo di variare di una direzione parallela ad una data, lungo un assegnato cammino (cfr. col § 3 di *M.*).

Il desiderio di scorgere sotto un aspetto geometrico elementare, spoglio il più possibile da sviluppi algoritmici eleganti, ma tuttavia complessi, i rapporti concettuali che conducono alla bella definizione data dal Levi Civita, per la curvatura riemanniana d'una V_n, mi ha poi spinto a ristudiare la cosa *ab imis* anche per le superficie, posto che la definizione intrinseca ch'io davo del parallelismo fra direzioni, induceva appunto a ricercar sulle superficie i rapporti essenziali in questione.

D'altronde a rielaborar da un punto di vista più sintetico la teoria della curvatura delle superficie, mi spingeva pure il desiderio di giungere ad un'interpretazione geometrica della definizione di curvatura d'una varietà, data originariamente dal Riemann [2]).

---

[1]) Citerò nel seguito con una *M.* la Memoria del Levi-Civita.

[2]) Non mancan di certo pregevoli esposizioni geometriche della teoria della curvatura totale delle superficie; ma io dovevo piegar la mia trattazione a particolari esigenze, in vista degli scopi che mi proponevo per le varietà.

Tutto ciò spieghi perchè mi sia indotto a ripercorrere un terreno ormai illustrato in tutti i suoi dettagli, da Memorie e da Trattati classici.

Debbo ora esporre, in brevi cenni riassuntivi, il contenuto di questo lavoro.

Premetto anzitutto alcuni richiami alle coordinate geodetiche polari, sopra una superficie qualunque S, ed a certe altre coordinate, usate qua e là da varî Autori, ed in ispecial modo dal Riemann, e ch'io — dovendo nominarle spesso — mi permetto di chiamare coordinate cartesiane curvilinee, perchè si esprimon per le coordinate polari mediante le stesse formole, che legan nel piano coordinate cartesiane e polari.

Nel n° 2 collego la considerazione delle coordinate geodetiche polari ad un modo speciale di riguardare una superficie qualunque S, come la deformata di un velo piano, originariamente tangente ad S in un punto P, inenstendibile lungo le rette per P ed elastico lungo i circoli di centro P. Nella deformazione un parallelogrammo, avente un vertice in P, si trasforma in un *quadrilatero* $P\,Q\,P'\,Q'$ che chiamo *di* Riemann (n° 9), perchè la definizione riemanniana di curvatura, nel caso delle superficie, s'interpreta appunto nel modo seguente (n° 9):

Indicata con Δ l'area $P\,Q\,P'\,Q'$ e con K la curvatura totale di S in P, supposto che il quadrilatero si contragga indefinitamente verso P, viene:

$$\frac{1}{3} K = \lim \frac{P\,Q^2 - P'\,Q'^2}{\Delta^2}$$

Questa definizione geometrica di K, presenta però lo svantaggio, rispetto a quelle più sotto indicate, che, per quanto semplice e suggestiva, non è intrinseca.

Per ottenere espressioni limiti intrinseche della curvatura d'una superficie, ed in particolare l'espressione mediante elementi metrici di un quadrilatero di Levi-Civita (parallelogrammoide, come lo chiama l'A.), cerco di ridurmi al caso d'una sfera (reale od imaginaria), provando che, per giungere alle espressioni limiti desiderate, è perfettamente lecito, di fronte all'ordine infinitesimale delle quantità che entrano in giuoco, di sostituire alla nostra superficie una sfera.

Ognuno ravviserà l'analogia di questo procedimento con quello che si segue nella Geodesia, allorquando in un ordine d'approssimazione soddisfacente per la pratica, si sostituiscono alle figure geodetiche tracciate sopra una zona non troppo estesa dell'ellissoide terrestre, figure geodetiche tracciate sopra una sfera di raggio conveniente.

In sostanza io non faccio che precisare con un'analisi un po' accurata (n^i 3, 4), rispetto a quali ordini infinitesimali è lecita la sostituzione di elementi metrici di un intorno d'una superficie qualunque S, con elementi metrici d'una sfera $\overline{S}$. E trovo così che alle lunghezze degli archi geodetici tracciati su S, si posson sostituire le lunghezze di archi di circoli massimi di $\overline{S}$, a meno di quantità del 4° ordine [3]); che agli angoli di S si posson sostituire gli angoli di $\overline{S}$ a meno di quantità del 3° ordine; etc.

[3]) Non basta, per concluder ciò, osservare che i ds^2 delle S, $\overline{S}$, sotto la forma geodetica, cominciano a differire dal 5° ordine in poi (cfr. col n° 4).

Concludo in tal modo che sopra una superficie qualunque vale, in seconda approssimazione, la trigonometria sferica ($K > 0$) o pseudosferica ($K < 0$). Nel suo complesso la trigonometria sferica o pseudosferica si trasporta a meno di quantità del 3° ordine, ma speciali relazioni si trasportano a meno di quantità del 4° ed anche del 5° ordine.

Passando ad applicare tale conclusione alla teoria della curvatura gaussiana, trovo subito per questa, sia l'espressione mediante il rapporto tra l'eccesso e l'area di un triangolo geodetico infinitesimo (GAUSS), sia l'espressione (contenuta implicitamente in una relazione che s'incontra in DARBOUX):

$$\frac{1}{3} K = \lim \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2},$$

ove K è la curvatura di S in un punto A e b, c son le lunghezze dei cateti, a la lunghezza dall'ipotenusa di un triangolo geodetico ABC, rettangolo in A, il quale si contragga indefinitamente verso A.

L'espressione della curvatura di S nel punto P:

$$K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}, \tag{1}$$

cui si perviene con LEVI-CIVITA, mediante un parallelogrammoide $PQP'Q'$ d'area Δ — figura costituita da due archi geodetici uguali PP', QQ' formanti angoli corrispondenti uguali ad un medesimo ω, colla geodetica PQ (base) e dall'arco geodetico $P'Q'$ (soprabase) — vien qui ritrovata mediante elementari proprietà geometriche della sfera (n° 8).

Poichè alla soprabase geodetica $P'Q'$, colla quale si chiude il parallelogrammoide, si può sostituire un arco qualunque, infinitesimo cogli altri lati del quadrilatero (vedi il § 18 di M. ed il n° 8 di questo lavoro), così la stessa espressione di K vale se si prende come soprabase un arco di equidistanza geodetica, obliqua secondo ω, da PQ.

Per le superficie a curvatura costante, le linee di equidistanza obliqua da una data geodetica, coincidono colle linee ad essa geodeticamente parallele, e la curvatura K risulta espressa dalla formula

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

ove $PQP'Q'$ è un qualunque parallelogrammoide *finito,* d'area Δ, chiuso da una soprabase geodeticamente parallela a PQ.

Ritornando alle superficie a curvatura variabile, trovo che l'espressione limite (1) vale anche quando si riferisca ad un quadrilatero geodetico $PQP'Q'$, rettangolo in P, in Q ed in P'. Sopra una superficie a curvatura costante (piano non euclideo) un tal quadrilatero riducesi alla figura fondamentale della geometria piana di LAMBERT, come il parallelogrammoide geodetico di LEVI-CIVITA, per $\omega = \frac{\pi}{2}$, riducesi ad un quadrilatero birettangolo isoscele, figura fondamentale della geometria piana di SACCHERI.

Per completar la considerazione dei quadrilateri che, sopra una superficie, conservan qualcuna delle proprietà caratteristiche dei parallelogrammi euclidei, prendo in esame anche un quadrilatero $PQP'Q'$ racchiuso da 2 archi geodetici PQ, PP', formanti un angolo ω, e da due archi $P'Q'$, QQ' di equidistanza obliqua, secondo ω, rispettivamente da PQ, PP'.

Un quadrilatero siffatto non dà però luogo ad alcuna espressione di K analoga alle precedenti, perchè ha i lati opposti uguali, a meno di quantità del 4^o ordine. Dal punto di vista delle lunghezze dei lati, esso rassomigliasi perciò ad un parallelogrammo euclideo più degli altri quadrilateri sopra considerati.

Tuttavia se, limitandoci al caso $\omega = \frac{\pi}{2}$, nel qual caso il quadrilatero è racchiuso da due geodetiche ortogonali e da due linee ad esse geodeticamente parallele, si considera il quarto angolo γ (non retto) dal quadrilatero e la sua area Δ, si ottiene per la curvatura K di S in P, l'espressione:

$$K = \lim \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta},$$

analoga alla

$$K = \lim \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\Delta},$$

cui si perviene mediante il quarto angolo γ di un quadrilatero di LAMBERT (n° 9).

Nel Capitolo secondo, applicando alle varietà i risultati precedenti, dò anzitutto la interpretazione geometrica della definizione originaria di RIEMANN per la curvatura K di una varietà V_n, secondo un'assegnata giacitura. Una volta fatto derivar, per deformazione, l'intorno di un punto P di V_n, dall'intorno del punto stesso nello spazio euclideo S_n ivi tangente a V_n, considerando lo S_n come inestendibile nelle direzioni delle rette tangenti in P e come elastico nelle direzioni delle ipersfere di centro P, la circostanza che un piano di S_n, passante per P, si muti in una superficie geodetica di V_n, permette di trasportar subito alle varietà la formola già stabilita per le superficie.

Passo quindi ad esporre la definizione geometrica intrinseca, cui già ho alluso in principio, del parallelismo fra direzioni: Dati sopra V_n due punti A, A_1, infinitamente vicini, ed una direzione (ξ) uscente da A, la direzione (ξ_1) parallela a (ξ), condotta per A_1, è quella che, sulla superficie geodetica di centro A, individuata dalle direzioni (ξ), (AA_1), forma colla geodetica AA_1 un angolo (corrispondente) eguale a quello formato da (ξ) colla geodetica stessa.

E dimostro la coincidenza di questa definizione con quella del LEVI-CIVITA, pervenendo di nuovo, in modo autonomo e intrinseco, alle equazioni differenziali, che reggono il problema del parallelismo.

La definizione esposta mi consente di trasportar senz'altro alle varietà la espressione della curvatura mediante un parallelogrammoide (n° 14).

Aggiungo alcune semplici considerazioni geometriche dirette a ritrovare le proprietà fondamentali del parallelismo fra direzioni (n[i] 12, 13).

Capitolo I.

Sulla curvatura totale delle superficie.

1. ***Richiami concernenti le coordinate geodetiche polari. Coordinate cartesiane curvilinee.*** — Sopra una superficie S fissiamo un sistema di coordinate geodetiche polari (ρ, θ), avente per polo $(\rho = 0)$ un punto P (regolare) di S e per asse polare una geodetica $(\theta = 0)$ uscente da P [4]). Considerata per P un'altra geodetica, il cui verso positivo formi col verso positivo della precedente l'angolo ω, compreso fra o e π, poniamo:

$$(2) \qquad u = \rho \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin \omega}, \quad v = \rho \frac{\sin \theta}{\sin \omega}.$$

Da queste si ricavano le ρ, θ come funzioni regolari delle u, v in tutto l'intorno di P (eccetto in P stesso). Si ha precisamente:

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega}, \quad \sin\theta = \dfrac{v \sin\omega}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega}}, \\ \sin(\omega - \theta) = \dfrac{u \sin\omega}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega}}, \end{cases}$$

ove pel radicale si accetti il segno $+$.

Le u, v si posson pertanto assumere come coordinate di un punto M variabile nell'intorno di P: nel seguito per brevità le chiameremo *coordinate cartesiane curvilinee,* per evidente analogia colle ordinarie coordinate cartesiane nel piano.

