Sur la généralisation du problème de Dirichlet.

(Deuxième partie.)

Par

SERGE BERNSTEIN à Charkow (Russie).

Dans la première partie de ce mémoire qui a paru il y a quatre ans*) j'ai développé une méthode générale pour la résolution du problème de Dirichlet que j'ai appliquée aux équations de la forme

$$(1) \qquad r + t = f(x, y, z, p, q).$$

Aujourd'hui je me propose d'appliquer la même méthode à l'étude de l'équation du type *elliptique* la plus générale.**) Lors de la publication du premier article, ma méthode était loin d'être mise sous sa forme définitive, et je n'aurais certainement pas attiré l'attention du public mathématique sur mes recherches à peine commencées, si je n'avais pas prévu la nécessité de les abandonner pour un laps de temps considérable.

Dans ces conditions, il m'a paru utile de reprendre et de préciser certains points déjà traités dans l'article cité, pour bien mettre en lumière les principes fondamentaux de la théorie, tels qu'ils apparaissent actuellement. C'est ce que je ferai dans le premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre j'entreprends l'étude approfondie des équations linéaires du type elliptique non réduites qui sert de base à la théorie générale.

Dans le troisième chapitre j'aborde le problème de Dirichlet dans toute sa généralité.

Et enfin, le dernier chapitre est consacré aux conclusions générales.

---

*) Mathematische Annalen 62.

**) Je viens de consacrer à cette étude un mémoire en langue russe qui a paru dans le t. XI des Communications de la Société Mathématique de Charkow. Ce sont les principaux résultats de ce memoire que j'ai surtout en vue de reproduire ici. Voir aussi Comptes Rendus 13 Mai 1907.

I.

Nouvelle étude de l'équation $r + t = f(x, y, z, p, q)$.

§ 1.

J'ai démontré dans le premier chapitre de l'article*) cité le lemme suivant:

Lemme. *Soit z une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x y z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \geqq 0\right) \tag{1}$$

dont les dérivées premières admettent des modules trigonométriques finis à l'intérieur d'un cercle C. Soit d'autre part une fonction $\varphi(\theta)$ dont la dérivée première admet un développement trigonométrique absolument convergent. On peut dans ces conditions déterminer un nombre α tel que, pour $|\varepsilon| < \alpha$, l'équation (1) *admette une solution u dont les dérivées premières ont leurs modules trigonométriques***) *finis, et qui, sur la circonférence C, se réduit à $z + \varepsilon\varphi(\theta)$.*

Ce lemme réduit comme je l'ai montré à l'endroit cité la question de la possibilité du problème de Dirichlet à celle du prolongement analytique.

On admet a priori l'existence d'une solution z satisfaisant aux conditions du lemme.***) Soit $\varphi_0(\theta)$ la fonction de l'angle à laquelle elle se réduit sur le contour; soit d'autre part $\Phi(\theta)$ l'ensemble de valeurs que la solution cherchée est assujettie à prendre sur le même contour. Nous supposerons de plus que ces deux fonctions $\varphi_0(\theta)$ et $\Phi(\theta)$ admettent des dérivées bornées des quatre premiers ordres. Posons alors

$$F(\theta, \varepsilon) = \varphi_0(\theta) + \varepsilon[\Phi(\theta) - \varphi_0(\theta)].$$

Il résulte du lemme énoncé que pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, $|\varepsilon| < \alpha$, il existe une solution du problème de Dirichlet se réduisant à $F(\theta, \varepsilon)$ sur la circonférence. En prenant alors une valeur déterminée $\varepsilon = \varepsilon_0 < \alpha$, on pourra appliquer de nouveau notre lemme, et ainsi de suite autant de fois qu'on voudra. Seulement en procédant de cette façon, on n'est nullement certain que les *domaines de validité du lemme* n'iront pas en diminuant indéfiniment, de sorte que même en l'appliquant une infinité

---

*) Math. Ann. t. 62. On trouvera une démonstration plus complète dans mon mémoire russe, où la rédaction de l'énoncé du lemme est un peu différente.

**) Voir pour cette notation mon mémoire des Math. Ann. 62, on bien p. 106 du présent travail.

***) Je tiens à rappeller que les conditions du lemme entraînent comme conséquence la nature *analytique* de la solution z. (Voir „Sur la nature analytique etc." Chap. I, Math. Ann. t. 59.)

de fois, on ne pourra pas dépasser une valeur singulière déterminée ε_1; c'est d'ailleurs ce qui aura lieu en général. Au contraire, si quel que soit ε (dans un certain intervalle, par exemple, sur le segment 01), on peut fixer a priori une limite inférieure du domaine de validité du lemme, ou plus exactement, une limite inférieure du nombre α (rayon de convergence) qui intervient dans le lemme, on arrivera à une valeur quelconque ε (de l'intervalle) en appliquant notre lemme un nombre fini de fois. Pour établir la possibilité du problème de Dirichlet, lorsque la solution doit se réduire à $\Phi(\theta) = F(\theta, 1)$ sur la circonférence, il suffit donc d'indiquer une limite inférieure du nombre α quel que soit ε sur le segment 01. Or, il résulte du raisonnement par lequel notre lemme a été établi que pour une équation donnée la limite inférieure de α depend uniquement des limites supérieures des modules trigonométriques de la solution considérée et de ses derivées premières $|z|_R$, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_R$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_R$. En nous bornant pour le moment à établir des conditions *suffisantes* pour la possibilité du problème de Dirichlet, nous voyons que la question se ramène *à la recherche des équations pour lesquelles on peut, a priori, au moyen des données sur le contour, limiter supérieurement les modules trigonométriques en question.* Dans l'article cité nous avons montré que ceci est possible pour les équations (1) *où $f(x, y, z, p, q)$ est un polynome du second degré par rapport à p, q* (ou plus généralement, si f ne croît pas plus vite que les deuxièmes puissances de p, q, lorsque ces quantités deviennent infinies).

§ 2.

Comme la démonstration de ce résultat était insuffisante je veux la reprendre par une nouvelle méthode à laquelle il est commode de donner un nom spécial — *méthode des fonctions auxiliaires* —, car nous aurons encore plusieurs fois l'occasion de l'appliquer.

Pour limiter supérieurement les *modules trigonométriques de z* et de ses dérivées premières $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, il suffira d'indiquer des limites supérieures des modules ordinaires de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. La limite supérieure de $|z|$ s'obtient facilement, comme je l'ai montré à l'endroit cité sous la condition que $f'_z \geqq 0$ (et de l'existence d'une solution particulière); nous n'avons pas à y revenir. Passons à la limitation des modules des dérivées premières.

Soit

$$r + t = f(x, y, z, p, q) = a'p^2 + 2b'pq + c'q^2 + 2d'p + 2e'q + g',$$

où a', b', c', d', e', g' sont des fonctions analytiques de x, y, z, l'équation que nous envisageons.*)

Puisque nous supposons que sur la circonférence C, z se réduit, à une fonction $\varphi(\theta)$ de l'arc qui admet des dérivées des quatre premiers ordres, la fonction harmonique H qui se confond avec elle sur la circonférence C aura des dérivées bornées des trois premiers ordres. Si donc nous posons

$$z = Z + H,$$

la fonction Z s'annulera sur le contour et vérifiera une équation de la forme

$$(1^{\text{bis}}) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= a\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + 2d\frac{\partial Z}{\partial x} + 2e\frac{\partial Z}{\partial y} + g \\ &= F\left(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

où a, b, c, d, e, g sont des fonctions analytiques de x, y, Z à l'intérieur de C, ayant des dérivées bornées des deux premiers ordres sur le contour C comme à son intérieur.

Il est clair que nous aurons immédiatement une limite supérieure de $|p|$, $|q|$ sur la circonférence, du moment que nous saurons limiter supérieurement $\left|\frac{\partial Z}{\partial \varrho}\right|$ (dérivée de Z suivant la normale sur le contour). Dans ce but désignons par n la limite supérieure de $|Z|$ et effectuons le changement de fonction défini par la relation

$$Z = -n - \alpha + \alpha \log u,$$

où α est un nombre positif qui sera déterminé dans un instant et u la nouvelle fonction que nous allons étudier.

Il est essentiel de remarquer que la fonction u varie dans le même sens que Z depuis e jusqu'à $e^{\frac{2n+\alpha}{\alpha}}$.

De plus u vérifie l'équation

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \\ + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{u}{\alpha} = Q, \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

---

*) Il n'y aurait rien d'essentiel à ajouter au raisonnement qui va suivre, si on admettait que d', e', g' dépendent aussi de p, q, pourvu que, pour p, q infinis, leurs ordres de croissance soient *inférieurs* à 1.

Soit M la limite supérieure de $|a|$, $|b|$, $|c|$, qui nous est naturellement connue; et posons $\alpha = \frac{1}{8M}$. Dans ces conditions, en identifiant à zéro le second membre Q de l'équation (4) et considérant $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ comme les coordonnées courantes d'un point dans le plan, tandis que x, y, z seront des paramètres dont dépendent les coefficients, nous avons l'équation d'une ellipse. En effet, en posant

$$a_1 = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{a}{8M}\right), \quad b_1 = \frac{b}{8Mu}, \quad c_1 = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{c}{8M}\right),$$

nous voyons que le discriminant

$$a_1 c_1 - b_1^2 > \frac{3}{4u^2}.$$

Il en résulte que le second membre Q de l'équation ne peut pour aucunes valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ devenir *inférieur* à un nombre négatif $-P$. La géometrie analytique nous apprend à calculer ce nombre P; c'est le maximum de l'expression

$$\frac{a_1 e^2 - 2 b_1 d e + e_1 d^2}{a_1 c_1 - b_1^2} + 8 M g u.$$

On a donc $Q \geqq -P$.

Par conséquent, si l'on pose

$$u = u_1 - \frac{P}{4}(x^2 + y^2),$$

les dérivées secondes de u_1 satisfont à l'inégalité

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \geqq 0,$$

et u_1 n'a pas de maximum à l'intérieur de C. Mais puisque u_1 est constant sur la circonférence C, on a donc sur cette circonférence

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} \geqq 0.$$

Et par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} \geqq -\frac{1}{2} P R.$$

D'où, enfin,

$$\frac{\partial Z}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial \varrho} \geqq -\frac{\alpha P R}{2 e^{\frac{n+\alpha}{\alpha}}}.$$

Ainsi nous avons trouvé la limite extrême négative de $\frac{\partial Z}{\partial \varrho}$; en employant le même procédé nous obtiendrons la limite supérieure positive. En effet, posons

$$Z = -n - \alpha + \alpha \log \frac{1}{1-u'},$$

où n et α conservent les significations de tout à l'heure. Dans ces conditions, la nouvelle fonction u' que nous introduisons varie dans le même sens que Z depuis $1-e^{-1}$ à $1-e^{-\frac{2n+\alpha}{\alpha}}$ et vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=-\frac{1}{1-u'}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\alpha}{1-u'}\left[a\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+2d\frac{\partial u'}{\partial x}+2e\frac{\partial u'}{\partial y}+g\frac{1-u'}{\alpha}=Q'.$$

Nous déterminons, comme plus haut, la limite *supérieure positive* de Q'

$$Q'<P'.$$

En posant ensuite

$$u'=u_1'+\frac{P'}{4}\left(x^2+y^2\right),$$

nous voyons que u_1' ne peut pas avoir de *minimum* à l'intérieur de C et par conséquent

$$\frac{\partial u_1'}{\partial \varrho}\leqq O.$$

D'où

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho}\leqq\frac{1}{2}P'R,$$

et enfin

$$\frac{\partial Z}{\partial \varrho}\leqq\frac{\alpha P' R e^{\frac{n+\alpha}{\alpha}}}{2}.$$

Nous avons ainsi trouvé la limite supérieure de $\left|\frac{\partial Z}{\partial \varrho}\right|$ sur la circonférence C et, par là même, la limite supérieure de $|p|$ et $|q|$.

§ 3.

Il nous reste encore à voir ce qui se passe à l'intérieur du cercle. Dans ce but nous faisons un nouveau changement de fonction. Posons

$$Z=-n+\alpha\log\log u,$$

où n a la signification de tout à l'heure et α sera fixé ultérieurement. La fonction u varie encore dans le même sens que Z depuis e jusqu'à $e^{e^{\frac{2n}{\alpha}}}$. Et puisque

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\alpha}{u\log u}\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\alpha}{u\log u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\alpha}{u\log u}\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\alpha}{u\log u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

u vérifie l'équation

$$(5) \quad r_1 + t_1 = \frac{1}{u \log u} [1 + \log u + \alpha a) p_1^2 + 2\alpha b p_1 q_1 + (1 + \log u + \alpha c) q_1^2]$$
$$+ 2 d p_1 + 2 e q_1 + g \frac{u \log u}{\alpha} = Q_1,$$

où nous écrirons pour abréger p_1, q_1, r_1, t_1 à la place de

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Nous nous proposons de montrer que, si la fonction

$$w = p_1^2 + q_1^2 = (p^2 + q^2) \frac{u^2 \log^2 u}{\alpha^2}$$

atteint son maximum en un point $(x_0 y_0)$ à l'intérieur de C, ce maximum ne dépasse certainement pas un nombre fixe que nous pouvons determiner.

En effet, nous devons avoir au point $(x_0 y_0)$,

$$(6) \qquad p_1 r_1 + q_1 s_1 = 0, \quad p_1 s_1 + q_1 t_1 = 0$$

et aussi

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \leqq 0.$$

Mais, en tenant compte des relations (6) et de l'équation (5), on obtient

$$\Delta = r_1^2 + 2 s_1^2 + t_1^2 + p_1 \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right) + q_1 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right)$$
$$= Q_1^2 + p_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} + q_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} \leqq 0,$$

où $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial y}$ représentent les dérivées partielles complètes de Q_1 par rapport à x, y, de sorte que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right) p_1 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\right) r_1 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\right) s_1,$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right) q_1 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\right) s_1 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\right) t_1,$$

en désignant par $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right)$ etc. les dérivées de Q_1 prises en considérant x, y, u, p_1, q_1 comme variables indépendantes.

Donc, finalement:

$$\Delta = Q_1^2 + p_1 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) + q_1 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right) + (p_1^2 + q_1^2)\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right) = \frac{w^2 + \varepsilon}{u^2 \log u} + \eta \leqq 0,$$

où ε est un polynome du *quatrième* degré en p_1, q_1, dont les coefficients tendent vers 0 avec α, et η est un polynome du *troisième* degré en p_1, q_1.

Attribuons maintenant à α une valeur déterminée suffisamment petite pour avoir

$$|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2} w^2.$$

Il en résultera que

$$\frac{w^2}{2u^2\log u} + \eta \leqq 0.$$

Donc,

$$w^2 < 2|\eta| u^2 \log u < 2e^{2e^{\frac{2n}{\alpha}} + \frac{2n}{\alpha}} |\eta|. \tag{7}$$

Mais, puisque, après la détermination de α, on connaît les limites des modules des coefficients du polynome (du troisième degré) η, l'algèbre élémentaire permet de déduire de l'inégalité (7) une limite supérieure de w au point $(x_0 y_0)$. Comme d'autre part, nous connaissons déjà la limite supérieure de

$$w = (p^2+q^2)\,\frac{u^2\log^2 u}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\, e^{2\left(e^{\frac{z+n}{\alpha}} + \frac{z+n}{\alpha}\right)} \cdot (p^2+q^2)$$

sur la circonférence C, nous voyons que la limite supérieure générale de w et par suite aussi de $|p|$ et $|q|$ en un point quelconque peut être indiquée a priori. Le calcul effectif de cette limite supérieure ne présente pas d'intérêt au point de vue où nous nous plaçons.