Esse presentan il vantaggio, rispetto alle coordinate polari, che la corrispondenza fra i punti dell'intorno di P e le coppie di valori di u, v, è biunivoca senza eccezione anche in P. Ed è appunto questa circostanza che ne rende opportuno l'uso pei nostri scopi ulteriori.

Il quadrato dell'elemento lineare di S, espresso per le coordinate ρ, θ, è dato da

$$(4) \qquad ds^2 = d\rho^2 + G\, d\theta^2,$$

ove la funzione $G(\rho, \theta)$, sviluppata secondo le potenze ascendenti di ρ, nell'intorno di

---

[4]) Vedi ad es. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale,* 2ª edizione (Pisa, Spoerri, 1902), vol. I, pag. 194.

$\rho = 0$, è del tipo:

(5) $$G = \rho^2 \left(1 - \frac{K}{3}\rho^2 + \cdots\right),$$

K essendo la curvatura totale di S nel punto P [5]).

Dalle (2), differenziando e risolvendo rispetto a $d\rho$, $d\theta$, si traggon le

$$d\rho = \cos\theta\, du + \cos(\omega - \theta)\, dv,$$

$$d\theta = -\frac{\sin\theta}{\rho} du + \frac{\sin(\omega - \theta)}{\rho} dv,$$

e sostituendo in (4), si ha l'espressione del ds^2 rispetto alle u, v:

(6) $$ds^2 = E'\, du^2 + 2F'\, du\, dv + G'\, dv^2,$$

con

(7) $$\begin{cases} E' = 1 + \left(\frac{G}{\rho^2} - 1\right)\sin^2\theta, \quad F' = \cos\omega - \left(\frac{G}{\rho^2} - 1\right)\sin\theta\sin(\omega - \theta), \\ G' = 1 + \left(\frac{G}{\rho^2} - 1\right)\sin^2(\omega - \theta). \end{cases}$$

2. ***Una superficie qualunque considerata come la deformata di un velo piano intessuto con un fascio di fibre rettilinee inestendibili e con un fascio di fibre circolari elastiche.*** — Le coordinate geodetiche polari, su di una superficie S, conducono spontaneamente alla considerazione di una corrispondenza biunivoca fra i punti della S ed i punti del piano S_0 tangente ad S nel polo P, sul qual piano si assuma un sistema di coordinate polari (ρ_0, θ_0), avente il polo $\rho_0 = 0$ in P e l'asse polare $\theta_0 = 0$ tangente alla geodetica $\theta = 0$. Si posson allora associare due punti di S, S_0, che abbian le stesse coordinate polari ($\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$).

In questa corrispondenza ai circoli del piano col centro in P, rispondon i circoli geodetici della superficie col centro pure in P. La corrispondenza può quindi fisicamente realizzarsi così:

S'imagini il piano S_0 come un tessuto formato mediante due fasci di fibre: le une, inestendibili, che son le rette passanti per P, le altre, elastiche, che son i circoli di centro P. Tenuto fisso il punto P di S_0 ed il relativo intorno di 1° ordine, si può allora deformare il tessuto finchè venga a sovrapporsi ad S, per modo che le fibre inestendibili si adattino, ben tese, sulle geodetiche di S per P, con che le fibre elastiche s'adattano spontaneamente sui circoli geodetici di centro P.

Se su S_0 si scelgon due assi cartesiani u_0, v_0, formanti l'angolo ω, coll'origine in P e coll'asse $v_0 = 0$ coincidente con $\theta_0 = 0$, ad ogni punto del piano, di coordinate u_0, v_0, corrisponde su S, a deformazione avvenuta, un punto avente le medesime coor-

---

[5]) Vedi ad es. BIANCHI, loc. cit. [4]), pag. 196.

dinate cartesiane curvilinee ($u = u_0$, $v = v_0$), rispetto alle due geodetiche u, v, deformate delle rette u_0, v_0.

È appena necessario di avvertire che, invece di tener fisso P ed il relativo intorno di 1° ordine, cioè un circolo di raggio infinitamente piccolo, col centro in P, si può, nel sovrapporre S_0 ad S, tener fisso P e portare a coincidere una prefissata delle fibre elastiche circolari, col circolo geodetico di S, avente lo stesso raggio. Se a deformazione avvenuta, si vuole che ogni punto abbia conservato i valori iniziali delle coordinale polari e cartesiane, basterà operare in modo che i due punti della fibra circolare piana, corrispondenti a $\theta_0 = 0$ e a $\theta_0 = \omega$, vadano a sovrapporsi ai punti del circolo geodetico, corrispondenti agli stessi valori di θ.

Questo modo di considerare un intorno superficiale qualunque, come deformato d'un intorno piano, ci gioverà in seguito per illustrare la definizione riemanniana di curvatura d'una superficie o varietà.

3. ***Proprietà della corrispondenza biunivoca che nasce fra una superficie ed una sfera, associando le coppie di punti colle stesse coordinate cartesiane.*** — Gli stessi sistemi di coordinate, polari e cartesiane, definiti per S nel n° 1, li considereremo sopra una sfera $\overline{S}$ di raggio (reale o imaginario, finito od infinito) $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, assumendo ivi come polo, o rispettivamente origine delle coordinate, un punto $\overline{P}$. Conserveremo per la sfera le notazioni del n° 1, salvo che ogni simbolo letterale ad essa riferito, sarà sopralineato.

Per la sfera, $\frac{\overline{\rho}}{R}$ è la colatitudine dal polo $\overline{P}$ e $\overline{\theta}$ la longitudine dal meridiano $\overline{\theta} = 0$, così che la funzione $\overline{G}$ viene espressa da

$$\overline{G} = R^2 \sin^2 \frac{\overline{\rho}}{R} = \overline{\rho}^2 \left(1 - \frac{K}{3} \overline{\rho}^2 + \cdots\right).$$

È quasi superfluo di avvertire che, quando K sia negativa, e quindi $R = i R'$, con R' reale, si dovrà assumere come modello *reale* della sfera imaginaria $\overline{S}$, una superficie pseudosferica di raggio R', per la quale:

$$\overline{G} = \left(i R' \sin \frac{\overline{\rho}}{i R'}\right)^2 = R'^2 \sinh^2 \frac{\overline{\rho}}{R'}.$$

Con quest'avvertenza le ulteriori considerazioni valgono anche per $K < 0$, ad elementi reali di S corrispondendo sempre elementi reali della superficie sferica (o pseudosferica) su cui vogliamo rappresentare S.

Fra i punti di S ed i punti di $\overline{S}$, si può porre una corrispondenza biunivoca, chiamando omologhi due punti di S, $\overline{S}$ pei quali $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$ e quindi $\rho = \overline{\rho}$, $\theta = \overline{\theta}$. In questa corrispondenza le geodetiche di S uscenti da P (curve $\theta = \text{cost.}$) saranno mutate in geodetiche di $\overline{S}$ per $\overline{P}$, mentre alle altre geodetiche di S non corrisponderanno necessariamente geodetiche della sfera.

Assunti ora due archi finiti corrispondenti AB, $\overline{A}\,\overline{B}$ sopra linee omologhe, appartenenti agl'intorni di P, $\overline{P}$, vogliamo valutare l'ordine di grandezza della differenza fra le lunghezze di quei due archi, rispetto all'ordine di grandezza degl'intorni stessi.

Perciò scriviamo anzitutto:

$$u = \varepsilon x, \quad v = \varepsilon y \tag{8}$$

e quindi:

$$\rho = \varepsilon \delta \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\omega}\,,$$

ove ε è un parametro positivo determinante la grandezza dell'intorno (si può ad es. pensare che l'intorno di P sia l'insieme dei punti interni ad un circolo geodetico di raggio ε, col centro in P). Quanto alle x, y, esse son due nuove variabili numeriche, che assumeremo a coordinate del punto mobile M.

Analogamente sulla sfera porremo:

$$\overline{u} = \varepsilon\,\overline{x}, \quad \overline{v} = \varepsilon\,\overline{y}, \quad \overline{\rho} = \varepsilon\,\overline{\delta},$$

per guisa che all'intorno di P, avente l'ordine di grandezza ε, risponderà sulla sfera un intorno, di centro $\overline{P}$, avente lo stesso ordine di grandezza. E per due punti omologhi di coordinate $(x, y)(\overline{x}, \overline{y})$ si avrà $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$.

Il quadrato dell'elemento lineare di S, rispetto alle nuove coordinate x, y, s'ottiene dalla (6), mediante le (8); e viene:

$$ds^2 = \varepsilon^2\, d\sigma^2, \tag{9}$$

con:

$$d\sigma = \sqrt{E''\,dx^2 + 2\,F''\,dx\,dy + G''\,dy^2}\,, \tag{10}$$

ove E'', F'', G'' son le funzioni risultanti da E', F', G' mediante la sostituzione (8). Si noterà che i coefficienti della forma quadratica $d\sigma^2$ non contengon più il fattore ε, che essi son funzioni regolari di x, y, ε, anche per $\varepsilon = 0$, e che inoltre il discriminante $E''\,G'' - F''^2$, per x, y, ε reali, è essenzialmente positivo in tutto l'intorno considerato, ed eguale a $\sin^2\omega$ per $\varepsilon = 0$.

Ne deriva che — ove si scelga nella (10) il segno $+$ del radicale — lungo una linea limitata AB, di lunghezza finita l, su cui sia contato l'arco s, da A verso B, resta definita dalla (10) una funzione essenzialmente positiva σ, uguale ad $\dfrac{s}{\varepsilon}$.

Analoghe considerazioni si sottintendono sulla sfera $\overline{S}$, ove indichiamo con $\overline{A}\,\overline{B}$ l'arco omologo di AB e con $\overline{l}$ la sua lunghezza.

Ciò premesso, ricordando gli sviluppi di G, $\overline{G}$ nell'intorno di $\rho = \overline{\rho} = 0$, si trova:

$$E'' - \overline{E}'' = \varepsilon^3 e, \quad F'' - \overline{F}'' = \varepsilon^3 f, \quad G'' - \overline{G}'' = \varepsilon^3 g, \tag{11}$$

le e, f, g essendo funzioni regolari di x, y, ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$. E quindi, in virtù della (10) e dell'analoga sulla sfera, si otterrà:

$$d\sigma^2 = d\overline{\sigma}^2 + \varepsilon^3\, d\tau^2, \tag{12}$$

ove:

$$d\tau^2 = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2.$$

Riferendoci a punti variabili sugli archi omologhi AB, $\bar{A}\bar{B}$, la (12) potrà scriversi sotto la forma:

$$d\sigma - d\bar{\sigma} = \frac{\varepsilon^3 \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{1 + \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}} d\sigma$$

ove $\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2$ è, lungo AB, funzione regolare di σ, ε, anche per $\varepsilon = 0$; e $\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = \frac{d\bar{s}}{ds}$ è pure funzione regolare di σ, ε, costantemente maggior di zero, in quanto ad s crescente da A verso B, risponde $\bar{s}$ crescente da $\bar{A}$ verso $\bar{B}$.

Moltiplicando pertanto i due membri della precedente relazione per ε, e integrando da A a B, viene:

$$l - \bar{l} = \varepsilon^4 \int_0^\lambda \frac{\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{1 + \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}} d\sigma;$$

e siccome $\lambda = \frac{l}{\varepsilon}$ è una quantità finita nell'intorno di $\varepsilon = 0$, giacchè gli archi che si considerano hanno l'ordine di grandezza di ε, così risulta in definitiva:

$$(13) \qquad l - \bar{l} = \varepsilon^4 \varphi,$$

con φ funzione regolare di ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$.

E si conclude che:

La differenza fra le lunghezze di due archi finiti corrispondenti della superficie e della sfera, ha l'ordine di grandezza di ε^4.

Ci gioverà in seguito d'aver esplicitamente notato anche l'ordine di grandezza di $l^2 - \bar{l}^2$. Scrivendo questa differenza sotto la forma:

$$l^2 - \bar{l}^2 = (l - \bar{l})(l + \bar{l}),$$

ed osservando che l, $\bar{l}$ hanno l'ordine di grandezza di ε, se ne trae che $l^2 - \bar{l}^2$ ha l'ordine di grandezza di ε^5.

Vediamo ora qual'è l'ordine di grandezza della differenza fra gli angoli di due coppie di direzioni corrispondenti.

Sieno ds, δs due elementi lineari di S spiccati dal punto (u, v) a due punti infinitamente vicini $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$. Detto ω l'angolo delle due direzioni, verrà

$$\cos\omega = E' \frac{du}{ds}\frac{\delta u}{\delta s} + F'\left(\frac{du}{ds}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + G' \frac{dv}{ds}\frac{\delta v}{\delta s},$$

o, in coordinate x, y:

$$\cos\omega = E'' \frac{dx}{d\sigma}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + F''\left(\frac{dx}{d\sigma}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{\delta x}{\delta\sigma}\right) + G'' \frac{dy}{d\sigma}\frac{\delta y}{\delta\sigma}.$$

Analoga espressione si ha sulla sfera pel coseno dell'angolo $\bar{\omega}$ dei due elementi lineari corrispondenti. Tenendo presenti le (11), (12), e le

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma},$$

$$\frac{\delta x}{\delta \sigma} = \frac{\delta \bar{x}}{\delta \bar{\sigma}} \frac{\delta \bar{\sigma}}{\delta \sigma},$$

e analoghe per y, ne segue facilmente che $\cos\omega$, $\cos\bar{\omega}$ differiscono per termini del 3° ordine in ε, e mediante l'identità:

$$\sin\omega - \sin\bar{\omega} = \frac{(\cos\bar{\omega} - \cos\omega)(\cos\omega + \cos\bar{\omega})}{\sin\omega + \sin\bar{\omega}},$$

che anche $\sin\omega$, $\sin\bar{\omega}$, e quindi ω, $\bar{\omega}$, differiscon per termini del terzo ordine. Si conclude che:

La differenza fra due angoli corrispondenti ha l'ordine di grandezza di ε^3.

4. ***Contrazione infinitesima d'un intorno superficiale. Ordine di approssimazione per la applicabilità di un pezzo di superficie sopra una sfera.*** — In tutto quanto precede s'è tenuto costante il parametro ε. Adesso supporremo invece che ε varii, tendendo a zero, a partire da un valore iniziale $\varepsilon = \varepsilon_0$.

I punti degl'intorni omologhi considerati sulle S, $\bar{S}$, posson allora riguardarsi, in infiniti modi, come funzioni del parametro ε. Si può cioè associare ad ogni punto che sulla superficie (o sulla sfera) abbia inizialmente le coordinate cartesiane curvilinee $\varepsilon_0 x$, $\varepsilon_0 y$, il punto, ben determinato, di coordinate cartesiane $\varepsilon x'$, $\varepsilon y'$, con

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = x'(x, y, \varepsilon) \\ y' = y'(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

ove x', y' sieno arbitrarie funzioni regolari di x, y, ε, nell'intorno di $\varepsilon = 0$, tali che il determinante funzionale delle x', y' rispetto alle x, y, non sia nullo nello stesso intorno.

Se la sostituzione di variabili (14) è la *medesima* sulla superficie e sulla sfera, si dirà brevemente, allorchè ε tenda a zero, che si opera una *contrazione infinitesima simultanea dei due intorni di P, $\bar{P}$ su S, $\bar{S}$*, in quanto i punti dei due intorni, partendo dalle posizioni iniziali rispettive, si avvicinano di conserva a P, $\bar{P}$.

Il modo più semplice di operare una tal contrazione, è di prendere addirittura $x' = x$, $y' = y$. A questo modo di contrarre i due intorni si potranno riferire, per fissar le idee, le considerazioni successive.

Quando il valor iniziale ε_0 sia abbastanza piccolo, un arco AB di geodetica, che, sulla S, congiunga due punti A, B dell'intorno di P, risulterà individuato per ogni valor di ε, dalle posizioni dei suoi estremi, appena sieno segnati gli estremi iniziali A_0, B_0. E lo stesso dicasi dell'arco $\bar{A}\bar{B}$, non necessariamente geodetico, luogo dei punti omologhi sulla sfera. Denoteremo rispettivamente con l, $\bar{l}$ le lunghezze di questi due archi. Similmente indicheremo con $\bar{l}'$, l' le lunghezze dell'arco geodetico che sulla sfera congiunge $\bar{A}$, $\bar{B}$ e dell'arco omologo, congiungente A, B su S.

Le quantità l, l' $\bar{l}$, $\bar{l}'$ son funzioni regolari di ε, nell'intorno di $\varepsilon = 0$, infinitesime con ε. Poichè si è supposto ε_0 tanto piccolo, che sin dall'inizio della contrazione ogni arco geodetico dell'intorno di P o di $\bar{P}$ sia individuato dai suoi estremi, così i cammini geodetici segneranno sempre sugl'intorni corrispondenti al medesimo ε, il minimo percorso fra due punti, e sussisteranno perciò le diseguaglianze:

$$l' \geqq l, \quad \bar{l} \geqq \bar{l}'.$$

D'altronde a cagione della (13) (n° precedente), potrà scriversi:

$$l' = \bar{l}' + \varepsilon^4 \varphi, \quad l = \bar{l} + \varepsilon^4 \psi,$$

φ, ψ essendo funzioni regolari di ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$. Sottraendo a membro a membro le precedenti, viene:

$$(l' - l) + (\bar{l} - \bar{l}') = \varepsilon^4 (\varphi - \psi).$$

Ora, poichè le due differenze $l' - l$, $\bar{l} - \bar{l}'$, che son funzioni regolari di ε, non divengon mai negative nell'intorno di $\varepsilon = 0$, così nessuna di esse potrà essere di ordine minore di ε^4.

Si conclude dunque che:

« Ad una geodetica dell'una superficie, corrisponde sull'altra una linea, i cui archi « differiscono in lunghezza dagli archi geodetici aventi gli stessi estremi, per infinitesimi « del 4° ordine (rispetto ad ε, che sarà ormai assunto come infinitesimo principale) ».

Quanto agli angoli, infinitesimi con ε, formati in A, B dagli archi di lunghezze l, l', essi differiscon per infinitesimi del 3° ordine dagli angoli corrispondenti formati in A', B' dagli archi di lunghezze $\bar{l}$, $\bar{l}'$.

Ciò posto, se ABC è un triangolo geodetico infinitesimo tracciato su S, ed $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ son i punti della sfera corrispondenti ad A, B, C, alle lunghezze a, b, c dei lati BC, CA, AB del primo triangolo, potranno sostituirsi, a meno d'infinitesimi del 4° ordine, le lunghezze $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ dei lati del triangolo geodetico $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, e agli angoli α, β, γ del primo, gli angoli $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ del secondo, a meno d'infinitesimi del 3° ordine.

Ne deriva che, nell'intorno considerato di P, valgono su S tutte le relazioni di trigonometria sferica (o pseudosferica, quando la curvatura in P sia negativa), a meno d'infinitesimi del 3° ordine rispetto alle lunghezze dei lati dei triangoli geodetici, considerate come infinitesimi del 1° ordine.

Ma esaminando più davvicino la cosa, si vede che talune di queste relazioni valgono anche in un ordine di approssimazione superiore.

Così ad es. la relazione esprimente il teorema dei seni:

$$\sin \frac{\bar{a}}{R} : \sin \frac{\bar{b}}{R} : \sin \frac{\bar{c}}{R} = \sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma},$$

ove si ponga mente che le differenze $a - \bar{a}$, $b - \bar{b}$, $c - \bar{c}$ son del 4° ordine e le differenze $\alpha - \bar{\alpha}$, $\beta - \bar{\beta}$, $\gamma - \bar{\gamma}$ del 3° ordine, si muta *a meno d'infinitesimi del 4° ordine*, nella

$$\sin\frac{a}{R} : \sin\frac{b}{R} : \sin\frac{c}{R} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad {}^{6)},$$

mentre la relazione:

$$\cos\frac{\bar{a}}{R} = \cos\frac{\bar{b}}{R}\cos\frac{\bar{c}}{R} + \sin\frac{\bar{b}}{R}\sin\frac{\bar{c}}{R}\cos\bar{\alpha},$$

si muta, *a meno d'infinitesimi del 5° ordine,* nella:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha.$$

E infine la relazione:

$$\cos\bar{\alpha} = -\cos\bar{\beta}\cos\bar{\gamma} + \sin\bar{\beta}\sin\bar{\gamma}\cos\frac{\bar{a}}{R},$$

si muta nella analoga relativa agli elementi del triangolo ABC, soltanto *a meno d'infinitesimi del 3° ordine.*

Possiamo dunque enunciare:

Per l'intorno di un punto P di una superficie qualunque S, ove la superficie presenti la curvatura totale K, vale in seconda approssimazione, a meno d'infinitesimi del 3° ordine, la trigonometria sferica ($K > 0$) o pseudosferica ($K < 0$) (mentre in prima approssimazione vale la trigonometria piana). Talune relazioni di trigonometria sferica o pseudosferica, valgono anzi a meno d'infinitesimi del 4° ed anche del 5° ordine.

Nell'ordine di approssimazione così precisato, si può dire che *l'intorno del punto P è applicabile sulla sfera di raggio* $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

La proposizione dimostrata è di uso continuo in Geodesia, ove, con un'approssimazione in pratica soddisfacente, si applican le relazioni di trigonometria sferica a triangoli geodetici dell'ellissoide terrestre, i cui lati non vanno molto oltre i 200 chilometri.

Mi sia a tal proposito consentito di notare come le considerazioni che si fanno di solito per legittimar l'applicazione della trigonometria sferica ai triangoli geodetici terrestri, non appariscan del tutto esaurienti.

---

6) Che il teorema dei seni valga pei triangoli geodetici, a meno di quantità del 4° ordine, è notato anche in G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* III^e partie (Paris, Gauthier-Villars, 1894), pag. 170. Veramente DARBOUX considera, invece dei seni di $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, le *lunghezze ridotte* (secondo CHRISTOFFEL) dei lati a, b, c; ma queste lunghezze, a meno appunto di quantità del 4° ordine, riduconsi a quei seni (l. c., p. 190).

Riferendosi alla forma geodetica (4) del ds^2 sulla superficie S, ove, nell'intorno di P, è

$$\sqrt{G} = \rho - \frac{K}{6}\rho^3 - \lambda\rho^4 - \cdots,$$

ci si limita infatti ad osservare che, qualora, per ρ non superiore ad un limite prefissato, siano trascurabili, di fronte ad un certo ordine di approssimazione, le quantità $\lambda\rho^4$ e $\frac{K^2\rho^5}{5!}$, i ds^2 della S e della sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, possono scriversi sotto la stessa forma. E si conclude da ciò che, nello stesso ordine di approssimazione, l'intorno di P è applicabile sulla sfera di raggio R e che vale pertanto pei triangoli geodetici dell'intorno medesimo, la trigonometria sferica.