§ 4.

Les limites supérieures des modules de p et q une fois déterminées, le même procédé pourra être appliqué pour limiter les modules des dérivées secondes. D'ailleurs, il y a lieu de remarquer que nous n'aurons plus à nous appuyer sur l'hypothèse que f est du second degré par rapport à p, q.

En effet, différentions l'équation (1^{bis}) par rapport à θ et posons $\frac{\partial Z}{\partial \theta} = Z_1$. La fonction Z_1, régulière à l'intérieur de C, vérifiera l'équation

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial x} y - \frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial F}{\partial z} Z_1 + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Z}{\partial y}} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Z}{\partial x}} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Z}{\partial x}} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial Z}{\partial y}} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial y},$$

car

$$\frac{\partial \frac{\partial Z}{\partial y}}{\partial \theta} = \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{\partial Z}{\partial x}}{\partial \theta} = \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Nous voyons, que quel que soit F (ou f), $\frac{\partial Z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial Z_1}{\partial y}$ n'entrent qu'au premier degré; nous pouvons donc reproduire sans aucune modification le raisonnement du § 2 (en attribuant au nombre α n'importe quelle valeur, par exemple $\alpha = 1$), pour déterminer la limite supérieure de $\left|\frac{\partial Z_1}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial \varrho\, \partial \theta}\right|$ sur le contour; d'où on tire sans peine (au moyen de l'équation (1^{bis})) une limite supérieure du module $\left|\frac{\partial^2 Z}{\partial \varrho^2}\right|$ sur la circonférence C, et par conséquent aussi celles de toutes les dérivées secondes de Z.

Il reste encore à limiter par le même procédé les modules des dérivées secondes à l'intérieur du cercle. Dans ce but différentions l'équation (1) par rapport à x. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{8}$$

En appliquant le raisonnement du § précédent, on indiquera une limite supérieure du maximum de la forme quadratique

$$w' = e^{2(e^{p+n'}+p+n')}[r^2 + s^2],$$

où n' est la limite supérieure de $|p|$ qu'on a déterminée antérieurement. (On a pu prendre dans l'expression de w' le nombre α égal à 1, car $\frac{\partial p}{\partial x} = r$, $\frac{\partial p}{\partial y} = s$ n'entrent qu'au premier degré.)

Le fait que l'équation (8) contient non seulement p (qui joue le rôle de z dans l'équation donnée), mais encore q, modifie à peine le raisonnement: on n'a qu'à remplacer les dérivées de q qu'on rencontre au cours du calcul par les expressions

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = f - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Du moment qu'on a déterminé une limite supérieure de w', on trouve immédiatement des limites supérieures des modules de toutes les dérivées secondes.

Il en résulte que le problème de Dirichlet pour l'équation (1^{bis}) est possible, quelle que soit la fonction $\Phi(\theta)$ admettant des dérivées bornées des 4 premiers ordres. A la fin de l'article cité j'ai montré comment on pouvait se débarasser de l'hypothèse de l'existence d'une solution quelconque qu'on prend comme point de départ; je tiens à remarquer seulement, comme nous le verrons plus tard dans le cas général, que ce raisonnement n'est valable que dans le cas où $f'_z > 0$ (et non pas égal à 0).

Je crois inutile de rappeller que le contour circulaire peut être remplacé par un contour analytique quelconque, et je n'insiste pas sur l'extension de la méthode aux cas non analytiques en me hâtant de passer à l'étude générale des équations du type elliptique.

II.

Étude générale des équations linéaires du type elliptique.

§ 5.

Pour appliquer notre méthode au cas général de l'équation du type elliptique, nous sommes obligés de reprendre la théorie des équations linéaires, et, plus spécialement, de résoudre *le problème de la réduction de l'équation linéaire à sa forme canonique ou réduite.* Ce problème est le suivant: Soit

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2D\frac{\partial z}{\partial x}+2E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=M \tag{9}$$
$$(AC-B^2>0)$$

une équation linéaire du type elliptique dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x, y à l'intérieur d'un certain cercle C de rayon R.

On demande d'introduire deux nouvelles variables x_1, y_1 à la place de x, y, telles que: 1° *toute fonction z qui satisfait à l'équation* (9) *satisfasse, par rapport aux nouvelles variables, à l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial y_1}+Fz=M; \tag{10}$$

2° *à tout point du cercle C dans le plan des (x, y) corresponde un point du cercle C_1 de rayon* 1 *dans le plan des (x_1, y_1), et réciproquement, de telle sorte d'ailleurs que les centres des deux cercles O et O_1 correspondent l'un à l'autre (on sous-entend de plus que x_1, y_1 soient des fonctions analytiques de x, y à l'intérieur du cercle C).*

Je n'ai pas à insister sur l'équivalence du *problème de la réduction* avec celui des *cartes géographiques.*

La première partie du problème est résolue depuis longtemps*); on sait qu'il est nécessaire et suffisant que x_1, y_1 vérifient les équations

$$A\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2=A\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2,$$
$$A\frac{\partial x_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}+B\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial x_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)+C\frac{\partial x_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y}=0.$$

En résolvant ce système d'équations par rapport à $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$, nous obtenons un nouveau système

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}=\frac{-B\frac{\partial x_1}{\partial x}-C\frac{\partial x_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}},\quad \frac{\partial y_1}{\partial y}=\frac{A\frac{\partial x_1}{\partial x}+B\frac{\partial x_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}, \tag{11}$$

*) Picard, Traité d'analyse, t. II, p. 27.

équivalent au précédent. En résolvant par rapport à $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$ on obtiendrait également

$$(11') \qquad \frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{B\frac{\partial y_1}{\partial x} + C\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{-A\frac{\partial y_1}{\partial x} - B\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

On en conclut que x_1 et y_1 satisfont chacun à la même équation

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right) = 0.$$

Il est important de remarquer, que, si $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_1, y_1)$ sont respectivement la partie réelle et imaginaire d'une certaine fonction analytique de $x_1 + iy_1$

$$P(x_1, y_1) + iQ(x_1, y_1) = f(x_1 + iy_1),$$

P et Q considérées comme fonctions de x, y satisfont également aux équations (11) et à l'équation (12) qui en résulte. En effet, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial y_1}\cdot\left(\frac{B\frac{\partial y_1}{\partial x} + C\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x_1}\cdot\left(\frac{-B\frac{\partial x_1}{\partial x} - C\frac{\partial x_1}{dy}}{\sqrt{AC-B^2}}\right) \cdot$$

$$= \frac{B\left(\frac{\partial Q}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial Q}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)}{\sqrt{AC-B^2}}$$

$$= \frac{B\frac{\partial Q}{\partial x} + C\frac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}},$$

grâce aux relations classiques de Cauchy

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial y_1} \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1};$$

et de même, on trouvera

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-A\frac{\partial Q}{\partial x} - B\frac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

Nous pouvons aborder à présent la deuxième partie du problème.

§ 6.

Soient x_1', y_1' une paire de fonctions satisfaisant aux équations (11) et telles de plus, que $x_1' = y_1' = 0$, lorsque $x = y = 0$. Supposons d'ailleurs qu'il existe un certain contour S dans le plan des (x_1', y_1') tel qu'il y ait correspondance biuniforme entre les points de l'aire qu'il entoure et ceux du cercle C dans le plan des (x, y).

Les fonctions x_1', y_1' peuvent être obtenues comme il suit:

Admettons que pour des valeurs données des fonctions A, B, C l'équation (12) admette une solution analytique x_1' qui sur la circonférence C se réduit à $\alpha + \cos\theta$, où α est une constante déterminée par la condition que x_1' s'annule à l'origine. Dans ces conditions, la fonction x_1' aura sur la circonférence C un seul maximum $\alpha + 1$, pour $\theta = 0$, et un seul minimum $\alpha - 1$ pour $\theta = \pi$. On en conclut que les courbes

$$x_1' = \text{constante}$$

ne peuvent pas avoir de points doubles à l'intérieur de C, et par conséquent on n'aura jamais simultanément

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial y} = 0.$$

Il en résulte que, si nous définissons y_1' par la condition qu'il satisfasse avec x_1' aux équations (11), les courbes

$$x_1' = \text{constante}, \quad y_1' = \text{constante}$$

ne pourront pas avoir plus d'un point d'intersection à l'intérieur de C. Par conséquent la correspondance entre les points (x, y) du cercle C et les points (x_1', y_1') d'une certaine aire S sera biuniforme; la fonction y_1' n'étant d'ailleurs déterminée par les équations (11) qu'à une constante additive près, on peut profiter de cette indétermination pour annuler y_1' à l'origine.

Cela étant, nous introduirons une nouvelle paire de fonctions (x_1, y_1), dont l'existence sera demontrée plus loin qui réalisera toutes les conditions éxigées par le problème de la *réduction*. Il suffira de poser

$$x_1 + iy_1 = (x_1' + iy_1')\, e^{H + iG} = e^{H + \frac{1}{2}\log(x_1'^2 + y_1'^2) + i\left(G + \operatorname{arctg}\frac{y_1'}{x_1'}\right)}$$

où H et G forment une paire de solutions du système (11), et de plus H est assujetti à se réduire sur C à

$$-\frac{1}{2}\log(x_1'^2 + y_1'^2).$$

En effet, il résulte d'abord de la remarque faite plus haut que x_1 et y_1 vérifient effectivement les équations (11); d'autre part, il est évident que lorsque le point (x, y) se trouve sur la circonférence C on a $|x_1 + iy_1| = 1$, c'est-à-dire les points de la circonférence C correspondent à ceux de la circonférence C_1. De plus les points des circonférences où

$$|x_1 + iy_1| = \lambda < 1,$$

ont comme correspondants dans le plan des (x, y) les points de certains contours (λ) fermés entourant le centre O et intérieurs au cercle C, où

$$H + \frac{1}{2}\log(x_1'^2 + y_1'^2) = \log\lambda;$$

d'ailleurs, sur tous ces contours les dérivées normales extérieures $\frac{\partial\lambda}{\partial n} \geqq 0$.

On en conclut que la correspondance sera biuniforme, car l'argument φ de $x_1 + iy_1$, égal à $G + \operatorname{arctg}\frac{y_1'}{x_1'}$, varie d'une façon continue et toujours dans le même sens, lorsque (x, y) décrit un contour λ (les fonctions φ et $\log\lambda$ vérifiant le système d'équations (11), on voit sans peine que les relations $\frac{\partial\lambda}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial\lambda}{\partial n} \geqq 0$ sur un contour entraînent $\frac{\partial\varphi}{\partial s} \geqq 0$); il augmente de 2π, quand le point (x, y) revient à sa position initiale. Les centres O et O_1 correspondent également l'un à l'autre; on voit donc que les nouvelles variables x_1, y_1 satisfont effectivement à toutes les conditions du problème.

Il reste maintenant le point le plus délicat, celui d'établir *l'existence* des fonctions x_1', y_1', x_1, y_1 et d'en étudier les propriétés essentielles. Dans ce but nous démontrerons le lemme suivant.

§ 7.

Lemme. *Soit z une solution analytique à l'intérieur de la circonférence C, où elle se réduit à une fonction $\varphi(\theta)$ de l'angle admettant des dérivées bornées des $\overline{n+3}$ premiers ordres, de l'équation*

$$(9^{\text{bis}})\quad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M; \quad (F \leqq 0)$$

si on connaît des limites supérieures des modules des dérivées des $\bar{n}$ premiers ordres des coefficients, il est possible d'indiquer des limites supérieures des modules de z et de ses dérivées des $\bar{n}$ premiers ordres sur la circonférence C, ainsi qu'à son intérieur (en admettant toutefois l'existence de la dérivée normale $\frac{\partial z}{\partial\varrho}$ sur la circonférence).

Remarquons d'abord que la fonction harmonique qui se réduit à $\varphi(\theta)$ sur la circonférence C aura des dérivées bornées des $\overline{n+2}$ premiers ordres. Donc, sans restreindre la généralité de la proposition, nous pouvons nous borner au cas où $\varphi(\theta) = 0$.

Pour avoir une limite supérieure du module*) de z, nous remarquons qu'en un point où le second membre de l'équation (9^{bis}) est négatif, z ne peut pas avoir de minimum négatif, de même qu'en un point où le

*) C'est le seul point de la démonstration, où intervient l'hypothèse $F \leqq 0$.

second membre est positif, z ne peut avoir de maximum positif. Or, soit $\overline{M}$ un nombre supérieur au module maximum de M, et posons

$$z = v + \overline{M} e^{s(x+R)} = v' - \overline{M} e^{s(x+R)},$$

où R est le rayon du cercle C, et s est un nombre positif assez grand pour satisfaire à l'inégalité

$$As^2 - 2|D|s + F > 1;$$

alors v et v' vérifieront respectivement les inégalités

$$A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial v}{\partial x} + 2E\frac{\partial v}{\partial y} + Fv < 0,$$
$$A\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial v'}{\partial x} + 2E\frac{\partial v'}{\partial y} + Fv' > 0.$$

Donc, en vertu de la remarque que nous venons de faire, v n'a pas de minimum négatif à l'intérieur du cercle, d'où

$$v \geqq -\overline{M} e^{2sR},$$

et v' n'a pas de maximum positif, d'où

$$v' \leqq \overline{M} e^{2sR}.$$

De sorte que

$$-\overline{M} e^{sR}(e^{sR} - e^{sx}) \leqq z \leqq \overline{M} e^{sR}(e^{sR} - e^{sx}),$$

et en désignant par $\bar{z}$ le maximum du module de z et par μ une constante déterminée, $\mu = e^{2sR}$, on a finalement

$$\bar{z} \leqq \mu \overline{M}. \tag{13}$$

Pour trouver des limites supérieures des modules des dérivées successives il nous faut d'abord établir une inégalité importante.

Si z est une fonction quelconque s'annulant sur la circonférence C et ayant des dérivées des deux premiers ordres continues à *l'intérieur* du cercle, on a l'inégalité

$$I = \iint \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx\, dy \geqq 0, \tag{14}$$

l'intégrale double étant étendue à l'intérieur du cercle.

Pour établir l'inégalité (14) nous supposerons d'abord l'existence des dérivées troisièmes à l'intérieur et celle des dérivées secondes sur le contour; dans ces conditions nous pourrons intégrer par parties, ce qui donnera

$$\iint rt\, dx\, dy = \int_C pt\, dy - \iint p\frac{\partial t}{\partial x} dx\, dy = -\int_C qr\, dx - \iint q\frac{\partial r}{\partial y} dx\, dy,$$
$$\iint s^2\, dx\, dy = -\int_C ps\, dx - \iint p\frac{\partial t}{\partial x} dx\, dy = -\int_C qs\, dy - \iint q\frac{\partial r}{\partial y} dx\, dy;$$

d'où

$$I = \int_C ps\,dx + pt\,dy = \int_C p\,dq = -\int_C q\,dp = \frac{1}{2}\int_C p\,dq - q\,dp.$$

Cette formule est évidemment exacte quel que soit le contour. Mais, puisque C est une circonférence, on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial z}{R\partial\theta}\sin\theta, \quad dp = \left(-q + \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{R^2\partial\theta^2}\sin\theta\right)d\theta,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial z}{R\partial\theta}\cos\theta, \quad dq = \left(\ \ p + \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{R^2\partial\theta^2}\cos\theta\right)d\theta.$$

Donc,

$$I = \frac{1}{2}\int_C \left[p^2 + q^2 - \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]d\theta,$$

et, en particulier, si $z = 0$ sur le contour, on a

$$(14) \qquad I = \frac{1}{2}\int_C \left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2 d\theta \geqq 0.$$

Or, du moment, que l'inégalité (14) est établie pour les fonctions de la nature indiquée plus haut, on n'a qu'à appliquer le théorème de Weierstrass-Picard sur le développement en séries des fonctions continues de deux variables pour vérifier l'inégalité annoncée dans toute sa généralité.