Ora questa deduzione abbisogna di qualche complemento:

1°) Perchè dal suddetto confronto non può trarsi *a priori* (senza cioè le considerazioni svolte sopra od altre equivalenti) alcuna conclusione circa la differenza fra le lunghezze degli archi *finiti* tracciati su S e sulla sfera, in quanto la (4), considerata come una relazione approssimata fra incrementi finiti ds, $d\rho$, $d\theta$, vale soltanto a meno di quantità del 3° ordine e non può pertanto servire a valutar la differenza fra i quadrati di due archi finiti della S e della sfera, a meno di quantità d'ordine superiore al 3°.

2°) Perchè non è senz'altro evidente che nello stesso ordine di approssimazione in cui le espressioni geodetiche dei ds^2, su S e sulla sfera, posson ritenersi eguali, ad un arco geodetico dell'una superficie possa sostituirsi un arco geodetico dell'altra.

Tuttavia la semplice considerazione riferita ha un ottimo valore induttivo, e basta analizzarla con un pò di cura, come noi abbiam fatto, per pervenire, con tutto il rigore, alla deduzione desiderata.

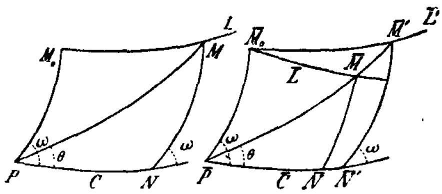
5. ***Linee di equidistanza (ortogonale ed obliqua) da una data geodetica, sopra una superficie qualunque*** S. — La sostituibilità della sfera alla superficie S, a meno d'infinitesimi del 4° ordine, per tutto quanto concerne le distanze geodetiche, vale anche, nello stesso ordine di approssimazione, per le lunghezze contate sopra famiglie di linee definite in modo invariante rispetto alle geodetiche. Per non dilungarci di soverchio, ci limiteremo a stabilir la cosa per una speciale famiglia di curve, di particolare interesse pel seguito.

Sopra una superficie S, chiameremo *linea di equidistanza* ρ_0 *secondo l'angolo* ω, *da una data geodetica* C, il luogo degli estremi dei segmenti geodetici, di lunghezza ρ_0, spiccati dai singoli punti di C, da una medesima banda della curva, ed in modo da formare col verso *positivo* di questa angoli eguali e dello stesso verso, o, come anche diremo brevemente, angoli corrispondenti eguali.

Così ad esempio, se S è una superficie a curvatura costante, le linee di equidistanza obliqua da una data geodetica C, coincidono colle linee di equidistanza ortogonale, o, ciò che è lo stesso, colle traiettorie ortogonali del fascio di geodetiche perpendicolari a C. Infatti, considerati sopra una, L, di queste traiettorie ortogonali, due punti, M, N, e condotte per essi due geodetiche che formino con C, rispettivamente nei punti H, K, angoli corrispondenti uguali, la distanza geodetica MH risulta uguale ad NK, perchè il movimento della S in sè, che lascia invariata C e che porta H in K, muta in sè L e porta M in N.

Per una sfera le linee di equidistanza obliqua, secondo un angolo arbitrario, da un dato equatore, sono i circoli a questo paralleli.

Ritornando alla superficie qualunque S, supponiamo, per maggior semplicità, che la geodetica fissa C, rispetto alla quale si vuol costruire la linea L di equidistanza ρ_0, obliqua secondo ω, sia la geodetica $\theta = 0$, del sistema di coordinate polari, considerate dal n° 1 in poi. Sia inoltre PM_0 il segmento geodetico che segna la distanza ρ_0, obliqua



(Fig. 1).

secondo ω, del punto $P(\rho = 0)$ di C dalla linea L. La qual linea, una volta dati C ed ω (coi relativi versi), è perfettamente individuata da uno qualunque dei suoi punti: in particolare da M_0.

Sulla sfera $\overline{S}$, alle due geodetiche C, PM_0, rispondono le geodetiche $\overline{C}(\overline{\theta} = 0)$ e $\overline{P}\overline{M}_0(\overline{\theta} = \omega)$, uscenti dal polo $\overline{P}$; e la distanza geodetica $\overline{P}\overline{M}_0$ del punto $\overline{M}_0$, omologo di M_0, da $\overline{P}$, uguaglia ρ_0.

Consideriamo su $\overline{S}$ la linea $\overline{L}'$ di equidistanza obliqua secondo ω da $\overline{C}$, individuata da $\overline{M}_0$, e la linea $\overline{L}$, pure uscente da $\overline{M}_0$, omologa di L. Ad un punto $M(\rho, \theta)$, variabile su L, risponde sulla sfera il punto $\overline{M}$ variabile su $\overline{L}$ ed avente le stesse coordinate ρ, θ. Associeremo ad $\overline{M}$ quel punto $\overline{M}'$ di $\overline{L}'$, che ha la stessa θ, cioè l'intersezione di $\overline{L}'$ colla geodetica $\overline{P}\overline{M}$.

Condotta per M la geodetica MN, che forma con C l'angolo ω, nel verso debito, ad essa risponderà su $\overline{S}$ una linea congiungente $\overline{M}$ col punto $\overline{N}$ omologo di $N(\overline{P}\overline{N} = PN)$; ma la linea che a noi preme di considerare su $\overline{S}$, è piuttosto la geodetica $\overline{M}'\overline{N}'$, sulla quale si misura la distanza ρ_0, obliqua secondo ω, del punto $\overline{M}'$ da $\overline{C}$. Posto $\overline{\rho}' = \overline{P}\overline{M}'$, il teorema dei seni, applicato al triangolo geodetico $\overline{P}\overline{N}'\overline{M}'$, porge:

$$\sin \frac{\overline{\rho}'}{R} \sin \theta = \sin \frac{\rho_0}{R} \sin \omega,$$

mentre dal triangolo geodetico PNM della superficie S, si ricava, a meno d'infinitesimi del 4° ordine (per es., rispetto a ρ, assunto come infinitesimo principale) (n° 4):

$$\sin\frac{\rho}{R}\sin\theta = \sin\frac{\rho_0}{R}\sin\omega.$$

Confrontando queste due relazioni, se ne trae che $\overline{\rho}'$ e ρ differiscono per quantità del 4° ordine. Ma poichè la differenza fra gli archi $\overline{M}_0\overline{M}$, $\overline{M}_0\overline{M}'$ è infinitesima con $\overline{\rho}' - \rho = \overline{M}\overline{M}'$, cioè col tendere di M ad M_0, così anch'essa risulterà di 4° ordine (almeno) rispetto a ρ.

D'altra parte gli archi omologhi $M_0 M$, $\overline{M}_0\overline{M}$ differiscon pure per quantità di 4° ordine (n° 4), dunque la differenza $\overline{M}_0\overline{M}' - M_0 M$ sarà dell'ordine di ρ^4. Si noti infine che le coordinate cartesiane curvilinee u, v del punto M di L, differiscon dalle analoghe del punto associato $\overline{M}'$ di $\overline{L}'$, per quantità di 4° ordine, come risulta senz'altro dalle (2) del n° 1.

Concludendo:

Nella applicabilità approssimata di un intorno superficiale qualunque, sopra una sfera, ad una linea di equidistanza, appartenente all'intorno, si può sempre sostituire, a meno di quantità di 4° ordine, sia per quel che concerne le coordinate curvilinee dei punti della linea, sia (quindi) per quel che concerne le lunghezze dei suoi archi, un parallelo della sfera.

Applicazioni: Alcune espressioni della curvatura totale di una superficie.

6. ***Espressione della curvatura totale mediante l'eccesso di un triangolo geodetico infinitesimo.*** — Dato sopra una superficie S un triangolo geodetico infinitesimo ABC, del quale indichiamo con a, b, c le lunghezze dei lati BC, CA, AB, con α, β, γ gli angoli opposti ai lati stessi, con Δ l'area, la formula (di Gauss):

$$K = \frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\Delta},$$

che esprime, a meno d'infinitesimi del 1° ordine, la curvatura di S nel vertice A (od in qualunque altro punto) del triangolo, si può ottenere come immediata conseguenza delle precedenti considerazioni.

Invero α, β, γ si posson, a meno di quantità del 3° ordine, considerare come angoli di un triangolo geodetico infinitesimo tracciato sopra una sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, ed i lati a, b, c si posson similmente considerare come lati dello stesso triangolo sferico, a meno di quantità del 4° ordine. Sicchè il rapporto $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma}$, a meno di quantità del 1° ordine, uguaglia $\frac{1}{R^2}$, cioè K.

7. *Espressione della curvatura totale mediante i lati di un triangolo geodetico rettangolo, infinitesimo.* — Sia ABC un triangolo geodetico infinitesimo, rettangolo in A, tracciato sopra una superficie qualunque S, e sieno a, b, c le lunghezze dei suoi lati, rispettivamente opposti ai vertici A, B, C. Potremo scrivere, a meno d'infinitesimi del 5° ordine (n° 4):

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R},$$

ove $K = \frac{1}{R^2}$ è la curvatura di S in A. Da questa, sostituendo ai coseni degli archi i loro sviluppi in serie fino al 4° ordine inclusivo, dopo facili riduzioni si trae, a meno del 5° ordine:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{1}{12 R^2}(b^4 + c^4 - a^4) + \frac{b^2 c^2}{2 R^2},$$

e, tenendo conto dell'identità:

$$b^4 + c^4 - a^4 = (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 + a^2) - 2 b^2 c^2,$$

si potrà anche scrivere:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{1}{12 R^2}(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 + a^2) + \frac{b^2 c^2}{3 R^2}.$$

Poichè i due termini del 2° membro sono del 4° ordine (almeno), di tale ordine risulterà pure $b^2 + c^2 - a^2$, e quindi il 1° termine del 2° membro sarà del 6° ordine. Trascurando questo termine viene:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{b^2 c^2}{3 R^2},$$

ossia:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{3} K;$$

e si può enunciare:

Avendosi sopra una superficie qualunque S un triangolo geodetico infinitesimo, rettangolo nel vertice A, se a è la lunghezza dell'ipotenusa e b, c son le lunghezze dei cateti, la curvatura K di S in A è espressa da:

$$K = 3\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2}$$

od anche da

$$K = \frac{3}{4}\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta^2},$$

Δ essendo l'area del triangolo.

Se, invece di un triangolo rettangolo, si fosse considerato un triangolo geodetico infinitesimo qualunque, avente l'angolo in A uguale ad α, si sarebbe ottenuto, in modo analogo:

$$K = 3\,\frac{b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha - a^2}{b^2 c^2 \sin^2\alpha}.$$

Questa espressione, valida a meno di termini del 1° ordine, è racchiusa in un'altra, valida a meno di termini del 2° ordine, che trovasi in DARBOUX [7]) e che, colle nostre

---

7) DARBOUX, loc, cit. 6), III partie, pag. 168, formula (35).

notazioni, si scrive sotto la forma:

$$2\,K_A + K_B + K_C = 12\,\frac{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha - a^2}{b^2\,c^2\sin^2\alpha},$$

ove K_A, K_B, K_C sono i valori — differenti tra loro per quantità del 1° ordine — della curvatura totale nei tre vertici del triangolo.

8. ***Espressione della curvatura mediante il parallelogrammoide di*** LEVI-CIVITA. — Sopra una superficie qualunque S consideriamo con LEVI-CIVITA [8]), un « parallelogrammoide » $P\,Q\,P'\,Q'$, cioè un quadrilatero geodetico, i cui lati opposti $P\,P'$, $Q\,Q'$ sieno eguali e formino colla « base » $P\,Q$ angoli corrispondenti eguali (ad ω) [9]).

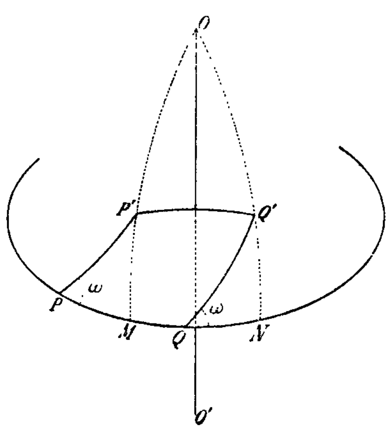
Quando si tenga fisso P e si faccian tendere a zero i lati del parallelogrammoide — in modo ch'essi si conservino infinitesimi dello stesso ordine, che si dirà primo — il limite dell'espressione $\frac{P\,Q^2 - P'\,Q'^2}{\Delta^2}$, ove $P\,Q$, $P'\,Q'$ son le lunghezze rispettive della « base » e della « soprabase » e Δ è l'area del quadrilatero, secondo ha provato il LEVI-CIVITA, uguaglia la curvatura di S in P.

Profittando della applicabilità approssimata dell'intorno di P sopra una sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, possiamo ormai pervenir di nuovo rapidamente a questo risultato.

Poichè nel calcolo del limite dell'espressione scritta, le quantità d'ordine maggior di 4 son trascurabili, tenuto conto che, a meno di quantità del 5° ordine,

$$\Delta^2 = P\,Q^2 \times P'\,Q'^2 \sin^2\omega,$$

e che, nello stesso ordine di approssimazione, ai quadrati delle lunghezze di archi geodetici tracciati su S, posson sostituirsi i quadrati delle lunghezze di archi geodetici della sfera, ci sarà lecito di eseguire il calcolo come se S fosse addirittura una sfera.



(Fig. 2).

8) M. § 17.

9) Definizione che particolarizza, per $n = 2$, quella del LEVI-CIVITA, relativa ad una V_n. Qui si tien conto che il parallelismo fra direzioni, considerato in M., per $n = 2$ riducesi alla relazione d'isogonalità. Ciò è provato in M. § 9 e risulterà del resto anche dal n° 11 del presente lavoro.

Si osserverà anzitutto che, detto $O\,O'$ l'asse perpendicolare al circolo massimo $P\,Q$, assunto come equatore della sfera, la rotazione attorno ad $O\,O'$, che porta P in Q, porta il circolo massimo $P\,P'$ nel circolo massimo $Q\,Q'$, il punto P' in Q', il meridiano di P' e la sua traccia M sull'equatore, rispettivamente sul meridiano di Q' e sulla relativa traccia N. Sicchè l'arco $M\,N$ risulta uguale a $P\,Q$, e i due triangoli geodetici $P\,M\,P'$, $Q\,N\,Q'$, che si sovrappongono a rotazione avvenuta, risultan pure uguali. Pertanto il parallelogrammoide rettangolo $M\,N\,P'\,Q'$ è equivalente a $P\,Q\,P'\,Q'$ ed, in luogo del rapporto iniziale, possiamo dunque considerare il rapporto $\frac{a^2 - a'^2}{a^2 b^2}$, ove si è posto $a = M\,N = P\,Q$, $a' = P'\,Q'$, $b = M\,P'$.

I punti P', Q', che derivan l'uno dall'altro mediante una rotazione attorno ad $O\,O'$, hanno la stessa latitudine $\lambda = \frac{b}{R}$, e inoltre la differenza fra le loro longitudini, eguaglia la differenza delle longitudini di M, N, cioè $\frac{a}{R}$. Ciò posto, dal triangolo geodetico isoscele $P'\,O\,Q'$ si ricava:

$$\cos\frac{a'}{R} = \sin^2\frac{b}{R} + \cos^2\frac{b}{R}\cos\frac{a}{R},$$

e quindi, a meno di quantità del 5^0 ordine:

$$a^2 - a'^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2} + \frac{1}{12}\,\frac{a^4 - a'^4}{R^2}.$$

Questa mostra, in primo luogo, che $a^2 - a'^2$ è infinitesima del 4^0 ordine, ed in secondo luogo che $a^4 - a'^4 = (a^2 - a'^2)(a^2 + a'^2)$ è infinitesima del 6^0 ordine, sicchè, a meno di termini del 5^0 ordine, si potrà anche scrivere

$$a^2 - a'^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2},$$

cioè:

$$\frac{a^2 - a'^2}{a^2 b^2} = K.$$

E possiamo quindi enunciare con Levi-Civita:

Per calcolare la curvatura totale K di una superficie S in punto P, si può ricorrere ad un parallelogrammoide infinitesimo $P\,Q\,P'\,Q'$, avente un vertice della base in P. Il rapporto fra la differenza $P\,Q^2 - P'\,Q'^2$ dei quadrati della base e della soprabase e il quadrato dell'area del parallelogrammoide, eguaglia allora K.

Se alla soprabase geodetica $P'\,Q'$ del parallelogrammoide, si sostituisce l'arco di linea di equidistanza $P\,P'$, obliqua secondo ω, dalla base $P\,Q$ (n° 5), il nuovo quadrilatero così ottenuto dà luogo ad un'espressione di K identica a quella sopra trovata.

Per dimostrar quest'affermazione potremo (n° 5) riferirci ancora ad una sfera S. Faremo il calcolo supponendo anzi che il quadrilatero $P\,Q\,P'\,Q'$, avente come soprabase un arco di linea di equidistanza, cioè (n° 5) un arco di parallelo, abbia dimensioni finite.

Come nel caso precedente, al nuovo quadrilatero sostituiremo un quadrilatero rettangolo analogo ed equivalente, $MNP'Q'$, tenuto conto che il parallelo luogo dei punti di distanza obliqua PP' dell'equatore, è pur luogo dei punti di distanza ortogonale $P'M$.

Indicando con a'' la lunghezza dell'arco di parallelo $P'Q'$ e conservando pel resto le notazioni precedenti, poichè il raggio del parallelo $P'Q'$ è $R\cos\lambda$ e l'angolo sotteso dall'arco $P'Q'$ è $\frac{a}{R}$, verrà:

$$a'' = a\cos\lambda$$

e quindi:

$$a^2 - a''^2 = a^2\sin^2\lambda.$$

Prese a coordinate, sulla sfera, la longitudine φ dal meridiano OM e la latitudine λ dell'equatore PQ, l'area Δ del quadrilatero $MNP'Q'$ risulta espressa da:

$$\Delta = \int_0^\lambda \int_0^{\frac{a}{R}} R^2\cos\lambda\, d\lambda\, d\varphi = aR\sin\lambda.$$

Si ha pertanto in definitiva:

$$\frac{a^2 - a''^2}{\Delta^2} = \frac{1}{R^2} = K,$$

cioè il teorema:

Data una superficie a curvatura costante, si costruisca su essa un quadrilatero finito $PQP'Q'$, avente per base un segmento geodetico PQ, per lati due segmenti geodetici eguali, formanti colla base angoli corrispondenti uguali (ad un prescelto ω), e per ulteriore lato $P'Q'$ l'arco di linea di equidistanza PP' (obliqua secondo ω) da PQ. Allora la curvatura K della superficie è espressa da

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

Δ essendo l'area del quadrilatero.

Lo stesso teorema, quando il quadrilatero $PQP'Q'$ sia infinitesimo, vale pure per una superficie a curvatura variabile.

Osservazione. — Riferendoci ancora ad una superficie a curvatura variabile, è opportuno porre in rilievo come la circostanza che alla soprabase di un parallelogrammoide geodetico infinitesimo, si possa sostituire un arco di linea di equidistanza, senza che perciò cessi di valere l'espressione limite $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ della curvatura, non è legata alla speciale natura dell'arco $P'Q'$ con cui si completa il parallelogrammoide. Il Levi-Civita ha infatti osservato che *come soprabase del parallelogrammoide si può prendere un arco arbitrario, congiungente i vertici P', Q'*. Si sottintende, naturalmente, che la linea $P'Q'$, sopra cui si conta quest'arco, resti ben determinata, durante la contrazione del quadrilatero $PQP'Q'$, e ch'essa continui ad avere per limite la geodetica PQ.

Questo complemento può stabilirsi agevolmente nel modo che segue.

Se a' è la lunghezza dell'arco geodetico $P'Q'$ ed l la lunghezza di un altro arco, situato sopra una linea ben definita, congiungente P', Q', designando con m la lunghezza del segmento rettilineo $P'Q'$, si ha, a meno di quantità del 4° ordine:

$$l = m + \frac{m^3}{24 R^2}, \quad m = a' - \frac{a'^3}{24 R'^2},$$

ove $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ son le flessioni rispettive, in P', degli archi l, a' [10]).

Ne deriva, sempre fino al 3° ordine inclusivo:

$$l = a' + \frac{a'^3}{24}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right).$$

Ora, quando il parallelogrammoide si contrae tendendo a P, poichè le due linee considerate, pei punti P', Q', hanno ambedue per limite la geodetica prefissata PQ, le flessioni $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ tendon verso lo stesso limite, e la differenza $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}$ risulta perciò infinitesima. Ne segue che la differenza $l - a'$ e del 4° ordine è la differenza $l^2 - a'^2$ del 5° ordine.

Nel calcolo del limite di $\frac{PQ^2 - a'^2}{\Delta^2}$, si può pertanto sostituire l^2 ad a'^2; che è quanto avevamo affermato.

9. ***Quadrilateri di* Saccheri, *di* Lambert, *di* Riemann. *Espressioni della curvatura ad essi inerenti.*** — Quando si tratti d'una superficie a curvatura costante, un parallelogrammoide geodetico rettangolo di Levi-Civita, riducesi alla figura fondamentale della geometria piana di Saccheri, che è appunto un quadrilatero birettangolo isoscele [11]).

Anche la figura fondamentale della geometria piana di Lambert, che è un quadrilatero trirettangolo [12]), dà luogo, sopra una superficie S, a curvatura costante o variabile, alla stessa espressione della curvatura, cui si perviene col parallelogrammoide di Levi-Civita.

Per vederlo, possiamo, al solito, assimilare l'intorno di un punto P, ove la nostra superficie presenti la curvatura K, ad un intorno sferico di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ Un quadrilatero $PQP'Q'$ di Lambert risulta allora costituito da un circolo massimo PQ, che

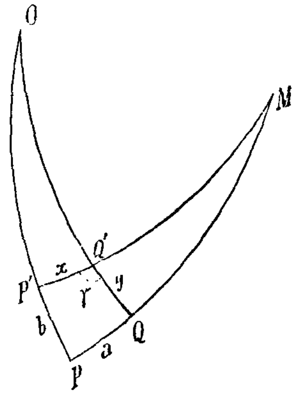
---

[10]) Per l'espressione della differenza tra un arco e la relativa corda ved. per es. G. Humbert, *Cours d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars, 1903), t. I, p. 401. La stessa espressione vale evidentemente qualunque sia la dimensione dello spazio euclideo in cui la superficie è immersa.

[11]) Cfr. per es. R. Bonola, *La geometria non-euclidea* (Bologna, Zanichelli, 1906), p. 21.

[12]) Bonola, loc. cit., p. 39.

si assumerà come equatore, da due meridiani PP', QQ' e da un circolo massimo



(*Fig. 3*).

$P'Q'$, normale al meridiano PP' in P' ed appoggiato in Q' al meridiano QQ' [13]).