L'inégalité (14) étant demontrée, nous allons procéder de la façon suivante.

Multiplions les deux membres de l'équation (9^{bis}) par z et intégrons les expressions obtenues à l'intérieur du cercle C. Nous aurons

$$\iint [z(Ar+2Bs+Ct)+2Dpz+2Eqz+Fz^2]\,dx\,dy = \iint zM\,dx\,dy,$$

d'où

$$\left|\iint z(Ar+2Bs+Ct)\,dx\,dy\right| < H,$$

H étant un nombre fixe qui dépend du module maximum de z, des coefficients D, E, F, M, ainsi que des dérivées de D et E.

Mais

$$\iint z(Ar+2Bs+ct)\,dx\,dy = -\iint (Ap^2+2Bpq+Cq^2)\,dx\,dy$$
$$-\iint z(A'_x p + B'_y p + B'_x q + C'_y q)\,dx\,dy.$$

Et, en remarquant que

$$|z(A'_x p + B'_y p + B'_x q + C'_y q)| < \frac{k^2 z^2}{2}(A'^2_x + B'^2 + B'^2_x + C'^2_y) + \frac{p^2+q^2}{k^2},$$

quel que soit k, nous aurons

$$\iint\left[\left(A-\frac{1}{k^2}\right)p^2+2Bpq+\left(C-\frac{1}{k^2}\right)q^2\right]dx\,dy$$
$$<H+\frac{1}{2}\iint k^2z^2(A_x'^2+B_y'^2+B_x'^2+C_y'^2)\,dx\,dy<H_1.$$

Donc, en attribuant à k une valeur fixe mais assez grande, nous obtiendrons des inégalités

$$\text{(15)}\qquad \iint p^2\,dx\,dy<L,\qquad \iint q^2\,dx\,dy<L,$$

où L dépend des coefficients A, B, C, D, E, F, M et de leurs dérivées premières.

En tenant compte d'autre part de l'inégalité (14), nous aurons

$$\iint\left[\frac{1}{AC-B^2}(Ar+2Bs+Ct)^2+2(s^2-rt)\right]dx\,dy$$
$$\leqq\iint\frac{1}{AC-B^2}(2Dp+2Eq+Fz-M)^2\,dx\,dy.$$

On reconnaît immédiatement que l'expression sous le signe d'intégration dans le premier membre est une forme *quadratique définie* des trois variables r, s, t. Donc (à cause des inégalités (15)), on a

$$\iint r^2\,dx\,dy<N,\qquad \iint s^2\,dx\,dy<N,\qquad \iint t^2\,dx\,dy<N,$$

où N ne dépend que des coefficients de l'équation (9^{bis}) et de leurs dérivées premières.

En différentiant ensuite l'équation (9^{bis}) par rapport à θ, nous obtenons

$$\text{(16)}\quad A\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\right)+2B\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right)+C\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\right)+2D\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2E\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F\frac{\partial z}{\partial\theta}$$
$$+\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\frac{\partial B}{\partial\theta}\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial C}{\partial\theta}\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+2\frac{\partial D}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial E}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\theta}z=\frac{\partial M}{\partial\theta},$$

ou bien en posant $\frac{\partial z}{\partial\theta}=z_1$ et remarquant que

$$\text{(17)}\quad\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2z_1}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^2z_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2z}{\partial y^2},\\
&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2z_1}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y},\\
&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-y\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-y\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^2z}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\text{(16')}\quad A\frac{\partial^2z_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2z_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2z_1}{\partial y^2}+a_1r+b_1s+c_1t+d_1p+e_1q+f_1z=g_1$$

où $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1$ sont des fonctions finies de x, y qui ne dépendent que des coefficients de l'équation (9^{bis}) et de leurs dérivées premières. Mais puisque z_1 s'annule sur la circonférence C nous aurons, en nous servant de l'inégalité (14),

$$\iint\left\{\frac{1}{AC-B^2}\left[A\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right]^2+2\left[\left(\frac{\partial^2 z_1}{c x^2}\right)^2-\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy$$
$$\leqq\iint(a_1 r+b_1 s+c_1 t+d_1 p+e_1 q+f_1 z-g_1)^2\,dx\,dy.$$

Et, comme dans l'intégrale du premier membre nous avons de nouveau une forme quadratique définie, nous obtenons les inégalités suivantes:

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<N_1,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy<N_1,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<N_1$$

où N_1 ne dépend que des coefficients de l'équation (9^{bis}) et de leurs dérivées premières.

Or en differentiant encore une fois l'équation (16′), nous obtenons $\left(\text{en posant } z_2=\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right)$

$$(16'')\quad A\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}+a_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+c_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\cdots=g_2,$$

et par le même raisonnement,

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<N_2,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy<N_2,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<N_2.$$

En différentiant ainsi successivement, nous aurons les inégalités successives, dans lesquelles $z_n=\frac{\partial^n z}{\partial\theta^n}$

$$(17)\quad\begin{gathered}\iint\left(\frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<N_3;\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_3}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy<N_3;\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_3}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<N_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<N_n;\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy<N_n;\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<N_n,\end{gathered}$$

où N_i dépend d'une façon générale uniquement des limites supérieures des modules des dérivées successives des coefficients de l'équation (9^{bis}) jusqu'à l'ordre i inclusivement.

De ces inégalités importantes nous déduirons des limites supérieures de $|z_i|$ et $\left|\frac{\partial z_{i-1}}{\partial\varrho}\right|$ pour $i\leqq n$ *à l'intérieur d'une région déterminée S obtenue en enlevant du cercle C un petit cercle σ concentrique de rayon r aussi petit* *qu'on veut.* En effet, des inégalités (17) on tire immédiatement à l'intérieur de S

$$\int\int\left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial\varrho\,\partial\theta}\right)^2 d\varrho\, d\theta < N_i',$$

N_i' jouissant des mêmes propriétés que N_i; d'où, en posant

$$z_i = \frac{\partial^i z}{\partial\theta^i} = \sum_k a_k^{(i)} \cos k\theta + b_k^{(i)} \sin k\theta,$$

on trouve

$$\int\limits_{r'}^{R'} \sum_k k^2\left[\left(\frac{d a_k^{(i)}}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d b_k^{(i)}}{d\varrho}\right)^2\right] d\varrho < N_i', \tag{18}$$

où

$$r \leqq r' < R' \leqq R.$$

Or, l'inégalité (18) donne

$$\sum_k k^2 \left\{\left[\int\limits_{r'}^{R'}\left|\frac{d a_k^{(i)}}{d\varrho}\right| d\varrho\right]^2 + \left[\int\limits_{r'}^{R'}\left|\frac{d b_k^{(i)}}{d\varrho}\right| d\varrho\right]^2\right\} < (R'-r')\,N_i'.$$

Donc, en intégrant et tenant compte que, pour $R'=R$, on a $a_k^{(i)} = b_k^{(i)} = 0$ il vient pour toute valeur de r'

$$\sum_k k^2\left[\left(a_k^{(i)}\right)^2 + \left(b_k^{(i)}\right)^2\right] < (R-r')\,N_i',$$

et par conséquent,

$$\sum_k \left|a_k^{(i)}\right| + \left|b_k^{(i)}\right| < 4\sqrt{(R-r')N_i'}.$$

D'où finalement

$$|z_i| = \left|\frac{\partial^i z}{\partial\theta^i}\right| < 4\sqrt{(R-r)N_i'}$$

à l'intérieur de la couronne circulaire S.

Un calcul analogue donne une limite supérieure de $\left|\frac{\partial z_{i-1}}{\partial\varrho}\right|$. La détermination des limites supérieures des autres dérivées d'ordre i (jusqu'à $\bar{n}$ inclusivement) se fait ensuite immédiatement au moyen des équations (16'), (16'') etc. Il y a lieu de remarquer que par le fait nous avons établi l'existence même sur le *contour* C des dérivées des $\bar{n}$ premiers ordres de la solution analytique (à l'intérieur du contour) que nous envisageons.

Mais le raisonnement précédent ne fait pas connaître de limites supérieures des modules des dérivées successives de z à l'intérieur du petit cercle σ. On pourrait remédier à cet inconvénient sans introduire un nouveau principe, en appliquant le même raisonnement à une circonférence C_1 entourant l'aire σ (de sorte qu'on connaisse d'après ce qui précède, des limites supérieures sur la circonférence C_1 des modules des dérivées des n premiers ordres), mais ayant son centre à l'extérieur de σ. On se rend compte que l'inconvénient qui en résulterait, et qui consiste en ce qu'on ne limiterait ainsi à l'intérieur de σ que les dérivées des $n-3$ premiers ordres, serait insignifiant. Cependant, si on veut laisser à l'énoncé du lemme la forme que nous lui avons donnée, il y a lieu de procéder autrement. On pourrait dans ce but appliquer *la méthode des fonctions auxiliaires* comme je l'ai fait dans mon mémoire russe, mais il est encore plus simple de reprendre la *méthode des approximations successives* qui m'a servie à démontrer le théorème fondamental du mémoire „Sur la nature analytique des solutions etc.“ (Math. Ann. 59).

En effet, en renvoyant le lecteur désireux de complêter la démonstration au chapitre IV du mémoire cité, je me bornerai à remarquer que *dans le cas des équations linéaires* la grandeur du rayon du cercle σ, où la méthode des approximations successives est applicable, dépend uniquement des *normes**) des coefficients de l'équation relative à ce cercle et ne dépend aucunement des valeurs de la solution considérée sur le contour. Le cercle σ peut donc être déterminé a priori, du moment que l'équation (9^{bis}) est donnée; et ensuite la connaissance des limites supérieures des dérivées des trois premiers ordres (à cause du raisonnement fait plus

---

*) Je n'insiste pas ici sur la définition complête de ces normes qu'on trouvera à l'endroit cité. Je tiens à ajouter seulement qu'il est avantageux de modifier un peu, comme je le fais dans mon mémoire russe (Ch. II, § 8), cette définition: au lieu d'appeler *norme* reelle d'une fonction

$$f(x) = \sum_p^\infty \sum_q^\infty A_{p,q}\, x^p (1-x)^q$$

l'expression

$$\sum_q^\infty \max.\left[(1-x)^q \sum_p^\infty |A_{p,q}|\, x^p\right],$$

on appelle ainsi l'expression

$$\sum_p^\infty \sum_q^\infty |A_{p,q}| \max.\,[x^p(1-x)^q] = \sum_p^\infty \sum_q^\infty |A_{p,q}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}};$$

les normes complexes et celles des fonctions de deux variables sont modifiées d'une façon analogue. Cette modification laisse subsister toutes les inégalités et les propriétés établies dans le mémoire „Sur la nature analytique des solutions etc.“, et rend absolument inattaquable la démonstration du théorème fondamental, tandis qu'avec l'ancienne définition il y avait un point qui pouvait soulever quelques objections.

haut) de z sur la circonférence de σ permet de calculer des limites supérieurs des *normes* de z relatives au cercle σ. En tenant compte alors des propriétés des normes, on parvient sans peine à indiquer des limites supérieures des modules des dérivées de z à l'intérieur de σ jusqu'à l'ordre qu'on voudra. Notre lemme se trouve ainsi entièrement démontré.

§ 8.

Nous en tirerons immédiatement des conséquences importantes.

En admettant l'existence de la solution x_1' de l'équation (12), introduite précédemment, on voit que, si l'on connaît les limites supérieures des modules de $\frac{A}{\sqrt{AC-B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{AC-B^2}}$ ainsi que celles de leurs dérivées des $n+1$ premiers ordres, il sera possible d'indiquer des limites supérieures des modules des dérivées des n premiers ordres de x_1'; et, en particulier, on déterminera les limites supérieures des modules des dérivées des n premiers ordres par rapport à θ de la fonction $-\frac{1}{2}\log(x_1'^2+y_1'^2)$ sur la circonférence C.

Donc, en appliquant de nouveau le même lemme à la solution H (si elle existe) de l'équation (12) qui sur la circonference C se réduit à $-\frac{1}{2}\log(x_1'^2+y_1'^2)$, on constate que H a toutes ses dérivées des $n-3$ premiers ordres bornées sur la circonférence C aussi bien qu'à son intérieur. Et enfin de l'égalité

$$x_1+iy_1=(x_1'+iy_1')^{H+iG}$$

nous tirons des limites supérieures des modules des dérivées des $n-3$ premiers ordres des fonctions x_1, y_1 par rapport à x, y.

Cette conclusion est d'une importance capitale pour ce qui va suivre.

§ 9.

Soit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial y_1}+Fz=M \tag{10}$$

l'équation réduite que nous obtenons en introduisant les variables (x_1, y_1) à la place de (x, y), où

$$a=A\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}+2D\frac{\partial x_1}{\partial x}+2E\frac{\partial x_1}{\partial y}$$
$$b=A\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 y_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2}+2D\frac{\partial y_1}{\partial x}+2E\frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Ajoutons d'ailleurs que les dérivées secondes de x_1, y_1 qui interviennent dans les expressions de a, b, peuvent être éliminées au moyen des équations (12).

Pour établir les inégalités fondamentales que nous avons en vue il nous faut encore exprimer les coefficients de l'équation (10) au moyen de x_1, y_1 et fixer des limites supérieures des modules de leurs derivées des deux premiers ordres par rapport à x_1, y_1.

Dans ce but nous allons chercher une limite supérieure du module du déterminant fonctionel

$$D = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial y_1} - \frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}}.$$

Il suffira manifestement de trouver des limites supérieures de

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x_1}\right|, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial y_1}\right|, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial y_1}\right|.$$

Or, en remarquant que

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial y_1}}{D}; \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial y_1}}{D};$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{D}; \qquad \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial x_1}}{D}$$

nous déduisons des équations (11)

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{B}{A}\frac{\partial x}{\partial x_1} - \frac{H}{A}\frac{\partial x}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial y}{\partial y_1} = \frac{H}{A}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{B}{A}\frac{\partial x}{\partial y_1} \tag{19}$$

où $H = \sqrt{AC - B^2}$.

Donc x satisfait à l'équation

$$\frac{H}{A}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H}{A}\right) - \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{B}{A}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial x_1} + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{H}{A}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial y_1} = 0. \tag{20}$$

En effectuant les différentiations et tenant compte des égalités (19) nous constatons que x satisfait à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} = f\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial y_1}, x_1, y_1, x, y\right), \tag{20bis}$$

dans laquelle f est un polynome du second degré par rapport à $\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial y_1}$.

Il est aisé de voir dans ces conditions que la fonction

$$W = e^{2\frac{x+R}{\alpha}} e^{2e^{\frac{x+R}{\alpha}}} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2\right]$$

dans laquelle α est un nombre positif fixe qui ne dépend que des coefficients de l'équation (20) et de leurs dérivées, et R le rayon du cercle C (c'est à dire le maximum de $|x|$), ne peut pas avoir de maximum supérieur à un nombre fixe. En effet, il n'y a rien à changer au raisonnement employé dans le § 3 du chapitre précédent, puisque les dérivées de y s'expriment linéairement au moyen des dérivées de x.