Detto O quello dei due poli dell'equatore PQ, che trovasi dalla stessa banda del quadrilatero, M il polo del circolo massimo PP' che trovasi dalla stessa parte del quadrilatero, e posto $PQ = a$, $PP' = b$, $P'Q' = x$, $QQ' = y$, il teorema dei seni, applicato al triangolo $OP'Q'$, rettangolo in P', porge:

$$\cos\frac{y}{R}\sin\gamma = \cos\frac{b}{R}, \quad \cos\frac{y}{R}\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{x}{R},$$

ove γ denota il quarto angolo del quadrilatero di LAMBERT; e similmente il triangolo MQQ', rettangolo in Q, dà:

$$\cos\frac{x}{R}\sin\gamma = \cos\frac{a}{R}.$$

Eliminando fra queste $\sin\gamma$ e $\cos\frac{y}{R}$, s'ottiene:

$$\operatorname{tang}\frac{x}{R} = \operatorname{tang}\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R},$$

dalla quale, quadrando e sostituendo alle linee trigonometriche i loro sviluppi in serie, si trae, a meno di quantità del 5° ordine:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{2x^4}{3R^4} = \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{2a^4}{3R^4}\right)\left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right),$$

od anche:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2b^2}{R^2} - \frac{2(a^4 - x^4)}{3R^2}.$$

[13]) Si sottindende che, delle due intersezioni di ciascuno dei circoli massimi considerati, si sceglie quella che appartiene all'intorno di P.

Questa prova che $a^2 - x^2$ è del 4° ordine e che $a^4 - x^4 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$ è del 6° ordine. Si potrà perciò scrivere, a meno di quantità del 5° ordine:

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{R^2} = K.$$

È dunque vero che *il quadrilatero di* LAMBERT *dà luogo alla stessa espressione della curvatura a cui si perviene mediante il quadrilatero di* SACCHERI — LEVI-CIVITA.

Un'altra espressione notevole della curvatura, s'ottiene mediante un *quadrilatero di* RIEMANN. Chiamiamo così un quadrilatero $P\,Q\,P'\,Q'$ che, sopra una superficie qualunque S, s'ottenga come trasformato di un parallelogrammo, col vertice in P, appartenente al piano S_0, ivi tangente ad S, allorquando si deforma S_0, fino a portarlo a coincidere con S, nel modo indicato al n° 2.

Designata con a la lunghezza dell'arco geodetico $P\,Q$ e con b la lunghezza dell'arco geodetico $P\,P'$, gli altri due lati $Q\,Q'$, $P'\,Q'$ del quadrilatero di RIEMANN, stanno rispettivamente sulle linee $u = a$, $v = b$ di un sistema di coordinate cartesiane curvilinee, avente per assi $v = 0$, $u = 0$ le geodetiche $P\,Q$, $P\,P'$ (n° 2).

La ragione della denominazione adottata sta in ciò: che il calcolo della curvatura d'una superficie [o d'una varietà (ved. il n° 10)] accennato dal RIEMANN nella sua celebre Memoria sui fondamenti della geometria, si riduce alla valutazione del rapporto $\dfrac{P\,Q^2 - P'\,Q'^2}{\Delta^2}$, ove Δ è l'area del quadrilatero $P\,Q\,P'\,Q'$, supposto infinitesimo [14]).

Prese, come sopra si è detto, le geodetiche $P\,Q$, $P\,P'$ a linee $v = 0$, $u = 0$, di un sistema di coordinate cartesiane curvilinee, nel caso d'una superficie, la valutazione di questo rapporto si fa immediatamente partendo dall'espressione del $d\,s^2$ in coordinate cartesiane (n° 1). Poichè il punto P' ha le coordinate $(0,\ b)$ e Q' le coordinate $(a,\ b)$, si avrà:

$$P'\,Q'^2 = E'(0,\ b)\,a^2,$$

con

$$E' = 1 + \left(\frac{G}{\rho^2} - 1\right)\sin^2\theta.$$

Le coordinate polari del punto P' sono $\rho = b$, $\theta = \omega$, ove ω è l'angolo delle $P\,Q$, $P\,P'$: cosicchè, tenendo presente lo sviluppo di G nell'intorno di $\rho = 0$, si avrà, a meno di termini del 5° ordine:

$$P'\,Q'^2 = \left(1 - \frac{K}{3}\,b^2 \sin^2\omega\right)a^2,$$

K essendo la curvatura di S in P; e quindi:

$$P\,Q^2 - P'\,Q'^2 = \frac{K}{3}\,a^2\,b^2 \sin^2\omega.$$

---

14) Per la citazione dettagliata dei passi corrispondenti dalle Gesammelte Werke del RIEMANN, nonchè per la dimostrazione del fatto che effettivamente la definizione del RIEMANN può presentarsi sotto questa forma, ved. il n° 10 del presente lavoro.

E siccome infine, a meno d'infinitesimi del 5^o ordine, $a^2 b^2 \sin^2 \omega$ uguaglia Δ^2, così viene, a meno d'infinitesimi del 1^o ordine:

$$\frac{P Q^2 - P' Q'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{3} K,$$

che è la formula di RIEMANN per le superficie.

Possiamo enunciare, concludendo:

Se si considera l'intorno di un punto P d'una superficie qualunque S, come proveniente dalla deformazione d'un intorno piano, tessuto con un fascio di fibre rettilinee inestendibili e con un fascio di fibre circolari elastiche, la curvatura totale K di S in P, risulta espressa da

$$K = 3 \frac{P Q^2 - P' Q'^2}{\Delta^2},$$

essendo $P Q P' Q'$ *un quadrilatero infinitesimo, d'area* Δ, *tracciato su* S, *proveniente dalla deformazione di un parallelogrammo col vertice in* P.

OSSERVAZIONE. — Un altro quadrilatero $P Q P' Q'$, la cui considerazione si presenta spontanea sopra una superficie S, è quello costituito da due geodetiche $P Q$, $P P'$, formanti in P l'angolo ω, e da due linee $P' Q'$, $Q Q'$ di equidistanza obliqua secondo ω, dalle due geodetiche.

A meno di quantità del 4^o ordine, rispetto alle lunghezze dei lati d'un tal quadrilatero, possiamo ancora assimilare la nostra superficie ad una sfera (n^o 5). Il quadrilatero $P Q P' Q'$ è allora formato da due circoli massimi $P Q$, $P P'$ e da due circoli minori $P' Q'$, $Q Q'$ ad essi rispettivamente paralleli.

Supporremo, per semplicità, $\omega = \frac{\pi}{2}$. Posto $P Q = a$, $P P' = b$, $P' Q' = x$, si osservi che i punti Q, Q', situati sopra un piano parallelo a quello del circolo massimo $P P'$, sono equidistanti da quest'ultimo piano; sicchè i seni degli archi $P Q$, $P' Q'$, le cui rispettive misure in radianti sono $\frac{a}{R}$, $\frac{x}{R \cos \lambda}$ — ove $\lambda = \frac{b}{R}$ è la latitudine del parallelo $P' Q'$ rispetto all'equatore $P Q$ — risultan inversamente proporzionali ai raggi dei rispettivi circoli. Si ha cioè:

$$(15) \qquad R \cos \frac{b}{R} \sin \frac{x}{R \cos \frac{b}{R}} = R \sin \frac{a}{R},$$

donde, a meno di termini del 5^o ordine (sulla sfera):

$$x - \frac{x^3}{6 R^2} = a - \frac{a^3}{6 R^2},$$

ossia:

$$(16) \qquad x - a = \frac{x^3 - a^3}{6 R^2}.$$

Questa prova anzitutto che la differenza $x - a$ è del 3° ordine (almeno) e quindi che $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ è del 5° ordine.

E ritornando ancora una volta alla (16), la quale vale, sulla sfera, fino al 4° ordine inclusivo, se ne deduce che *sulla sfera*, $x - a$ è del 5° ordine.

Ma sulla superficie S qualunque, da cui siano partiti, si può affermar soltanto che la differenza $x - a$ è del 4° ordine, perchè è appunto questo l'ordine di approssimazione nel quale, date le nostre premesse, ci è lecito di scriver la (15).

Concludendo:

Il quadrilatero racchiuso sopra una superficie qualunque S, da due geodetiche perpendicolari e da due linee ad esse parallele (linee di equidistanza ortogonale), a meno di quantità del 4° ordine, ha i lati opposti uguali.

Pertanto, nell'ordine di approssimazione considerato, un tal quadrilatero si rassomiglia ad un rettangolo piano più di ogni altro quadrilatero della superficie, che, come quelli di Saccheri, di Lambert, di Riemann, conservi qualcuna delle proprietà caratteristiche d'un rettangolo piano. La cosa, come si vedrebbe senza difficoltà, vale anche quando le due geodetiche PQ, PP' si tagliano sotto un angolo ω, non retto: il quadrilatero $PQP'Q'$ racchiuso dalle PQ, PP' e da due linee di equidistanza secondo ω, dalle due date geodetiche, si rassomiglia cioè ad un parallelogrammo piano più di ogni altro quadrilatero di S.

Ritorniamo per poco al quadrilatero trirettangolo $PQP'Q'$, d'area Δ, racchiuso, sopra una superficie S, da due geodetiche ortogonali PQ, PP' e da due linee ad esse parallele. Assimiliamo S ad una sfera e, indicato con γ il quarto angolo del quadrilatero, fissiamo l'attenzione sul triedro $Q'(MNO)$, avente per spigoli $Q'M$, $Q'N$, le tangenti rispettive in Q' ai circoli minori $Q'P'$, $Q'Q$ e per spigolo $Q'O$, l'intersezione dei piani di questi circoli. Le faccie $MQ'O$, $NQ'O$ uguaglian rispettivamente gli angoli sottesi dagli archi $Q'P'$, $Q'Q$, aumentati di $\frac{\pi}{2}$. Per la (15), si avrà pertanto:

$$\cos MQ'O = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{R\cos\frac{b}{R}}\right) = -\frac{\sin\frac{a}{R}}{\cos\frac{b}{R}};$$

e similmente:

$$\cos NQ'O = -\frac{\sin\frac{b}{R}}{\cos\frac{a}{R}}.$$

Tenendo ora conto che il diedro opposto alla faccia $MQ'N = \gamma$, è retto, si può scrivere:

$$\cos\gamma = \cos MQ'O \cos NQ'O = \operatorname{tang}\frac{a}{R}\operatorname{tang}\frac{b}{R},$$

donde si trae, a meno di quantità del 4° ordine, sulla sfera:

$$\cos\gamma = \frac{ab}{R^2}.$$

Ma poichè la penultima relazione vale su S a meno di quantità del 3^o ordine, così può scriversi in definitiva, a meno del 1^o ordine:

$$K = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta} .$$

Dunque: *Detti γ il quarto angolo e Δ l'area di un quadrilatero rettangolo infinitesimo, come quello dell'enunciato precedente, la curvatura di S nel vertice opposto a γ è espressa da*

$$K = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta} .$$

Un'espressione analoga s'ottiene da un quadrilatero trirettangolo geodetico (di LAMBERT), decomponendolo con una diagonale in due triangoli geodetici e applicando la formula di GAUSS (n° 6). Viene così:

$$K = \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\Delta} ,$$

ove γ è ancora il quarto angolo del quadrilatero d'area Δ e K la curvatura nel vertice opposto.

È superfluo di avvertire che in questo ed in tutti gli altri enunciati, soltanto per comodità ci si riferisce ad un punto fisso dell'area mediante cui si definisce la curvatura, giacchè in realtà i valori di K nei diversi punti dell'area sono eguali, a meno d'infinitesimi del 1^o ordine.

CAPITOLO II.

Sulla curvatura riemanniana d'una varietà e sul parallelismo fra direzioni introdotto dal LEVI-CIVITA.