Il reste donc à établir les limites supérieures des modules des dérivées premières de x sur la circonférence.

Nous allons encore appliquer *le procédé des fonctions auxiliaires*, mais dans des conditions un peu différentes. En effet, les valeurs de x sur la circonférence C ne nous sont pas données; par contre, nous savons que, sur cette circonférence, doit avoir lieu la relation $x^2 + y^2 = R^2$.

Or il est aisé de construire l'équation, à laquelle satisfait la fonction

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Introduisons dans ce but les coordonnées polaires

$$x = \varrho \cos\theta,\ y = \varrho \sin\theta.$$

Les équations (19) prennent alors la forme:

$$y\frac{\partial\varrho}{\partial x_1} + x\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{B}{C}\left(\frac{x\partial\varrho}{\varrho\partial x_1} - y\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right) - \frac{H}{C}\left(\frac{x\partial\varrho}{\varrho\partial y_1} - y\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{y\partial\varrho}{\varrho\partial y_1} + x\frac{\partial\theta}{\partial y_1} = \frac{H}{C}\left(\frac{x\partial\varrho}{\varrho\partial x_1} - y\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right) + \frac{B}{C}\left(\frac{x\partial\varrho}{\varrho\partial y_1} - y\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right).$$

En les résolvant par rapport à $\frac{\partial\theta}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y_1}$, nous obtenons:

$$(19^{\text{bis}})\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\left[B\cos 2\theta + \frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta\right] - \frac{\partial\varrho}{\partial y_1}H}{\varrho\cdot[C\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + A\sin^2\theta]}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y_1} = \frac{\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}H + \frac{\partial\varrho}{\partial y_1}\left[B\cos 2\theta + \frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta\right]}{\varrho\cdot[C\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + A\sin^2\theta]},$$

d'où résulte enfin l'équation à laquelle satisfait ϱ

$$(21)\qquad \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial y_1^2} = \frac{-1}{H_1}\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}\right],$$

où

$$H_1 = \frac{H}{\varrho\cdot[C\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + A\sin^2\theta]},$$

$$B_1 = \frac{B\cos 2\theta + \frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta}{\varrho\cdot[C\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + A\sin^2\theta]}.$$

L'équation (21) est de la même forme que l'éqation (20^{bis}), mais elle en diffère par la propriété que son second membre devient *infini* pour

$\varrho = O$. La difficulté qui en résulte, pour appliquer notre procédé, peut être levée de la façon suivante: x_1 et y_1 s'annulent en même temps que x et y; on a donc en vertu du théorème des accroisements finis

$$x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x} x + \frac{\partial x_1}{\partial y} y, \quad y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial y} x + \frac{\partial y_1}{\partial y} y,$$

où les dérivées partielles prennent certaines valeurs moyennes, inférieures en valeur absolue à la limite supérieure m des modules de ces dérivées partielles que nous avons déterminée précédemment.

Donc

$$\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \varrho^2\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial x_1}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial y_1}{\partial y}\sin\theta\right)^2\right] < 4\, m^2 \varrho^2.$$

Et par conséquent, on a toujours

$$\varrho > \frac{\varrho_1}{2m}.$$

Il en résulte que, si nous construisons dans le plan des x_1, y_1 un cercle C_1' concentrique à C_1 de rayon $R_1' < 1$, on peut affirmer que la fonction ϱ reste toujours supérieure à $\frac{R_1'}{2m}$ à l'intérieur de la couronne S_1 limitée par les deux cercles concentriques C_1 et C_1'; on peut donc à l'intérieur de cette région indiquer une limite supérieure déterminée des modules des coefficients de l'équation (21). Sans qu'il soit nécessaire d'appliquer aucun procédé spécial, on voit que sur la circonférence C_1

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1} \geqq 0,$$

puisque sur cette circonférence $\varrho = R$ tandis qu'à son intérieur on a $\varrho < R$.

Mais pour trouver la limite supérieure positive de $\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1}$ sur la circonférence C_1, posons

$$\varrho = -\alpha + \alpha \log \frac{1}{1-u'},$$

où α pourra être déterminé comme au § 2. On trouvera alors que

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y_1^2} < N$$

à l'intérieur de la region S_1, où N est un nombre positif fixe qui peut être calculé comme à l'endroit cité.

En posant ensuite

$$u' = u_1 + \frac{N}{4}(x_1^2 + y_1^2),$$

on a à l'intérieur de S_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} < 0.$$

Et, enfin, si

$$u_1 = v_1 + h_1,$$

où h_1 est la fonction harmonique qui se confond avec u_1 sur les deux circonférences C_1 et C_1', v_1 s'annulera sur ces circonférences et vérifiera également l'inégalité

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} < 0$$

à l'intérieur de la couronne S_1. Il en résulte que v_1 n'a pas de minimum dans cette région et par conséquent

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho_1} \leqq 0$$

sur la circonférence.

D'autre part la fonction $h_1(x_1, y_1)$ est représentée par une surface à courbure, en général, négative (l'ensemble de points à courbure négative et partout dense sur toute la surface, si celle-ci n'est pas un plan). Dans ces conditions le plan tangent à la surface en un point M de C_1 (où tous les points de la surface sont à la même hauteur $1 - e^{-\frac{R+\alpha}{\alpha}} - \frac{N}{4}$) est ou bien horizontal, ou bien rencontre la surface en un point ayant sa projection sur la circonférence interne C_1'.

L'inclinaison du plan tangent $\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1}$ sera dans ce dernier cas inférieure à

$$\frac{1}{1-R_1'}.$$

Donc,

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho_1} < \frac{1}{1-R_1'}$$

en tout point de la circonférence C_1, d'où

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho_1} < \frac{1}{1-R_1'} + \frac{N}{2}.$$

Et enfin

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1} < \alpha e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{1-R_1'} + \frac{N}{2}\right) = L_1$$

Mais, puisque $\frac{\partial \varrho}{\partial \theta_1} = 0$ sur la circonférence C_1, on a également

$$\left|\frac{\partial \varrho}{\partial x_1}\right| < L_1, \quad \left|\frac{\partial \varrho}{\partial y_1}\right| < L_1,$$

d'où on tire sans difficulté au moyen des équations (19^{bis}) les limites supérieures de $\left|\frac{\partial x}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial y_1}\right|$, sur la même circonférence. Donc finalement, grâce au résultat de la page 103, nous savons assigner une limite supérieure des modules des dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x}{\partial y_1}$, $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y}{\partial y_1}$, et aussi du déterminant fonctionnel D sur la circonférence C_1 comme à son intérieur.

Il en résulte que *si* (comme nous l'avons supposé) *on connaît des limites supérieures des modules des derivées partielles des $n+1$ premiers ordres de (A, B, C) par rapport à (x, y), on peut assigner également des limites supérieures des modules des derivées partielles des $n-3$ premiers ordres de (x, y) considérées comme fonctions de (x_1, y_1). Les limites supérieures des modules des dérivées des $n-4$ premiers ordres par rapport à (x_1, y_1) des coefficients de l'équation* (10) *seront donc connues, si les dérivées des $n-4$ premiers ordres des coefficients D, E, F sont bornées.*

§ 10.

En posant, en particulier $n = 6$, nous voyons que nous connaîtrons les limites supérieures des modules des dérivées partielles des deux premiers ordres des coefficients de l'équation (10); nous serons donc en droit de lui appliquer les inégalités (10) de la première partie de ce travail (Math. Ann. 62, p. 260), qui prendront la forme

$$(22)\quad \{z\}_{0_1 1} < \lambda\,\{M\}_{0_1 1},\quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\}_{0_1 1} < \lambda\,\{M\}_{0_1 1},\quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y_1}\right\}_{0_1 1} < \lambda\,\{M\}_{0_1 1},$$

si nous introduisons de *nouvelles notations pour les modules trigonométriques à l'intérieur du cercle C_1 ou sur le segment* $0_1 1$. D'ailleurs *nous désignerons, en général, par*

$$\{z\}_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} \max_{a \leqq \varrho_1 \leqq b} |A_n(\varrho_1)| + \max_{a \leqq \varrho_1 \leqq b} |B_n(\varrho_1)$$

ce que nous appellerons *le module trigonométrique sur le segment ab de la fonction*

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varrho_1)\cos n\theta_1 + B_n(\varrho_1)\sin n\theta_1 .$$

Nous arrivons ainsi à la proposition suivante:

Lemme. *Si z est une solution de l'équation*

$$(9^{\text{bis}})\quad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial y} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M, \quad (F \leqq 0).$$

qui s'annule sur la circonférence C de rayon R; si les coefficients de l'équation sont analytiques à l'intérieur du cercle et qu'on connaisse des limites supérieures des modules des dérivées des sept premiers ordres de A, B, C et des deux premiers ordres de D, E, F; si de plus l'équation peut être réduite à la forme canonique de telle sorte que le cercle C se transforme en un cercle C_1 de rayon 1, *dans le plan des nouvelles variables x_1, y_1 (et que le centre O du cercle C et le centre O_1 du cercle C_1 se correspondent): les modules tri-*

gonométriques sur le segment $0_1 1$ *de* z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ *considérées comme fonctions de* (x_1, y_1) *satisfont aux inégalités*

$$\{z\}_{0,1} < k\,\{M\}_{0,1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0,1} < k\,\{M\}_{0,1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0,1} < k\,\}M\}_{0,1},$$

où k *ne dépend pas de* M.

En effet, après la transformation de l'équation (9^{bis}) on trouve immédiatement les inégalités (22). Or

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Mais les modules trigonométriques de $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$ sont finis en vertu de ce qui précède, donc les inégalités annoncées sont exactes.

Mais il n'est pas possible de donner des inégalités de la même nature relatives aux modules trigonométriques des dérivées *secondes.* Il est nécessaire de remplacer les modules trigonométriques par d'autres expressions un peu plus compliquées.

§ 11.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x sur le segment OR, qui sur une partie OA de ce segment est développable en série *normale admettant à l'intérieur d'un contour* Γ_{OAa} (voir „Sur la nature analytique etc.“, Math. Ann. 59, ch. 2, fig. 2), *une norme inférieure* $[f(x)]_{Aa}$; supposons que sur la deuxième partie AR du segment OR la fonction $f(x)$ admet son module maximum égal à M.

Le plus grand des deux nombres $[f(x)]_{Aa}$ et M sera appelé *le module de la fonction* $f(x)$ *sur le segment* OR *normalisé à l'intérieur du contour* Γ_{OAa}. Nous le désignerons par le symbole $[f(x)]_{Aa}^{(OR)}$.

Si l'on considère la fonction de deux variables

$$f(\varrho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

où A_n et B_n sont des fonctions de ϱ qui sur le segment OA se développent en séries de la forme

$$A_n = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}^{(n)}\, \varrho^{n+p}(A^2-\varrho^2)^q, \qquad B_n = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{pq}^{(n)}\, \varrho^{n+p}(A^2-\varrho^2)^q,$$

on donnera le nom de *module trigonométrique de la fonction* $f(\varrho, \theta)$ *sur le segment* OR *normalisé à l'intérieur du contour* Γ_{OAa} *à l'expression*

$$[f(\varrho, \theta)]_{Aa}^{(OR)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n]_{Aa}^{(OR)} + [B_n]_{Aa}^{(OR)}.$$

§ 12.

Ceci posé, soit ε le rayon d'un cercle concentrique à C, à l'intérieur duquel tous les coefficients se développent en séries convergentes suivant les puissances de $x+yi$, $x-yi$. Remarquons que la région du plan (x_1, y_1), qui correspondra à ce cercle de rayon ε, contiendra à son intérieur*) un cercle concentrique à C_1 de rayon déterminé ε_1.

D'autre part, on pourra choisir un cercle σ de rayon r suffisamment petit et lui appliquer la méthode des approximations successives (loc. cit., ch. 4) qui m'a permis d'établir le théorème de M. Hilbert.

Puisqu'on connaît les limites supérieures des modules des dérivées troisièmes des fonctions x_1 et y_1, on trouvera ainsi des limites supérieures des *normes* des fonctions x_1 et y_1 à l'intérieur d'un contour $\Gamma_{0r\frac{r}{2}}$ bien déterminé. Or en vertu de la théorie des séries normales, la *norme* d'une fonction à l'intérieur d'un contour $\Gamma_{0r\frac{r}{2}}$ dépasse nécessairement la somme qu'on obtient en remplaçant, dans le développement de la fonction suivant les puissances de $x+yi$ et $x-yi$, tous les termes par leurs modules, et en posant $x+yi = x-yi = \frac{r}{2}$. Par conséquent, du moment qu'on connaît, d'après ce qui précède, une limite supérieure du module du déterminant fonctionnel

$$D = \frac{\partial x}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial y_1} - \frac{\partial x}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1},$$

la théorie classique de la résolution de deux équations analytiques à deux inconnues permet d'indiquer également des limites supérieures des sommes qu'on obtient en remplaçant dans les développements de x, y suivant les puissances de $x_1 + iy_1$ et $x_1 - iy_1$ tous les termes par leurs modules et en posant $x_1 + iy_1 = x_1 - iy_1 = r_1$, r_1 étant un nombre suffisamment petit, mais déterminé.

Dès lors, si nous prenons un cercle quelconque C_1' concentrique à C_1 de rayon R_1' inférieur à r_1 et à ε_1, nous sommes certains que les coefficients de l'équation (10) sont développables sur ce cercle et à son intérieur suivant les puissances de $x_1 + y_1 i$ et $x_1 - y_1 i$ et (loc. cit., ch. 1) ont une norme bien déterminée relative à R_1'. D'ailleurs nous pouvons choisir R_1' suffisamment petit, pour qu'on puisse résoudre le problème de Dirichlet

*) C'est ce qu'on vérifie par un raisonnement identique à celui de la page 104 en tenant compte des limites supérieures qu'on a trouvé pour les modules de $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x}{\partial y_1}$, $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y}{\partial y_1}$.

pour l'équation (10) à l'intérieur du cercle C_1' par la méthode des approximations successives (loc. cit., ch. 1).

Le rayon R_1' étant ainsi défini indépendemment du second membre M de notre équation, nous considérerons M comme fonction de x_1, y_1 et nous envisagerons son module trigonométrique sur le segment $0_1 1$, normalisé à l'intérieur du contour $\Gamma_{0_1 R_1' r_1'}$, où pour fixer les idées r_1' peut être pris égal à $\frac{R_1'}{2}$. Nous obtiendrons ainsi les inégalités fondamentales suivantes (en conservant les hypothèses du lemme énoncé au § 10):

$$(23)\qquad \begin{gathered} [z]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \\ \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \\ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}, \end{gathered}$$

λ étant une constante indépendente de M.

Dans ce but nous remarquons d'abord que le module trigonométrique normalisé est toujours supérieur au module trigonométrique ordinaire; donc, des inégalités (22) on tire a fortiori

$$(22^{\text{bis}})\quad \{z\}_{0_1 1} < k [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\}_{0_1 1} < k [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y_1}\right\}_{0_1 1} < k [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}.$$

En mettant maintenant l'équation (18) sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} = - a \frac{\partial z}{\partial x_1} - b \frac{\partial z}{\partial y_1} - Fz + M = M_1,$$

et en la considérant comme une équation de Poisson, on a (en tenant compte des formules (16), loc. cit., ch. 1)

$$\left\{\varrho_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{0_1 1} < \mu \{M_1\}_{0_1 1}; \quad \left\{\varrho_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right\}_{0_1 1} < \mu \{M_1\}_{0_1 1};$$
$$\left\{\varrho_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{0_1 1} < \mu \{M_1\}_{0_1 1},$$

et grâce aux inégalités (22^{bis}), on obtient a fortiori

$$(24)\qquad \begin{gathered} \left\{\varrho_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{0_1 1} < \varkappa' [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left\{\varrho_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right\}_{0_1 1} < \varkappa' [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \\ \left\{\varrho_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{0_1 1} < \varkappa' [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}, \end{gathered}$$

$\varkappa'$ étant une constante déterminée (qui dépend de a, b, F mais non pas de M).

Des inégalités (24) nous tirons deux conséquences. Premièrement,

$$(25)\qquad \begin{gathered} \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{R_1' 1} < \varkappa'' [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right\}_{R_1' 1} < \varkappa'' [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}; \\ \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{R_1' 1} < \varkappa'' [M]^{(0_1 1)}_{R_1' r_1'}, \end{gathered}$$

où $\varkappa''$ est une nouvelle constante.

D'autre part, on a sur la circonférence C_1'

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos n\theta_1 + Q_n \sin n\theta_1,$$

où

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n| + |Q_n| < \varkappa'' [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1}.$$

Donc, en désignant par h la fonction harmonique qui sur la circonférence C_1' se confond avec z, nous trouvons:

$$[h]_{R_1' r_1'} < \varkappa_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial y_1}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};$$

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'},$$

$\varkappa_1$ étant une constante déterminée.

En posant ensuite

$$z = h + v,$$

nous voyons que v s'annule sur la circonférence C_1' et satisfait à l'équation

$$(26) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + a\frac{\partial v}{\partial x_1} + b\frac{\partial v}{\partial y_1} + Fv = M - a\frac{\partial h}{\partial x_1} - b\frac{\partial h}{\partial y_1} - Fh = M'.$$

Et puisque nous avons supposé plus haut que la circonférence C_1' est choisie assez petite pour qu'on puisse lui appliquer la méthode des approximations successives, on a (en appliquant le raisonnement du ch. 1, loc. cit.)

$$[v]_{R_1' r_1'} < \varkappa_2 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_2 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'},$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial y_1}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_2 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'},$$

où $\varkappa_2$ est une constante déterminée, car $[M]_{R_1' r_1'} \leqq [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}$.

Dès lors nous pouvons considérer l'équation (26) comme une équation de Poisson dont le second membre a une norme qui à l'intérieur du contour $\Gamma_{0 R_1' r_1'}$ est inférieure à $\varkappa_1' [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}$, en désignant par $\varkappa_1'$ une nouvelle constante déterminée. Donc (loc. cit., ch. 3, inégalité (36)), on a

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_2' [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_2' [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'},$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right]_{R_1' r_1'} < \varkappa_2' [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}.$$

Et, par conséquent,

$$
(25^{\text{bis}})\qquad
\begin{aligned}
&[z]_{R_1' r_1'} < (\varkappa_1+\varkappa_2)[M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]_{R_1' r_1'} < (\varkappa_1+\varkappa_2)[M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};\\
&\left[\frac{\partial z}{\partial y_1}\right]_{R_1' r_1'} < (\varkappa_1+\varkappa_2)[M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]_{R_1' r_1'} < (\varkappa_1+\varkappa_2')[M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};\\
&\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial y_1}\right]_{R_1' r_1'} < (\varkappa_1+\varkappa_2')[M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right]_{R_1' r_1'} < (\varkappa_1+\varkappa_2')[M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}.
\end{aligned}
$$

Les inégalités (25^{bis}) jointes aux inégalités (25) et (22^{bis}) donnent, à cause de la définition des modules normalisés,

$$
\begin{aligned}
&[z]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};\\
&\left[\frac{\partial z}{\partial y_1}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};\\
&\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial y_1}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda_1 [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};
\end{aligned}
$$

d'où, en remarquant que les dérivées partielles de x_1, y_1 par rapport à x, y ont des modules normalisés finis, nous obtenons, enfin, les *inégatités fondamentales:*

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&[z]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};\\
&\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'};\\
&\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda [M]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}.
\end{aligned}
$$

Nous ferons d'abord l'usage suivant des inégalités obtenues.

§ 13.

Mettons l'équation (9^{bis}) sous la forme

$$(1+P^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (1+Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M,$$

à laquelle se réduit l'équation contenant le paramètre α

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
&(1+\alpha P^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\alpha PQ\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (1+\alpha Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\
&\qquad + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M,
\end{aligned}
$$

lorsqu'on y fait $\alpha = 1$.

L'équation (27) pour $\alpha = 0$, est elle-même de la forme réduite; on a dans ce cas $x_1 = \frac{x}{R}$, $y_1 = \frac{y}{R}\cdot$ La possibilité du problème de Dirichlet dans le cas de l'équation réduite est démontrée par M. Picard*) dès 1901; les inégalités (23) sont donc dans ce cas une conséquence immédiate des inégalités (22). Cela étant, nous établirons facilement l'existence des variables de transformation (x_1, y_1) pour des valeurs de α suffisamment petites, et par conséquent nous reconnaîtrons aussi la possibilité du problème de Dirichlet et l'exactitude des inégalités (23) pour ces valeurs de α.

En effet, les fonctions x_1' et H, au moyen desquelles on détermine x_1 et y_1 sont actuellement des solutions de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1+\alpha P^2)\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha PQ\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{1+\alpha^2(P^2+Q^2)}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\alpha PQ\frac{\partial v}{\partial x}+(1+\alpha Q^2)\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{1+\alpha^2(P^2+Q^2)}}\right]=0$$

définies par leurs valeurs sur la circonférence C.

Mettons cette équation sous la forme

$$(12^{\text{bis}})\quad (1+\alpha P^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\alpha PQ\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(1+\alpha Q^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2D_1(x,y,\alpha)\frac{\partial v}{\partial x}+ \\ +2E_1(x,y,\alpha)\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

On pourra satisfaire à l'équation (12^{bis}) pour des valeurs de α assez petites, par une série

$$(28)\qquad v=v_0+\alpha v_1+\frac{\alpha^2}{2}v_2+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}v_n+\cdots$$

où v_0 prend les valeurs indiquées sur le contour C et satisfait à l'équation (12^{bis}), lorsqu' on y fait $\alpha=0$,

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+2D_1(x,y,0)\frac{\partial v_0}{\partial x}+2E_1(x,y,0)\frac{\partial v_0}{\partial y}=0;$$

$v_1, v_2\cdots v_n\cdots$ s'annulent sur le contour et vérifient respectivement les équations

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+2D_1(x,y,0)\frac{\partial v_1}{\partial x}+2E_1(x,y,0)\frac{\partial v_1}{\partial y}=-\Big(P^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ +2PQ\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+Q^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+2\frac{\partial D_1}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial v_0}{\partial x}+2\frac{\partial E_1}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial v_0}{\partial y}\Big).$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}+2D_1\frac{\partial v_n}{\partial x}+2E_1\frac{\partial v_n}{\partial y}=-n\Big[P^2\frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2}+2PQ\frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x\partial y} \\ +Q^2\frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2}+2\frac{\partial D_1}{\partial\alpha}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}+2\frac{\partial E_1}{\partial\alpha}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}\Big]-\frac{n(n-1)}{2}\Big[2\frac{\partial^2 D_1}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial v_{n-2}}{\partial x} \\ +2\frac{\partial^2 E_1}{\partial\alpha^2}\frac{\partial v_{n-2}}{\partial y}\Big]-\cdots$$

. . . .

*) E. Picard, „Sur la généralisation du problème de Dirichlet", Acta Mathematica 25.

Les fonctions $v_0, v_1 \cdots v_n$ étant ainsi déterminées, il ne reste qu'à montrer la convergence uniforme de la série (28) et de ses dérivées des deux premiers ordres, pour α suffisamment petit.

A cet effet, remarquons qu'on peut certainement fixer un nombre g tel que

$$[P^2]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < g; \quad [Q^2]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < g; \quad 2\left[\frac{\partial D_1}{\partial \alpha}\right]_{R_1 r_1'}^{(0,1)} < g; \quad 2\left[\frac{\partial E_1}{\partial \alpha}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < g;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\left[\frac{\partial^n D_1}{\partial \alpha^n}\right]_{R_1 r_1'}^{(0,1)} < n!\, g^n; \quad 2\left[\frac{\partial^n E_1}{\partial \alpha^n}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, g^n. \tag{30}$$

D'autre part, on déduit facilement des inégaltités (23) que, si on connaît des limites supérieures des modules des dérivées des six premiers ordres de la fonction à laquelle v_0 se réduit sur le contour (ce qui a lieu lorsqu'il s'agit de la détermination de x_1' et H), on peut fixer un nombre s tel que

$$\begin{gathered}[v_0]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < s, \quad \left[\frac{\partial v_0}{\partial x}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < s, \quad \left[\frac{\partial v_0}{\partial y}\right]_{R_1 r_1'}^{(0,1)} < s, \quad \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < s, \\ \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < s, \quad \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < s.\end{gathered} \tag{31}$$

Supposons d'ailleurs qu'on a choisi s de sorte que

$$s > 8\lambda g, \qquad s > 2g. \tag{31'}$$

Je dis que dans ces conditions, on aura d'une façon générale

$$\begin{gathered}[v_n]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, s^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, s^{n+1}, \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, s^{n+1}, \\ \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, s^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, s^{n+1}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} < n!\, s^{n+1}.\end{gathered} \tag{32}$$

En effet, on voit immédiatement que les inégalités (32) sont vérifiées pour $n = 1$. Or, si elles sont vraies pour toutes les valeurs *inférieures* à un certain nombre n, elles seront aussi exactes pour la valeur n ellemême, car en vertu des inégalités (23) on a moyennant les inégalités (30), (31') et (31)

$$\begin{aligned}[v_n]_{R_1' r_1'}^{(0,1)} &< 6\lambda n!\, g s^n + 2\lambda n!\, (g^2 s^{n-1} + g^3 s^{n-2} + \cdots + g^n s) \\ &< 6\lambda n!\, g s^n + 4\lambda n!\, g^2 s^{n-1} < 8\lambda g n!\, s^n < n!\, s^{n+1}.\end{aligned}$$

Les inégalités (32) qu'on établit ainsi de proche en proche, montrent bien la convergence de la serie (28) et de ses dérivées des deux premiers ordres, lorsqu'on a

$$|\alpha| < \frac{1}{s}.$$

Ainsi, pour une valeur α_0 quelconque de α, satisfaisant à cette inégalité, le problème de la réduction de l'équation (27) sera possible et les inégalités (23), où λ *est fixé a priori indépendemment de* α, seront vraies. On pourra alors, pour $\alpha = \alpha_0$, répéter mot par mot le raisonnement fait pour $\alpha = 0$, et on en conclura *la possibilité du problème de la réduction*, lorsque

$$|\alpha - \alpha_0| < \frac{1}{s},$$

et ainsi de suite. En répétant un nombre limité de fois le même raisonnement, nous sommes certains d'arriver jusqu'à $\alpha = 1$. Cette certitude résulte du fait que la possibilité seule du problème de la *réduction* nous a conduit à des conséquences *quantitatives* importantes et, en particulier, aux inégalités (23) dans lesquelles λ ne dépend que des coefficients de l'équation (sans second membre) qu'on examine; de sorte que, pour toute valeur de α, on sait indiquer a priori une limite inférieure du rayon de convergence $\left(\frac{1}{s}\right)$ de la série correspondant à la série (28).

Je n'ai pas l'intention d'indiquer ici une méthode rapide et pratique de résolution du problème de la réduction. Il nous suffit de savoir qu'il est possible, pour en déduire la possibilité du problème de Dirichlet pour l'équation non réduite dans des conditions aussi générales que pour l'équation réduite, c'est à dire, quelle que soit la succession continue de valeurs que doit prendre sur la circonférence la solution cherchée. Pratiquement ces deux problèmes doivent être traités séparément en cherchant dans les deux cas directement les developpements en série de Taylor suivant les puissances de α et en effectuant ensuite le prolongement analytique au moyen du développement de M. Mittag-Leffler. En terminant ce chapitre je me bornerai de renvoyer au § 28 de mon mémoire russe cité plus haut pour ce qui concerne l'application de ma méthode à des contours autres que la circonférence et à des coefficients non-analytiques. Je remarquerai seulement que les contours analytiques se ramènent au cercle par un changement des variables qui laisse invariante la forme de l'équation; quant aux données non analytiques (contours ou coefficients) on les ramène dans des cas étendus aux données analytiques par l'application du théorème de Weierstrass.

Je laisse également au lecteur le soin d'établir la possibilité du problème de Dirichlet pour l'équation (9^{bis}) à l'intérieur d'une couronne circulaire (voir le § 21 et la fin du § 27 de mon mémoire russe).

Chapitre III.

Théorie générale des équations du type elliptique.

§ 14.

La théorie générale de la résolution du problème de Dirichlet s'appuie sur le même lemme fondamental que nous avons déjà rencontré dans les cas particuliers étudiés jusqu'ici.

Lemme. *Si z_0 est une solution de l'équation analytique du type elliptique*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha) = 0 \qquad (F_r' F_z' \leqq 0) \tag{2}$$

correspondant à $\alpha = \alpha_0$, qui s'annule sur la circonférence C et admet des dérivées bornées des neuf premiers ordres sur cette circonférence aussi bien qu'à son intérieur, il existe un nombre positif ε tel que, pour toutes les valeurs du paramètre α (reel ou complexe) satisfaisant à l'inégalité $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, l'équation admette une solution jouissant des mêmes propriétés que la solution z_0 et se confondant avec cette dernière sur le contour C.

La démonstration se fait comme il suit.

Construisons a priori la série

$$z = z_0 + (\alpha - \alpha_0) z_1 + \cdots + \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} z_n + \cdots,$$

où z_0 est la solution donnée pour $\alpha = \alpha_0$; quant aux fonctions $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ elles s'annulent toutes sur la circonférence C et satisfont à son intérieur aux équations linéaires suivantes: z_1 satisfait à l'équation

$$F_{r_0}' \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + F_{s_0}' \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + F_{t_0}' \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + F_{p_0}' \frac{\partial z_1}{\partial x} + F_{q_0}' \frac{\partial z_1}{\partial y} + F_{z_0}' z_1 = A_1,$$

obtenue en différentiant l'équation (2) par rapport à α, z_2 satisfait à l'équation

$$F_{r_0}' \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + F_{s_0}' \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + F_{t_0}' \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} + F_{p_0}' \frac{\partial z_2}{\partial x} + F_{q_0}' \frac{\partial z_2}{\partial y} + F_{z_0}' z_2 = A_2,$$

qu'on obtient en différentiant deux fois par rapport à α et ainsi de suite:

. . . .

$$F_{r_0}' \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + F_{s_0}' \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + F_{t_0}' \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + F_{p_0}' \frac{\partial z_n}{\partial x} + F_{q_0}' \frac{\partial z_n}{\partial y} + F_{z_0}' z_n = A_n,$$

. . . .

en ayant soin de remplacer toujours α par α_0 et $\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \alpha}$ par z_n.

On voit alors que la série z vérifie *formellement* l'équation (2), quel que soit α; elle la vérifiera effectivement, pour les valeurs de α pour lesquelles elle converge uniformément ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. Nous allons voir que cette convergence a lieu pour des valeurs de $|\alpha-\alpha_0|$ suffisamment petites.