10. ***Curvatura d'una varietà secondo la definizione originaria del* RIEMANN. *Interpretazione geometrica.*** — Le precedenti considerazioni conducono ad una ricostruzione geometrica della teoria della curvatura d'una varietà, secondo il RIEMANN. All'uopo, fissiamo sopra una varietà V_n, a metrica qualsiasi, una superficie geodetica σ [15]), avente

---

[15]) Cioè il luogo delle geodetiche spiccate da P secondo direzioni appartenenti a un dato fascio. Cfr. per es. BIANCHI, loc. cit., vol. I, pag. 339.

il centro in un punto P di V_n, individuata da due geodetiche distinte PQ, PP'. La curvatura di V_n, secondo la giacitura con cui σ esce da P, è definita dal RIEMANN mediante uno di quei quadrilateri, tracciati sopra σ, che già nel n° 9 chiamammo appunto quadrilateri di RIEMANN.

Il RIEMANM procede infatti così [16]):

A coordinate di un punto M variabile su V_n, egli prende anzitutto la distanza geodetica $\rho = PM$ ed i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ della direzione con cui la geodetica PM esce da P (coordinate geodetiche polari). Introduce quindi su V_n le coordinate cartesiane curvilinee $u_1, u_2, \ldots, u_n$, definite dalle:

$$u_1 = \rho\alpha_1, \quad u_2 = \rho\alpha_2, \ldots, \quad u_n = \rho\alpha_n,$$

colla condizione ulteriore — diretta ad abbreviare i calcoli — che sia

$$\rho^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2. \tag{17}$$

Le coordinate cartesiane ch'egli considera, son cioè ortogonali;. noi, non avendo nel seguito da sviluppar calcoli, potremo anche omettere la condizione (17), lasciando che le direzioni con cui le linee (geodetiche) coordinate escon da P, sieno comunque inclinate (purchè beninteso fra loro linearmente indipendenti) [17]).

Fissati due punti $Q(u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n)$, $P'(u_1 = b_1, \ldots, u_n = b_n)$ infinitamente vicini a P, secondo direzioni distinte, il RIEMANN considera il punto Q' di coordinate $a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n$, e valuta il quadrato dell'elemento lineare $P'Q'$, giungendo alla conclusione che il rapporto fra la differenza $P'Q'^2 - PQ^2$ e il quadrato dell'area del triangolo $P'PQ$, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, uguaglia la curvatura gaussiana in P della superficie geodetica σ, contenente le direzioni $(PQ)(PP')$, moltiplicata pel coefficiente $-\frac{4}{3}$ [18]).

Noi possiamo ormai pervenire rapidamente, per via geometrica semplice, alla conclusione del RIEMANN.

---

[16]) *Ueber die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde liegen* (Gesammelte Mathematische Werke, Leipzig, Teubner, 1876, pp. 254-269), p. 261. Ved. anche il Commento del WEBER al frammento postumo n° XXII (p. 384).

[17]) Indicata con u_1 la linea coordinata, uscente da P, lungo cui son costanti le $u_2, \ldots, u_n$; con u_2 quella lungo cui son costanti le $u_1, u_3, \ldots, u_n$, etc; si ha in generale

$$\rho = \sum_i u_i^2 + 2\sum_{i,j} u_i u_j \cos(u_i u_j).$$

L'angolo che la geodetica $l = PM$ forma in P colla linea u_i, è espresso da $\cos(lu_i) = \sum_j \alpha_j \cos(u_i u_j)$. Tutto ciò deriva ovviamente dalla formola che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni sopra V_n. Cfr. ad es. BIANCHI, loc. cit. vol. I, pag. 331.

[18]) Vedi le riflessioni critiche del LEVI-CIVITA (alla fine di *M.*) sul calcolo accennato dal RIEMANN e sviluppato più ampiamente dal WEBER.

Considerato invero, nello spazio euclideo S_N — di dimensione N abbastanza grande — ove la V_n può sempre supporsi immersa, lo spazio euclideo S_n, tangente a V_n in P, a somiglianza di quanto già facemmo per le superficie nei n^i 2 e 9, assumeremo in S_n, come assi di un sistema cartesiano $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)})$, le tangenti in P alle linee $u_1, u_2, \ldots, u_n$ del sistema cartesiano già definito entro V_n, ed associeremo due punti di S_n e di V_n, che abbian le stesse coordinate $(u_i^{(0)} = u_i)$.

La corrispondenza si realizza al solito riguardando S_n come costituito da fibre rettilinee inestendibili, uscenti da P, e da ipersfere elastiche, ad $n - 1$ dimensioni, di centro P; ed applicando S_n su V_n in modo che resti fermo P e il relativo intorno di 1° ordine. Mediante la corrispondenza considerata, un piano σ_0 di S_n uscente da P, concepito come sostegno di un fascio di raggi di centro P, vien trasformato in una superficie geodetica σ di V_n, concepita come sostegno di un fascio di linee geodetiche uscenti da P e tangenti al piano σ_0.

Ai punti Q, P' di V_n corrispondono in S_n, i punti Q_0, P'_0, aventi le stesse coordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ [nel caso in esame Q_0, P'_0 coincidon rispettivamente con Q, P', perchè questi si son supposti infinitamente vicini a P], e al punto Q' corrisponde il punto $Q'_0(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$. Ora, le rette PP'_0, $Q_0 Q'_0$, essendo rappresentate, in coordinate correnti $u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}$, dalle equazioni rispettive:

$$\frac{u_1^{(0)}}{b_1} = \frac{u_2^{(0)}}{b_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)}}{b_n}$$

$$\frac{u_1^{(0)} - a_1}{b_1} = \frac{u_2^{(0)} - a_2}{b_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)} - a_n}{b_n},$$

son parallele; e così son parallele le rette PQ_0, $P'_0 Q'_0$ rappresentate dalle:

$$\frac{u_1^{(0)}}{a_1} = \frac{u_2^{(0)}}{a_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)}}{a_n}$$

$$\frac{u_1^{(0)} - b_1}{a_1} = \frac{u_2^{(0)} - b_2}{a_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)} - b_n}{a_n}.$$

Dunque la figura $PQ_0P'_0Q'_0$ di S_n, è un parallelogrammo. Mediante la corrispondenza fra S_n e V_n, il piano σ_0 di questo parallelogrammo, si muta, come s'è detto, nella superficie geodetica σ definita dalle due direzioni (PQ), (PP'), ed il parallelogrammo si muta nel quadrilatero $PQP'Q'$ di σ, il quale risulta così un quadrilatero riemanniano, secondo la definizione del n° 9.

Resta pertanto provato che, indicata con Δ l'area di $PQP'Q'$ e con K la curvatura gaussiana di σ in P, si ha:

$$\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{3} K,$$

e questa è appunto, salvo la forma, l'affermazione del RIEMANN.

Si conclude che:

Data una varietà V_n, a metrica qualsiasi, la curvatura K di V_n in un punto P, secondo un'assegnata giacitura, si può calcolare nel modo seguente:

« Sul piano σ_0, tangente in P alla prefissata giacitura, si costruisca un parallelo-« grammo infinitesimo con un vertice in P; e concepito il piano σ_0 come inestendibile « lungo le rette uscenti da P, e come elastico sulle direzioni a queste ortogonali, si de-« formi σ_0, lasciando fermo l'intorno di 1° ordine di P, finchè le fibre inestendibili di σ_0 « si distendano su altrettante geodetiche di V_n.

« Indicato con $P\,Q\,P'\,Q'$ il quadrilatero di V_n, deformato del parallelogrammo di « σ_0, viene

$$K = 3\,\frac{P\,Q^2 - P'\,Q'^2}{\Delta^2},$$

« ove Δ è l'area del suddetto quadrilatero ».

11. ***Definizione geometrica intrinseca del parallelismo di*** LEVI-CIVITA. ***Equazioni differenziali relative.*** — Per arrivar geometricamente, in modo semplice, alla definizione della curvatura d'una V_n, mediante un parallelogrammoide di LEVI-CIVITA, indicheremo anzitutto una definizione geometrica intrinseca del parallelismo fra direzioni, la quale ci offrirà subito il modo di ricondurre tutto alle superficie (geodetiche) tracciate in V_n.

Dati sopra V_n due punti A, A_1 infinitamente vicini, ed una direzione (ξ) uscente da A ed appartenente a V_n, la *direzione* (ξ_1) *parallela a* (ξ), *condotta per* A_1, verrà definita nel modo seguente:

Si consideri la superficie geodetica σ, di centro A, individuata dalla giacitura che contiene le direzioni (ξ) ed $(A\,A_1)$: allora la direzione (ξ_1) è quella che *sopra* σ forma colla geodetica $A\,A_1$ un angolo (corrispondente) uguale a quello formato da (ξ), $(A\,A_1)$. S'intende qui incluso il caso in cui (ξ) tocchi in A la geodetica $A\,A_1$: soltanto in questo caso la σ non è individuata, potendosi scegliere fra le infinite superficie geodetiche di centro A, contenenti la geodetica $A\,A_1$.

Conservando le notazioni del LEVI-CIVITA, indicheremo con $\xi^{(i)}$ i parametri della direzione (ξ) entro l'ambiente V_n, con x'_i i parametri della direzione $(A\,A_1)$, con $x_i^{(0)}$ le coordinate di A. Si avrà allora la rappresentazione parametrica:

$$(18)\qquad x_i = x_i^{(0)} + x'_i u + \xi^{(i)} v - \frac{1}{2}\sum_{jl}\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}(x'_j u + \xi^{(j)} v)(x'_l u + \xi^{(l)} v) + \cdots$$

della superficie σ nell'intorno di A [19], ove $\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}$ sono i soliti simboli di CHRISTOFFEL, relativi a V_n, e le coordinate curvilinee u, v di un punto P di σ, son definite da

$$(19)\qquad u = \rho\,\alpha, \quad v = \rho\,\beta,$$

essendo ρ la distanza geodetica $A\,P$ ed $\alpha\,x'_i + \beta\,\xi^{(i)}$ i parametri, entro V_n, della direzione con cui la geodetica $A\,P$ esce da A.

---

[19]) Cfr. BIANCHI, loc. cit., vol. I, pag 339.

Indichiamo con ω l'angolo, fra o e π, delle direzioni $(A A_1)$, (ξ), con θ l'angolo, fra o e π, che $(A A_1)$ forma con una direzione variabile $\alpha x'_i + \beta \xi^{(i)}$. Allora, tenendo presente la formola, già citata [alla nota (17)], che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni, entro V_n, si ottengon subito le relazioni:

$$\cos\theta = \alpha + \beta\cos\omega, \quad \cos(\omega - \theta) = \alpha\cos\omega + \beta,$$

donde si trae:

$$\alpha = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}, \quad \beta = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}.$$

Le u, v coincidon pertanto sopra σ colle coordinate cartesiane curvilinee già considerate nel n° 1. Pel ds^2 di σ si ha perciò l'espressione (6) del n° 1.

Ne deriva che l'angolo γ, formato in un punto P della geodetica $A A_1$ $(\theta = 0)$, dalla direzione positiva di questa linea, colla direzione positiva della linea $u =$ cost., uscente da P, è dato da [20]:

$$\cos\gamma = \frac{F'}{\sqrt{E' G'}} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\overline{G}}{\rho^2} - 1\right)\sin^2\omega}},$$

ove con $\overline{G}$ s'è indicata la funzione G per $\theta = 0$.