En effet, en tenant compte de la nature analytique de z, („Sur la nature analytique des solutions etc.“ ch. 4, Math. Ann. 59,) on peut appliquer les inégalités (23) en attribuant à λ une valeur fixe bien déterminée indépendante de n

$$(23^{\text{bis}})\quad \begin{gathered} [z_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \\ \left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \\ \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}; \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda\,[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}. \end{gathered}$$

Les modules normalisés se rapportent naturellement à de nouvelles variables x_1, y_1 dont la détermination théorique a été faite dans le chapitre précédent; mais pratiquement leur calcul est manifestement inutile — elles ne servent que pour les besoins de la démonstration.

Construisons ensuite l'équation auxiliaire

$$(33)\qquad v = \lambda\varphi(v, \alpha)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(v, \alpha) = {} & [F(r_0+v,\ s_0+v,\ t_0+v,\ p_0+v,\ q_0+v,\ x,\ y,\ \alpha]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} \\ & - [F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x, y, \alpha_0)]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} - v\Big\{[F'_{r_0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} + [F'_{s_0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} + [F'_{t_0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1} \\ & + [F'_{p_0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} + [F'_{q_0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} + [F'_{z_0}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}\Big\}, \end{aligned}$$

p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 désignant les dérivées partielles des deux premiers ordres de z_0, de sorte que

$$\varphi(0, \alpha_0) = \varphi_v'(0, \alpha_0) = 0,$$

la fonction φ ne dépendant evidemment pas de x et y. J'ai à peine besoin de dire que la fonction $\varphi(v, \alpha)$ est développable suivant les puissances de v et $\alpha-\alpha_0$, du moment qu'on suppose la fonction F analytique pour toutes les valeurs reelles finies des variables r, s, t, p, q, z, pour les valeurs de x, y dans la région considérée et pour les valeurs de α voisines de α_0. Donc, la solution v de l'équation (33) sera développable en série convergente suivant les puissances de $(\alpha-\alpha_0)$

$$(35)\qquad v = (\alpha-\alpha_0)\,v_1 + \cdots + \frac{(\alpha-\alpha_0)^n}{n!}\,v_n + \cdots.$$

Or, il est aisé de voir que

$$(34)\quad \begin{gathered} v_n > [z_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad v_n > \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad v_n > \left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \\ v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}. \end{gathered}$$

En effet, il résulte de la construction de la fonction $\varphi(v, \alpha)$ que

$$v_1 = k\varphi'_\alpha(0, \alpha_0) = \lambda[A_1]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}.$$

Et par conséquent, grâce aux inégalités (23^{bis}), les inégalités (34) sont vérifiées pour $n = 1$. Supposons-les vraies pour toutes les valeurs de n inférieures à n_1, alors pour toutes ces valeurs de n on devra avoir également

$$[A_n]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \frac{d^n \varphi(0, \alpha_0)}{d\alpha^n},$$

où le second membre de l'inégalité représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ complète de φ par rapport à α pour $\alpha = \alpha_0$, car cette dérivée s'obtient précisément en remplaçant dans $[A_n]^{(0,1)}_{R_1' z_1'}$

$$[z_i]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad \left[\frac{\partial z_i}{\partial x}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} \cdots \left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} \quad \text{par} \quad v_i (i \leqq n).$$

Et par conséquent, en vertu des inégalités (23^{bis}), on aura aussi

$$[z_{n+1}]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda \frac{d^n \varphi(0, \alpha_0)}{d\alpha^n} = v_{n+1}, \quad \left[\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < \lambda \frac{d^n \varphi(0, \alpha_0)}{d\alpha^n} = v_{n+1},$$

. . . .

$$\left[\frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'} < v_{n+1}.$$

Les inégalités (34) se trouvent ainsi établies de proche en proche pour *toutes les valeurs entières de n.*

La convergence uniforme de la série z et de ses dérivées des deux premiers ordres se trouve ainsi établie pour les valeurs de $\alpha - \alpha_0$, dont le module est inférieur au rayon de convergence ε de la série (35). Il ne reste plus qu'à établir que, pour les valeurs considérées de α, z admet des dérivées finies des neuf premiers ordres.

Dans ce but différentions l'équation (2) par rapport à θ; nous obtiendrons une équation de la forme

$$f_r' \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + f_s' \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + f_t' \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} = A',$$

où $z' = \frac{\partial z}{\partial \theta}$ et A' ne dépend que de z et de ses dérivées des deux premiers ordres.

La fonction z' qui s'annule sur C et est régulière à son intérieur, satisfait à une équation linéaire qui se ramène à la forme réduite par le même changement de variables que plus haut. Par conséquent, la connaissance du module trigonométrique normalisé du second membre nous donne par l'application des inégalités (23), où la constante λ n'est pas nécessairement la même que précedemment, des limites supérieures pour *les modules normalisés*

$$\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad \left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}, \quad \left[\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\right]^{(0,1)}_{R_1' r_1'}.$$

En différentiant successivement par rapport à θ on obtiendra toujours des équations linéaires dont les premiers membres sont identiques et les seconds ne dépendent que de quantités dont ont connaît déjà des limites supérieures des modules trigonométriques normalisés.

On trouvera ainsi des limites supérieures des modules des dérivées $\frac{\partial^n z}{\partial \theta^n}$, $\frac{\partial^n z}{\partial \theta^{n-1} \partial \varrho}$, $\frac{\partial^n z}{\partial \theta^{n-2} \partial \varrho^2}$, quel que soit n. En différentiant par rapport à ϱ l'équation donnée (2), on en tirera immédiatement une limite supérieure de $\left|\frac{\partial^3 z}{\partial \theta^3}\right|$ à l'intérieur d'une couronne circulaire S formée par la circonférence C et une autre circonférence fixe C' suffisamment petite $\left(\text{puisqu'on connaît } \frac{\partial^3 z}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial \varrho \partial \theta^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial \varrho^2 \partial \theta}\right)$. En différentiant plusieurs fois, on obtiendra toujours une équation où il n'entrera qu'une seule dérivée dont la limite supérieure n'est pas connue dans la couronne considérée; cette dérivée n'entrant qu'au premier degré avec un coefficient non nul (dans S), on déterminera également la limite supérieure de son module dans S.

Quant à la petite aire limitée par la circonférence C' nous n'avons pas à nous en préoccuper, car la méthode que j'ai employée autrefois pour établir le caractère analytique (loc. cit.) de la solution donne manifestement des limites supérieures des dérivées de tous les ordres dans cette région.

Notre lemme est complètement établi, et d'ailleurs il n'est pas sans intérêt de remarquer que nous avons prouvé non seulement l'existence de dérivées bornées des 9 premiers ordres de la solution, mais de celles de tous les ordres (sur le contour comme à son intérieur).

Si au lieu de s'annuler, *la solution* z_0 *se réduisait sur le contour à une fonction analytique quelconque de l'arc, notre lemme resterait encore vrai*; pour s'en convaincre, il suffirait de ramener ce cas au précédent en retranchant de z_0 la fonction harmonique H qui se confond avec z_0 sur la circonférence C. Je remarquerai également qu'au lieu d'introduire le paramètre α dans l'équation, on peut le faire entrer dans les valeurs de la solution sur le contour comme nous l'avions fait dans le cas de l'équation (1). Il est clair qu'il n'y a rien d'important à changer dans la démonstration, et d'ailleurs, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, il est évident que le dernier cas peut être considéré comme un cas particulier du premier, puisqu'on peut toujours eliminer le paramètre variable du contour pour le faire entrer dans l'équation, tandis que l'opération inverse est, en général, impossible. Le lemme ainsi démontré nous montre que la question de la possibilité du problème de Dirichlet se ramène à la question de la possibilité de fixer a priori des limites supérieures des modules de la solution et de ses dérivées des 9 premiers ordres, si on admet seulement l'existence de cette solution et de ses dérivées de tous les ordres. Ce résultat assez compliqué devient extremement simple grâce à l'application de la méthode des fonctions auxiliaires.

§ 15.

Avant d'aborder le cas général, nous examinerons le cas particulier de l'équation

(3). $$Ar + 2Bs + Ct = D$$

où A, B, C, D sont des fonctions analytiques de x, y, z, p, q. Nous montrerons que dans ce cas *la connaissance des limites supérieures de* $|z|$ *et des modules de ses dérivées premières* $|p|$, $|q|$ *permet d'assigner des limites supérieures des modules des dérivées de tous les ordres.*

Désignons par M la limite supérieure de $|z|$, $|p|$, $|q|$. Formons ensuite l'expression

$$w = \frac{1}{\alpha^2} e^{2\frac{p+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{p+M}{\alpha}}} [Ar^2 + 2Brs + Cs^2],$$

où α est un nombre qui sera déterminé plus tard. Nous nous proposons d'indiquer une limite supérieure de w en un point où cette fonction atteint son maximum.

Avant tout formons l'équation à laquelle satisfait $p = \frac{\partial z}{\partial x}$. Dans ce but différentions l'équation (3) par rapport à x; ce qui nous donnera, en remarquant que

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad t = \frac{D - A\frac{\partial p}{\partial x} - 2B\frac{\partial p}{\partial y}}{C}$$

une équation de la forme

(36) $$A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + 2d\frac{\partial p}{\partial x} + 2e\frac{\partial p}{\partial y} + f,$$

où a, b, c, d, e, f sont des fonctions analytiques connues de x, y, z, p, q.

En introduisant ensuite la fonction u définie par l'égalité

$$p = -M + \alpha \log\log u,$$

on voit immédiatement que

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2,$$

où $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$. Dans la suite, nous emploierons également les notations abrégées: $r_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $t_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. En repetant alors le calcul du § 3 on trouve l'équation

$$(37) \qquad A r_1 + 2 B s_1 + C t_1 = \frac{1}{u \log u} \{[A(1+\log u) + \alpha a] p_1^2$$
$$+ 2[B(1+\log u) + 2\alpha b] p_1 q_1 + [C(1+\log u) + \alpha c] q_1^2\} + 2 d p_1 + 2 e q_1 + f \frac{u \log u}{\alpha} = Q_1.$$

D'autre part, au point où w est maximum, on a:

$$(38) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} = (A p_1 + B q_1) r_1 + (B p_1 + C q_1) s_1 + X = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} = (A p_1 + B q_1) s_1 + (B p_1 + C q_1) t_1 + Y = 0,$$

en posant, pour abréger:

$$X = \frac{1}{2}\left[(A_x' + A_z' p) p_1^2 + 2(B_x' + B_z' p) p_1 q_1 + (C_x' + C_z' p) q_1^2\right]$$
$$+ \frac{\alpha}{2 u \log u}\left[A_p' p_1^3 + (A_q' + 2 B_p') p_1^2 q_1 + (2 B_q' + C_p') p_1 q_1^2 + C_q' q_1^3\right],$$

$$Y = \frac{1}{2}\left[\left(A_y' + A_z' q + \frac{D}{C} A_q'\right)\right] p_1^2 + 2\left(B_y' + B_z' q + \frac{D}{C} B_q'\right) p_1 q_1$$
$$+ \left(C_y' + c_z' q + \frac{D}{C} C_q'\right) q_1^2\Big] + \frac{\alpha}{2 u \log u}\left[-\frac{A}{C} A_q' p_1^3 + \left(A_p' - \frac{2B}{C} A_q' - \frac{2A}{C} B_q'\right) p_1^2 q_1\right.$$
$$\left. + \left(2 B_p' - \frac{4B}{C} B_q' - \frac{A}{C} C_q'\right) p_1 q_1^2 + \left(C_p' - \frac{2B}{C} C_q'\right) q_1^3\right].$$

Et en résolvant les équations (37) et (38) par rapport à r_1, s_1, t_1, on trouve

$$r_1 = \frac{Q_1 (B p_1 + C q_1)^2 + C Y (B p_1 + C q_1) + X[(2B^2 - AC) p_1 + B C q_1]}{(AC - B^2) w}$$

$$s_1 = \frac{- Q_1 (B p_1 + C q_1)(A p_1 + B q_1) - C Y (A p_1 + B q_1) - A X (B p_1 + C q_1)}{(AC - B^2) w},$$

$$t_1 = \frac{Q_1 (A p_1 + B q_1)^2 + Y[A B p_1 + (2B^2 - AC) q_1] + A X (A p_1 + B q_1)}{(AC - B^2) w}.$$

Dans ces expressions il est important de remarquer que X et Y se composent chacun de deux parties: d'un polynome de second degré en (p_1, q_1) et d'un polynome de troisième degré de ces mêmes variables, les coefficients de ce dernier contenant α en facteur. On peut donc écrire, en tenant compte de l'équation (37),

$$(AC-B^2)wr_1 = w(Bp_1+Cq_1)^2\frac{1+\log u}{u\log u}+\frac{\alpha g_1}{u\log u}+h_1+\frac{l_1 u\log u}{\alpha},$$

$$(40)\quad (AC-B^2)ws_1 = -w(Bp_1+Cq_1)(Ap_1+Bq_1)\frac{1+\log u}{u\log u}+\frac{\alpha g_2}{u\log u}$$

$$+h_2+\frac{l_2 u\log u}{\alpha},$$

$$(AC-B^2)wt_1 = w(Ap_1+Bq_1)^2\frac{1+\log u}{u\log u}+\frac{\alpha g_3}{u\log u}+h_3+\frac{l_3 u\log u}{\alpha},$$

où g_1, g_2, g_3 sont des polynomes du quatrième degré au plus par rapport à (p_1, q_1); h_1, h_2, h_3 sont au plus du troisième degré par rapport à p_1, q_1; l_1, l_2, l_3 au plus du second degré par rapport aux mêmes variables; les coefficients de tous ces polynomes sont d'ailleurs des fonctions données de x, y, z, p, q.

Mais, si w est maximum, on a

$$K=\frac{1}{2}\left(A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\leqq 0 \qquad (AC-B^2>0),$$

car la supposition contraire jointe à la condition nécessaire du maximum

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\geqq 0,$$

conduirait aux inégalités $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}>0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}>0$, incompatibles avec le maximum.

Or, en effectuant le calcul, on obtient

$$(39)\qquad K=(Ap_1+Bq_1)\left(A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right)$$

$$+(Bp_1+Cq_1)\left(A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right)+A(Ar_1^2+2Br_1s_1+Cs_1^2)$$

$$+2B[Ar_1s_1+B(r_1t_1+s_1^2)+Cs_1t_1]+C(As_1^2+2Bs_1t_1+Ct_1^2)+H_1$$

$$+H_2+\frac{\alpha}{u\log u}H_3+\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}H_4+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}H_5,$$

en désignant par H_1 un polynome du *premier* degré par rapport à $p_1 r_1$, $p_1 s_1$, $p_1 t_1$, $q_1 r_1$, $q_1 s_1$, $q_1 t_1$; par H_2 — un polynome du *second* degré par rapport à p_1, q_1; par H_3 — un polynome du *premier* degré par rapport à $p_1^2 r_1$, $p_1^2 s_1$, $p_1^2 t_1$, $p_1 q_1 r_1$, $p_1 q_1 s_1$, $p_1 q_1 t_1$, $q_1^2 r_1$, $q_1^2 s_1$, $q_1^2 t_1$; et enfin, H_4 et H_5 sont tous les deux des polynomes du *quatrième* degré par rapport à p_1, q_1; les coefficients de tous ces polynomes sont en outre des fonctions connues de x, y, z, p, q. L'expression de K peut être transformée, si on remarque qu' en différentiant (37) par rapport à x et y respectivement, on obtient:

$$A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}p_1 w+\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}G_1$$
$$+\frac{\alpha}{u\log u}G_2+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}G_3+G_4+\frac{u\log u}{\alpha}G_5$$

et

$$A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}q_1 w+\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}G_{(1)}$$
$$+\frac{\alpha}{u\log u}G_{(2)}+\frac{\alpha}{(u\log u)^2}G_{(3)}+G_{(4)}+\frac{u\log u}{\alpha}G_{(5)},$$

où G_1, G_3, $G_{(1)}$, $G_{(3)}$ sont des polynomes du *troisième* degré de p_1, q_1; G_5 et $G_{(5)}$ sont des polynomes du *premier* degré des mêmes variables; G_2 et $G_{(2)}$ sont des polynomes du *premier* degré par rapport à $p_1 r_1$, $p_1 s_1$, $p_1 t_1$, $q_1 r_1$, $q_1 s_1$, $q_1 t_1$, p_1^2, $p_1 q_1$, q_1^2; et enfin, G_4 et $G_{(4)}$ sont des polynomes du *premier* degré en p_1, q_1, r_1, s_1, t_1. Les coefficients de ces polynomes sont comme auparavant des fonctions connues de x, y, z, p, q.

En substituant alors ces expressions dans la formule (39) et tenant compte des égalités (40) on trouve

$$w^2K=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}w^4+\left(\frac{1+\log u}{u\log u}\right)^2 w^4+\alpha\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}P_6 w$$
$$+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}P_8+\frac{1+\log u}{u\log u}P_7+\frac{\alpha}{u\log u}P_7'+\frac{u\log u}{\alpha}P_6'+P_6''+\left(\frac{u\log u}{\alpha}\right)^2 P_4.$$

où P_8 est un polynome du huitième degré; P_7 et P_7' — du *septième;* P_6, P_6', P_6'' — du sixième; P_4, — du *quatrième* degré par rapport à p_1, q_1; tandisque les coefficients de tous ces polynomes sont des fonctions connues de x, y, z, p, q. Les termes du *huitième* degré par rapport à p_1, q_1 sont donc donnés par l'expression

$$T_8=\frac{w^4}{u^2\log u}+\alpha\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}P_6 w+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}P_8.$$

Par conséquent, en se rappelant que $\log u>1$, on voit qu'on peut fixer un nombre positif α suffisamment petit, mais bien déterminé tel que pour $|p_1|>1$, $|q_1|>1$, on ait

$$T_8>\frac{1}{2}\frac{w^4}{u^2\log u}.$$

Le nombre α étant ainsi déterminé, l'ensemble des autres termes de w^2K se réduit à un polynome T_7 bien déterminé du septième degré au plus par rapport à p_1, q_1. Il en résulte, qu'on peut fixer une valeur w_0 telle que pour $w\geqq w_0$, *l'expression w^2K soit nécessairement positive*; et, comme d'autre part, on a $w^2K<0$ en un point, où w est maximum, nous en concluons que *w ne peut aucunement atteindre en ce point le nombre ainsi fixé w_0.*

Un raisonnement identique permettrait de déterminer une limite supérieure du maximum de l'expression

$$w' = \frac{1}{\alpha^2} e^{2\frac{q+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{q+M}{\alpha}}} [As^2 + 2Bst + Ct^2].$$

§ 16.

Passons à présent à la recherche des limites supérieures de w et w' sur le contour lui-même. La solution considérée se réduisant à une fonction *analytique* de l'angle θ sur le contour C, nous ne diminuons pas la généralité de nos conclusions, en nous limitant au cas, où cette solution z s'annule sur le contour. Cela étant, différentions l'équation (3) par rapport à θ; ce qui nous donne, en posant $\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_1$,

$$A\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2$$
$$+ 2d\frac{\partial z_1}{\partial x} + 2e\frac{\partial z_1}{\partial y} + g = D_1,$$

où a, b, c, d, e, f, g sont des fonctions analytiques de x, y, z, p, q bornées lorsque $R \geqq \sqrt{x^2+y^2} \geqq R'$, R' étant un nombre positif quelconque, par exemple $R' = \frac{R}{2}$. Faisons ensuite

$$z_1 = -M - \alpha + \alpha \log u,$$

en nous réservant de fixer α dans un instant. u vérifie manifestement l'équation

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{u}{\alpha} = Q.$$

On choisira alors α de la sorte, qu'on ait

$$Q > -N$$

à l'intérieur de la couronne S comprise entre les circonférences C de rayon R et C' de rayon $R' = \frac{R}{2}$, où le nombre N se détermine comme au § 2.

Donc, en posant

$$u' = u + \frac{N}{\mu}(x^2 + y^2),$$

où μ est le *minimum* de la fonction $2(A+C)$, nous aurons

$$A\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} > 0.$$

D'autre part, soit v' une fonction qui se confond avec u' sur les deux circonférences C et C' et qui à l'intérieur de S satisfait à l'équation (voir la fin du ch. II) linéaire

$$A\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}=0.$$

En remarquant que la courbure de la surface représentée par v' est, en général, négative (l'ensemble des points à courbure négative est partout dense), on voit que le plan tangent à la surface en un point du bord extérieur (qui se projette sur C) horizontal devra, ou bien être horizontal, ou bien *rencontrer le bord intérieur* (qui se projette sur C'); donc, du moment qu'on connaît le maximum de $|u'|$, on en déduit immédiatement le maximum de l'inclinaison du plan tangent sur le contour, ou, ce qui revient au même, on détermine un nombre L tel que

$$\left|\frac{\partial v'}{\partial \varrho}\right|<L.$$

Or, en posant

$$u'=v'+v_1,$$

on constate que v_1 s'annule sur les deux circonférences C et C' et satisfait à l'inégalité

$$A\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}>0.$$

De sorte que v_1 n'a pas de maximum dans la région considérée, c'est à dire qu'il ne devient jamais positif; il en résulte que sur le contour C

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho}\geqq 0.$$

Donc,

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho}\geqq -L,\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho}\geqq -L-\frac{2RN}{\mu}.$$

Et, enfin,

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}\geqq -\alpha e^{-\frac{M+\alpha}{\alpha}}\left[L+\frac{2RN}{\mu}\right]$$

sur le contour C.

Par un raisonnement tout à fait semblable on obtient au moyen du changement de fonction défini par la formule

$$z_1=-M-\alpha+\alpha\log\frac{1}{1-u}$$

une borne *positive* de $\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}$.

La limite supérieure de $\left|\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}\right|=\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho\,\partial \theta}\right|$ étant ainsi déterminée sur le contour, on déduit immédiatement de l'équation (2) une limite supérieure de $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\right|$. Du moment que toutes les dérivées secondes ont des limites supérieures connues sur le contour, on trouve aussi les limites supérieures de w et w', d'où résultent, enfin, des limites supérieures *générales* (sur le contour C comme à son intérieur) des modules des dérivées secondes.

§ 17.

La même méthode permet de limiter supérieurement les modules de toutes les dérivées successives.

Supposons, en effet, que M soit la limite supérieure des modules de toutes les dérivées de la solution z jusqu'à l'ordre n inclusivement; proposons nous de limiter alors les modules des dérivées d'ordre $n+1$.

Ayant posé d'une façon générale $z_{m,n} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$, cherchons dans ce but des limites supérieures des maxima des expressions

$$w_{k,l} = e^{2(z_{k,l}+M)} e^{2e^{(z_{k,l}+M)}} [A z_{k+1,l}^2 + 2B z_{k+1,l} z_{k,l+1} + C z_{k,l+1}^2],$$

où k, l sont des entiers quelconques, tels que $k+l=n>1$.

En différentiant l'équation (3) k fois par rapport à x, l fois par rapport à y, nous obtenons une équation de la forme suivante

$$A \frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial z_{k,l}}{\partial x} + F_1 \frac{\partial z_{k,l}}{\partial y} + F_2 \frac{\partial^2 z_{k-1,l}}{\partial y^2}$$
$$+ E_2 \frac{\partial^2 z_{k,l-1}}{\partial x^2} + G = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions données de x, y, z et des dérivées partielles de z d'ordre non supérieur à n. En remarquant d'ailleurs que $\frac{\partial^2 z_{k,l-1}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z_{k-1,l}}{\partial y^2}$ s'expriment linéairement au moyen de $\frac{\partial z_{k,l}}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{k,l}}{\partial y}$, on peut faire $E_2 = F_2 = 0$; on aura donc l'équation plus simple

$$A \frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial z_{k,l}}{\partial x} + F_1 \frac{\partial z_{k,l}}{\partial y} + G = 0.$$

On voit bien alors qu'on aura qu'à refaire le raisonnement fait plus haut, en introduisant la fonction auxiliaire u définie par l'égalité

$$z_{k,l} = -M + \log\log u.$$

Le raisonnement est d'ailleurs simplifié à cause de l'absence de termes du *second* degré en $\frac{\partial z_{k,l}}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{k,l}}{\partial y}$ $(k+l=n\geqq 2)$, ce qui permet de prendre a priori $\alpha = 1$. On verra ainsi que la fonction $w_{k,l}$ au point, où elle est maxima ne peut dépasser un certain nombre fixé d'avance $N_{k,l}$. Pour avoir une limite supérieure de $w_{k,l}$ en un point quelconque du cercle, il nous suffira à présent de déterminer cette limite pour un point de son contour seulement. A cet effet, il suffira de différentier l'équation (3)

n fois par rapport à θ, ce qui donnera, en posant $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial \theta^n}$, une équation de la forme

$$A \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} = D_n$$

à laquelle on pourra appliquer la méthode des fonctions auxiliaires sur le contour C. On trouvera ainsi une limite supérieure de

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^{n+1} z}{\partial \varrho \, \partial \theta^n}\right|$$

sur la circonférence; en tenant compte ensuite de l'équation obtenue en différentiant l'équation (3) $n-1$ fois par rapport à θ on trouvera immédiatement la limite supérieure de $\left|\frac{\partial^{n+1} z}{\partial \varrho^2 \, \partial \theta^{n-1}}\right|$; et de proche en proche, en considérant toutes les équations déduites de l'équation (3) par $n-1$ différentiations, on obtiendra des limites supérieures des modules de toutes les dérivées de z d'ordre $n+1$ sur la circonférence C. La limite supérieure de $w_{k,l}$ en résultera, et, par conséquent, *on connaîtra finalement des limites supérieures des modules de toutes les dérivées de z d'ordre $n+1$ sur la circonférence C aussi bien qu'à son intérieur.*

§ 18.

Nous arrivons ainsi aux théorèmes:

Théorème A. *Etant donnée une équation du type elliptique*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0, \tag{3^{bis}}$$

où A, B, C sont des fonctions analytiques de x, y, p, q, le problème de Dirichlet pour cette équation est toujours possible).*

Théorème B. *Le problème de Dirichlet est possible pour l'équation*

$$Ar + 2Bs + Ct = \lambda D \qquad (AC - B^2 > 0) \tag{3'}$$

dans laquelle $0 < \lambda < \alpha_0$, avec certaines données sur un contour déterminé, si, en admettant l'existence de la solution, on peut limiter supérieurement son module, ainsi que ceux de ses dérivées premières, quel que soit le nombre λ compris entre 0 et α_0.

Le premier de ces théorèmes résulte de la remarque que la solution d'une équation du type elliptique de la forme

$$A_1 r + 2B_1 s + C_1 t = 0 \qquad (A_1 C_1 - B_1^2 > 0)$$

---

*) Dans cet énoncé comme dans les suivants je n'indique pas les restrictions plus ou moins grandes qu'on doit faire sur la nature des contours. Je remarquerai que, si on ne veut pas avancer au-delà de ce qu'on a demontré, il faut sousentendre que toutes les données sont analytiques.

n'a pas de maximum, et d'autre part que l'ensemble des points, où sa courbure est négative est partout dense, de sorte que les plans tangents, à la surface représentée par la solution rencontrent le bord de la surface au moins en trois points distincts ou confondus; l'inclinaison maxima c'est-à-dire la limite supérieure de $|p|$ et $|q|$ peut donc être indiquée a priori. On pourra donc, en vertu du résultat précédent limiter les modules de toutes les dérivées successives. Mais d'autre part l'équation (3^{bis}) peut être obtenue en faisant $\alpha = 1$ dans l'équation

$$[1 + \alpha(A-1)]r + 2\alpha Bs + [1 + \alpha(C-1)] = 0$$

qui pour $\alpha = 0$ se réduit à une équation de Laplace, et pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$ est toujours du type elliptique pourvu qu'on suppose (ce qu'on peut faire sans restreindre la généralité) que $A > 1$, $C > 1$.

Le second théorème est manifestement une conséquence du premier. Un grand nombre d'équations rentre dans le type 3^{bis}. Telles sont, en particulier, les équations auxquelles satisfont les fonctions qui rendent minima les intégrales doubles

$$\int\int f(p, q)\, dx\, dy.$$

Parmi celle-ci, il faut indiquer en première ligne l'équation des *surfaces minima*, qui a fait l'objet de plusieures mémorables travaux.

§ 19.

Comme application du second théorème, nous pouvons indiquer une nouvelle classe d'équations pour lesquelles le problème de Dirichlet est également toujours possible.

Théorème. *Si dans l'équation* (3'), D *est au plus du second degré par rapport à* p, q, *tandis que* $A - \frac{B^2}{C}$, $C - \frac{B^2}{A}$ *et* D_z' *ont une limite inférieure positive, le problème de Dirichlet est toujours possible.*

Pour le voir, il suffit d'indiquer a priori des limites supérieures de $|z|$, $|p|$, $|q|$. Dans ce but mettons notre équation sous la forme

$$\begin{aligned} Ar + 2Bs + Ct = \lambda[&D(x, y, 0, 0, 0) + zD_z(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) \\ &+ pD_p'(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) + qD_q'(x, y, \theta z, \theta p, \theta q)], \end{aligned}$$

avec $0 < \theta < 1$.

Nous voyons alors que, si $|z|$ atteint quelque part son maximum, auquel cas le premier membre est négatif ou nul et $p = q = 0$, on aura en ce point

$$D(x, y, 0, 0, 0) + zD_z'(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) \leqq 0.$$

Donc, le maximum de $|z|$ est inférieur à $\frac{M}{N} = n$ où M est le maximum du $|D|$ et N la limite inférieure de D_z'.

Il nous reste encore à établir des limites supérieures de $|p|$, $|q|$. Nous appliquerons de nouveau le procédé *des fonctions auxiliaires* en nous appuyant uniquement sur la croissance de D.

En effet, posons pour fixer les idées,

$$D = ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f,$$

a, b, c, d, e, f étant des fonctions données de x, y, z. Nous pouvons supposer que $z = 0$ sur la circonférence C. En faisant le changement de fonction

$$z = -n - \alpha + \alpha \log u$$

on trouvera l'équation suivante à laquelle satisfait u:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2d\frac{\partial u}{\partial y} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + f\frac{u}{\alpha} = Q.$$

Puisque les fonctions $A - \frac{B^2}{C}$, $C - \frac{B^2}{A}$ ont une limite inférieure positive, quels que soient p, q, il suffit d'introduire un facteur numérique convenable pour avoir $A - \frac{B^2}{C} > 1$, $C - \frac{B^2}{A} > 1$. D'autre part, il existera certainement un nombre M, tel que

$$|a| < M, \quad |b| < M, \quad |c| < M.$$

Cela étant, faisons $\alpha = \frac{1}{12M}$. Les termes du second degré en $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ de Q formeront dans ces conditions une forme quadratique *définie*. En effet, son discriminant est égal à

$$\delta = \frac{A_1C_1 - B_1^2}{u^2},$$

si on pose

$$A_1 = A + \alpha a, \quad B_1 = B + \alpha b, \quad C_1 = C + \alpha c.$$

Donc, en remarquant que

$$|A_1 - A| < \frac{1}{12}, \quad |B_1 - B| < \frac{1}{12}, \quad |C_1 - C| < \frac{1}{12},$$

on reconnaît facilement que

$$\frac{7}{5}(AC - B^2) > (A_1C_1 - B_1^2) > \frac{3}{5}(AC - B^2).$$

On voit ainsi que

$$-Q < |u|\left[\frac{A_1e^2 - 2B_1ed + C_1d^2}{A_1C_1 - B_1^2} + 12M|f|\right]$$
$$< 2|u|\left(\frac{A_1e^2 + C_1d^2}{A_1C_1 - B_1^2} + 6M|f|\right) < 4|u|(e^2 + d^2 + 3M|f|) < N,$$

où N est un nombre bien déterminé.