La precedente, mediante la formula del binomio, può anche scriversi:

$$\cos\gamma = \cos\omega\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{G}}{\rho^2} - 1\right)\sin^2\omega + \cdots\right].$$

Ricordando lo sviluppo di $\overline{G}$ secondo le potenze ascendenti di ρ, nell'intorno di $\rho = 0$ (n° 1), si trae subito:

$$\cos\gamma = \cos\omega(1 + \mu\rho^2 + \cdots) \qquad (\mu \text{ costante}),$$

la quale prova che, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, la direzione con cui esce da A_1 la relativa linea $u =$ cost., coincide con (ξ_1).

Pertanto le costanti superficiali, in A_1, della suddetta linea $u =$ cost., s'identificano colle costanti superficiali della direzione (ξ), le quali, a norma delle (19), sono:

$$\left(\frac{du}{ds}\right)_A = 0, \quad \left(\frac{dv}{ds}\right)_A = 1,$$

ove ds denota l'elemento lineare sulla $u = 0$ e φ_A il valore in A di una generica funzione φ del punto mobile su σ.

Sicchè, sopra la linea $u =$ cost. che esce da A_1 sarà $\left(\frac{dv}{ds'}\right)_{A_1} = 1$, ds' indicando l'elemento lineare su detta linea.

---

[20]) BIANCHI, loc. cit., vol. I, pag. 195.

Le costanti della direzione (ξ_1), entro V_n, saranno perciò date da:

$$\xi_1^{(i)} = \left(\frac{d x_i}{d s'}\right)_{A_1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_{A_1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_A + du\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}\right)_A,$$

in quanto sulla geodetica $A A_1 (\theta = 0)$, l'arco, contato da A, s'identifica colla variabile u

Ora dalle (18), derivando e ponendo, a derivazione eseguita, $u = v = 0$, si traggon le relazioni:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_A = \xi^{(i)}, \quad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}\right)_A = -\sum_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)} x'_j,$$

Si hanno dunque, in definitiva, le

$$\xi_1^{(i)} = \xi^{(i)} - du \sum_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)} x'_j,$$

le quali coincidono colle relazioni differenziali (I_a) di M.

Resta così provata l'equivalenza della nostra definizione con quella del Levi-Civita, *e vengon di più ritrovate, con sole considerazioni intrinseche, le equazioni differenziali che reggono il problema del parallelismo.*

12. ***Parallelismo fra direzioni negli spazî a curvatura costante.*** — Il teorema d'esistenza pel sistema

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} = -\sum_{jl} \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)} \frac{d x_j}{ds}, \tag{20}$$

che esprime il modo di variare di una direzione parallela ad un data (ξ_0), lungo un assegnato cammino C — sul quale ds è l'elemento lineare — s'intepreta geometricamente nel senso che la varietà delle ∞^1 direzioni integrali definite da (ξ_0), può esser determinata a partire da una qualunque di esse, e quindi che *la relazione di parallelismo, lungo un dato cammino, è simmetrica e transitiva.*

Quando il cammino C sia geodetico, la definizione da noi data, di direzioni parallele uscenti dai punti A, A_1, infinitamente vicini su C, ha senso anche allorchè i punti A, A_1 sieno su C a distanza finita, giacchè allora esiste una superficie geodetica σ, di centro A, contenente C e la direzione (ξ) spiccata da A.

Ma non è detto che la relazione di parallelismo che così s'ottiene fra le due direzioni aventi le origini a distanza finita, coincida con quella del Levi-Civita: quel che è certo è soltanto che le due relazioni coincidono a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, rispetto alla distanza geodetica $A A_1$. È chiaro che la coincidenza in questione avrebbe luogo anche al finito, qualora la relazione di parallelismo, secondo la nostra definizione, fosse simmetrica rispetto a due direzioni $(\xi)(\xi_1)$ spiccate da punti A, A_1 a distanza finita; qualora cioè la superficie geodetica σ_1, di centro A_1, passante per la geodetica C e per la direzione (ξ_1), toccasse di conseguenza la σ nel punto A, come di fatto la σ tocca σ_1 in A_1.

Il parallelismo del Levi-Civita può dunque definirsi intrinsecamente *in termini finiti*, nel modo da noi indicato, solo quando la V_n goda della proprietà che « per ogni « coppia di superficie geodetiche, aventi i centri sopra una medesima geodetica C, il contatto in un punto di C, porti di conseguenza il contatto lungo tutta la curva ».

In questo caso le equazioni differenziali (20), *che reggono il problema del parallelismo, risultan senz'altro integrate pei cammini geodetici, non appena sieno integrate le equazioni differenziali delle geodetiche.*

Questa circostanza si verifica ad esempio per gli spazî a curvatura costante: ciò risulta subito dal fatto che ogni punto d'una superficie geodetica appartenente ad un tale spazio V_n, può esser assunto come centro di un fascio di geodetiche di V_n, tracciate sulla superficie (in quanto a questa appartiene ogni geodetica che la incontri in due punti), sicchè due superficie geodetiche che si tocchino in un punto coincidono. Dunque:

Negli spazî a curvatura costante, il parallelismo di due direzioni (ξ), (ξ_1), *situate a distanza finita, e derivanti per continuità l'una dall'altra, lungo un cammino geodetico* C, *si riduce a ciò: che le* (ξ), (ξ_1) *forman con* C *angoli corrispondenti uguali sopra una superficie geodetica che le contenga.*

Una proprietà sostanzialmente equivalente, sempre per gli spazî a curvatura costante, trovasi già nel § 10 di M.

13. *Le proprietà fondamentali del parallelismo fra direzioni.* — Nella sua Memoria, il Levi-Civita dimostra, per via analitica, le due proprietà fondamentali seguenti della relazione di parallelismo:

a) La direzione (α) parallela in un punto P ad una direzione data (α_0), uscente da P_0, dipende in generale dal cammino con cui si va da P_0 a P. L'indipendenza dal cammino caratterizza le varieta euclidee.

b) Due direzioni uscenti da P_0 formano un angolo uguale a quello formato dalle direzioni ad esse parallele per P, e ciò qualunque sia il cammino da P_0 a P.

Ecco come si possono stabilire queste due proprietà, con semplici ragionamenti geometrici.

Suppongasi che nella nostra V_n il parallelismo di due direzioni sia indipendente dal cammino, o, in altre parole, che « due direzioni parallele ad una terza sieno sempre parallele fra di loro ». Consideriamo allora, entro V_n, un punto P_0 ed una geodetica C_0 uscente da P_0. Tracciamo quindi la geodetica C, che esce da un altro punto P, colla direzione parallela a quella di C_0 in P_0. Due direzioni appartenenti a C_0, C, ed aventi del resto origini arbitrarie, sono, per la definizione stessa, parallele alle direzioni di C_0, C in P_0, P, e quindi, per l'ammessa transitività, parallele tra di loro. Ne deriva che ogni geodetica che incontri C_0, C nei punti M_0, M, forma ivi colle due geodetiche angoli corrispondenti uguali.

Siamo dunque nel caso euclideo e si conclude che:

La relazione di parallelismo fra direzioni è transitiva, soltanto nel caso euclideo.

Passiamo alla proprietà *b*). Fissato un cammino C dal punto P_0 al punto P di V_n, e dette a_0, a le rette tangenti a C in P_0, P, entro lo spazio euclideo S_N in cui V_n è immersa, fra le stelle formate dalle tangenti a V_n in P_0, P, nasce una corrispondenza biunivoca π, ove si chiamino omologhe due tangenti t_0, t, che escano da P_0, P con direzioni parallele rispetto a C; talchè sarà intanto $\widehat{ta} = \widehat{t_0 a_0}$.

Tale corrispondenza π, attesa la linearità delle equazioni differenziali (20), che assicura esser lineare la dipendenza degl'integrali $\xi^{(i)}$ dai loro valori iniziali, è un'omografia. Dobbiamo provare che, in π, a due rette b_0, c_0 della stella (P_0) — entro lo S_n euclideo tangente a V_n in P_0 — corrispondon due rette b, c della stella (P) — entro lo S_n analogo — tali che $\widehat{b_0 c_0} = \widehat{bc}$.

Dal momento che lo S_3 $a_0 b_0 c_0$ si muta per la π nello S_3 abc, così basterà provare che un'omografia π fra due stelle (P_0), (P) di due S_3 euclidei, è una congruenza, quando raggi corrispondenti formano angoli eguali con due raggi fissi a_0, a di (P_0), (P).

All'uopo si osservi che ad un cono rotondo Γ_0, avente per asse a_0, la π fa corrispondere un cono rotondo Γ, di eguale apertura, avente per asse a: l'involuzione dei piani diametrali coniugati rispetto a Γ_0, che è l'involuzione degli angoli retti nel fascio di piani (a_0), vien dunque mutata nell'involuzione analoga rispetto a Γ, cioè nell'involuzione degli angoli retti del fascio di piani (a). Tanto basta per concludere che la π subordina una congruenza fra i fasci di piani (a_0), (a); donde segue l'eguaglianza dei due triedri $a_0 b_0 c_0$, abc (che hanno due faccie e il diedro compreso rispettivamente uguali) e quindi $\widehat{b_0 c_0} = \widehat{bc}$ [21]). Si può pertanto enunciare:

Fissati due punti P_0, P della varietà V_n ed un cammino qualunque C, che li congiunga, la corrispondenza biunivoca fra le direzioni, uscenti da P_0, P, parallele rispetto al cammino C, è una congruenza.

Nel qual enunciato resta inclusa anche la proposizione stabilita in *M.* dal Levi-Civita, alla fine del § 6.

14. ***Espressione della curvatura riemanniana d'una varietà mediante un parallelogrammoide.*** — Il Levi-Civita ha definito la curvatura d'una varietà V_n in un punto P, secondo un'assegnata giacitura, individuata dalle direzioni di due geodetiche distinte PQ, PP', spiccate da P, mediante l'espressione $\dfrac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ relativa ad un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$ di base PQ, di soprabase $P'Q'$ e di area Δ.

La coincidenza di questa definizione colla definizione riemanniana si desume ormai a priori da ciò: che il parallelogrammoide $PQP'Q'$ appartiene alla superficie geodetica σ di centro P, determinata dalle due direzioni (PQ), (PP').

E invero che il lato QQ' appartenga a σ segue senz'altro dal n° 11. Quanto al lato $P'Q'$, abbiamo già osservato (n° 8) ch'esso è arbitrario [22]): si può pertanto supporre, senza restrizione, che la soprabase $P'Q'$ appartenga essa pure a σ. Ne deriva che il valore dell'espressione $\dfrac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ relativa ad un parallelogrammoide geo-

[21]) Più brevemente si sarebbe potuto dire: la π fa corrispondere alle intersezioni del cono isotropo della stella (P_0) coi piani reali del fascio (a_0), le generatrici analoghe del cono isotropo della stella (P). Dunque il trasformato, mediante π, del primo cono isotropo, che è irriducibile, non può che coincidere col secondo; cioè π non può che essere una congruenza.

[22]) Il ragionamento esposto nell'Osservazione del n° 8, vale evidentemente anche se il quadrilatero $PQP'Q'$ è immerso in una varietà V_n, anzichè in una superficie S. Basta all'uopo considerare le cose nello spazio euclideo S_N, cui V_n appartiene.

detico infinitesimo di V_n — ove per Δ si prenda una qualunque area avente per contorno il perimetro del quadrilatero e infinitesima con esso — coincide col valore dell'espressione stessa riferita ad un parallelogrammoide geodetico di σ, cioè (n° 8) colla curvatura totale di σ in P.

Resta così provata la coincidenza della definizione del LEVI-CIVITA con quella del RIEMANN; la qual coincidenza risulta in *M.* (§ 18) dalla verificazione formale dell'eguaglianza delle corrispondenti espressioni della curvatura.

Padova, 5 febbraio 1917.

FRANCESCO SEVERI.