Comme au § 16, on tire de là une limite supérieure de $-\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ sur le contour, et de la même façon, par le changement de fonction

$$z = -n - \alpha + \alpha \log \frac{1}{1-u'},$$

on trouve une limite supérieure de $+\frac{\partial z}{\partial \varrho}$.

Pour avoir des limites supérieures des modules des dérivées premières à l'intérieur du cercle, le plus simple est de procéder de la façon suivante (quoiqu'on laisse ainsi de coté le cas exceptionnel où les coefficients des termes du second degré dépendent de x et y sans dépendre de z).

Considérons l'expression $p^2 + q^2 = w$. Supposons qu'elle atteint son maximum en un point M. On aura en ce point

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} = pr + qs = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} = ps + qt = 0,$$

$$Ar + 2Bs + Ct = D;$$

donc

$$r = \frac{Dq^2}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2}, \quad s = \frac{-Dpq}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2}, \quad t = \frac{Dp^2}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2}.$$

Formons ensuite l'expression K, qui doit être négative,

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2}\left(A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) &= (p^2+q^2)\frac{\partial D}{\partial z} + p\frac{\partial D}{\partial x} + q\frac{\partial D}{\partial y} \\ &+ A(r^2+s^2) + 2Bs(r+t) + C(s^2+t^2) \\ = (p^2+q^2)\left[\frac{D^2}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2} + \frac{\partial D}{\partial z}\right] &+ p\frac{\partial D}{\partial x} + q\frac{\partial D}{\partial y} \leqq 0. \end{aligned}$$

On voit bien que, pour des valeurs assez grandes de (p, q), K ne saurait être négatif, pourvu seulement que les termes du *second* degré en D et $\frac{\partial D}{\partial z}$ ne soient pas nuls en même temps tandis que ceux de $\frac{\partial D}{\partial x}$, $\frac{\partial D}{\partial y}$ ne sont pas nuls.

Comme exemple considérons le problème suivant:

Mener par un contour analytique donné une surface dont la courbure moyenne est en chaque point proportionnelle à la projection de la hauteur sur la normale.

L'équation des surfaces jouissant de la propriété indiquée a la forme

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = z(1+p^2+q^2).$$

Elle rentre bien dans le type qu'on vient d'étudier; le problème proposé admet donc toujours une solution.

§ 20.

Examinons maintenant le cas général de l'équation du type elliptique. *Ce cas ne se distingue du cas particulier* (3) *que nous avons etudié que par le fait qu'à la connaissance des limites supérieures des modules des dérivées premières il faut ajouter celle des dérivées secondes pour pouvoir limiter les modules de toutes les dérivées successives.*

En effet, soit M la limite supérieure des modules de z et de ses dérivées des deux premiers ordres. Si nous différentions l'équation (2) par rapport à x, nous obtenons l'équation

$$F_r' \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F_s' \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + F_t' \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + F_p' \frac{\partial p}{\partial x} + F_q' \frac{\partial p}{\partial y} + F_z' p + F_x' = 0,$$

qui considérée comme une équation à laquelle doit satisfaire la fonction p, a la forme

$$A \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = D,$$

où A, B, C, D sont des fonctions connues de x, y, z, p, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, q (quant à t, il s'exprime au moyen de ces quantités en vertu de l'équation (2) dans laquelle $F_t' \neq 0$). En différentiant encore une fois par rapport à x nous aurons

$$(36^{\text{bis}}) \quad A \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = a \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2b \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + c \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2d \frac{\partial r}{\partial x} + 2e \frac{\partial r}{\partial y} + f,$$

où A, B, C, a, b, c, d, e, f sont des fonctions analytiques connues de x, y, z, p, q, r, s.

L'équation (36^{bis}) peut être traitée de la même façon que l'équation (36): on trouvera sans peine une limite supérieure du maximum de l'expression

$$w = \frac{1}{\alpha^2} e^{2\frac{r+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{r+M}{\alpha}}} \left[A \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2B \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right],$$

où α est un nombre déterminé.

On trouvera de même une limite supérieure du maximum de l'expression

$$w_1 = \frac{1}{\alpha^2} e^{2\frac{t+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{t+M}{\alpha}}} \left[A \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + 2B \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right]$$

à l'intérieur du contour.

Pour avoir des limites supérieures des modules de toutes les dérivées troisièmes, il suffit maintenant de trouver des limites supérieures de w et w_1 sur le contour.

Dans ce but nous différentions l'équation (2) deux fois par rapport à θ. En posant $z_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$, nous avons alors

$$A' \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + 2B' \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + C' \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} = a' \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + 2b' \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right) + c' \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2 + 2d' \frac{\partial z_2}{\partial x} + 2e' \frac{\partial z_2}{\partial y} + f',$$

où $A', B', C', a', b', c', d', e', f'$ sont des fonctions connues *bornées* de x, y, z, p, q, r, s, t à l'intérieur de la couronne S comprise entre les circonférences C de rayon R et C' de rayon $R' = \frac{R}{2}$, et où $A'C' - B'^2 > 0$; on peut donc appliquer sans modifications le raisonnement du § 16.

Après avoir limité de cette façon les modules des dérivées troisièmes, on limite, de proche en proche, les modules des dérivées successives, comme au § 17, car, à partir de la troisième différentiation, les équations qui résultent de l'équation (2) ne se distinguent en rien de celles qui résultent de l'équation (3).

Ainsi se trouve démontrée l'exactitude du théorème suivant:

Théorème C. *Etant donnée une équation analytique du type elliptique*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha) = 0, \tag{3}$$

où $F_r' F_z' \leqq 0$, *le problème de Dirichlet avec des données determinées sur un contour déterminé sera possible pour toute valeur de* α *comprise entre* α_0 *et* α_1, *si on sait que le problème est possible pour* $\alpha = \alpha_0$ *et si, en admettant a priori l'existence de la solution, on peut limiter supérieurement a priori au moyen des données sur le contour les modules de* z *et de ses dérivées des deux premiers ordres.*

Pour ce qui concerne les applications de ce théorème je me bornerai à renvoyer à mon Ouvrage russe plusieurs fois cité, et aussi à un article qui paraîtra prochainement dans les „Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup." Je tiens plutôt à conserver à ce mémoire son caractère général et à le terminer par quelques remarques générales.

IV.

Conclusions générales.

§ 21.

L'analyse qui précède nous conduit à faire une distinction importante entre les solutions du problème de Dirichlet. On se rappelle que par la définition même de ce problème*), les solutions sont continues à l'intérieur

*) „Sur la généralisation du problème de Dirichlet", Math. Ann. 62, page 253.

du contour C ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres; ces dernières peuvent pourtant ne pas exister sur le contour lui-même, ou du moins ne pas être bornées sur le contour et dans son voisinage. Si ce cas se produit, nous dirons que la solution est *irrégulière sur le contour C;* au contraire, elle sera *régulière sur le contour* C dans le cas où ses dérivées des deux premiers ordres seront bornées sur le contour comme à son intérieur. Pour abréger, nous omettrons souvent, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, les mots „sur le contour C"; d'autre part, pour fixer les idées, nous supposerons dans la suite le *contour C circulaire et les données sur le contour analytiques.*

Il est clair que notre méthode n'est directement applicable que dans le cas où la solution cherchée est régulière.

Je remarquerai, en passant, que toutes les fois où cette méthode est applicable, on peut affirmer, d'après ce qui précède, que la solution qu'elle donne est analytique *sans faire appel à l'hypothèse de l'existence des dérivées troisièmes,* que j'ai été obligé d'admettre dans mon mémoire „Sur la nature analytique des solutions etc." Il y aurait intérêt à se débarrasser de cette restriction dans le cas général; on y parviendra, je pense, en perfectionnant encore en quelques points la méthode exposée. Quoi qu'il en soit, et même si des solutions non analytiques ayant des dérivées continues des deux premiers ordres (ce qui est peu probable) pouvaient exister pour certaines équations, nous les laisserons de côté dans ce qui va suivre.

Le point important à signaler est que, réciproquement, toutes les fois qu'*un problème particulier de Dirichlet admet une solution régulière, son existence peut être prouvée par notre méthode* qui donne en même temps un moyen pour la calculer.

D'une façon plus précise, je dis que, si l'équation

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0, \quad (F_r' F_z' \leqq 0,\ F_r' F_t' - (F_s')^2 > 0)$$

admet une solution régulière *du problème de Dirichlet avec des données particulières sur le contour, il est toujours possible d'introduire dans l'équation un paramètre α (d'une infinité de façons différentes), de telle sorte que, pour $\alpha = 0$, la possibilité du problème soit évidente, pour α inférieur ou égal à 1 on puisse indiquer des limites supérieures des modules des dérivées des deux premiers ordres, et que pour $\alpha = 1$, l'équation se réduise à l'équation donnée.*

§ 22.

Examinons d'abord les équations qui n'admettent que des solutions régulières, telles d'ailleurs que, du moment qu'elles existent, la limite supérieure des modules de leurs derivées des deux premiers ordres soit une fonction bornée de R et K, où R est le rayon du cercle C, $n!\,K^n$ étant la limite supérieure du module de la dérivée d'ordre n (pour toute valeur de n) de la fonction de l'arc à laquelle la solution se réduit sur le contour. Nous appellerons de telles équations *équations régulières.* Il est aisé de voir que *le problème de Dirichlet pour une équation régulière est toujours possible.*

En effet, en appliquant les principes exposés dans ce travail, on peut démontrer la généralisation suivante d'une proposition bien connue de de M. Schwarz: *Une solution du problème de Dirichlet régulière (sur la circonférence C de rayon R, où elle se réduit à une fonction analytique de l'arc) peut être prolongée analytiquement à l'extérieur de la circonférence, au moins jusqu'à une circonférence C_1 de rayon R_1, tel que l'inverse de la différence $R_1 - R$ soit une fonction bornée de R, K* (voir plus haut la signification de K) *et des limites supérieures des modules des dérivées des deux premiers ordres de la solution* (dans le cas des équations régulières ces dernières sont elles-mêmes, par définition, des fonctions bornées de R et K).

D'autre part, il résulte du lemme fondamental (§ 14) que, si une équation régulière admet une solution du problème de Dirichlet pour des données particulières sur la circonférence C, elle admettra également une solution, quelle que soit la fonction (analytique) donnée sur cette circonférence. Or, choisissant une circonférence σ de rayon δ suffisamment petit, on est certain qu'il existe au moins une fonction donnée sur ce contour, pour laquelle le problème de Dirichlet est possible. En vertu de la dernière remarque, le problème de Dirichlet sera possible, quelle que soit la fonction donnée sur cette circonférence. Mais, à cause de la proposition rappelée plus haut, en prenant la solution qui s'annule sur la circonférence σ on est certain qu'on pourra la prolonger au delà d'une circonférence σ_1 de rayon $\delta + \delta_1$. En raisonnant de la même manière sur la circonférence σ_1, on verra que le problème de Dirichlet est toujours possible sur cette circonférence, et ensuite sur la circonférence σ_2 de rayon $\delta + \delta_1 + \delta_2$. On arrivera ainsi de proche en proche à démontrer la possibilité du problème sur un cercle quelconque de rayon fini, car la différence des rayons de deux cercles consécutifs ne tend jamais vers zéro.

Il y a lieu de remarquer que si on ne fait pas d'hypothèse spéciale sur la nature de la régularité des solutions, s'il existe une équation dont toutes les solutions sont régulières sans que leur régularité puisse être mise en evidence par une fonction bornée des éléments indiqués plus haut, le problème de Dirichlet pour une telle équation (pseudorégulière) ne sera pas toujours possible.

En d'autres termes, *si le problème de Dirichlet pour une certaine équation est toujours possible, et que sa solution soit toujours régulière, on peut affirmer que l'équation est régulière (suivant la définition donnée). Toutes ces équations peuvent donc être découvertes par notre méthode.* Il faut ajouter pourtant qu'il n'est nullement évident a priori qu'il n'existe pas d'équations pour lesquelles le problème est également *toujours* possible, mais qui admettent quelquefois des solutions *irrégulières*; il est probable qu'il n'y en a pas, mais je n'en possède de démonstration rigoureuse que dans le cas de l'équation (1).

Quoi qu'il en soit, étant donnée une équation déterminée du type elliptique, nous sommes en état, d'après ce qui précède, de reconnaître, si elle admet *toujours* une solution régulière, ou non, c'est-à-dire de reconnaître, si elle est *régulière* ou non. Il est naturel de lui donner dans le second cas le nom *d'équation irrégulière.*

Nous avons rencontré dans ce travail plusieurs types d'équations régulières; par exemple, l'équation des surfaces minima et l'équation

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=z(1+p^2+q^2);$$

il est facile de vérifier que l'équation

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=p^2+q^2,$$

quoique ne remplissant pas toutes les conditions du théorème du § 19 est aussi régulière. Par contre, et je tiens à souligner ce fait que j'ai laissé dans l'ombre dans la première partie de ce travail (Math. Ann. 62, page 264), dans le cas où la dérivée du second membre $D_z'=0$, on n'a pas toujours une équation régulière.*) Ainsi, par exemple, l'équation

$$r+t=(x^2+y^2-2)(p^2+q^2)-4$$

est *pseudorégulière.* Pour cette équation le problème de Dirichlet n'est pas toujours possible; mais, lorsqu'il est possible, sa solution est nécessairement régulière. On se rend compte facilement que le problème à l'intérieur d'un cercle ayant le centre à l'origine *est possible, si le rayon du cercle est inférieur à* 1; *impossible, si le rayon est supérieur ou égal à* 1. L'exemple d'une équation *irregulière* nous sera fourni par l'équation des surfaces à courbure moyenne constante

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En effet, on vérifie facilement que

$$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$$

*) Voir les pages 90 et 127 du présent travail. La classe des équations régulières de la forme (3) est d'ailleurs à très peu près épuisée par le théorème de la page 127.

est la solution de cette équation qui s'annule sur la circonférence C de rayon 2; la dérivée normale sur le contour étant infinie, on voit que la solution considérée est *irrégulière.* On vérifie sans peine, sur cet exemple, et c'est là un fait général, que la solution irrégulière est un cas *limite* qui partage les cas où le problème est *régulièrement possible* (solution s'annulant sur un cercle de rayon inférieur à 2) de ceux où le problème est *impossible* (si le rayon du cercle est supérieur à 2).

Il nous reste à montrer encore que même pour une équation irrégulière notre méthode, convenablement appliquée, permet dans chaque cas particulier de reconnaître, si le problème de Dirichlet avec des données déterminées admet ou non une solution régulière.

En effet, si le problème de Dirichlet admet une solution régulière déterminée, ses dérivées des deux premiers ordres sont bornées, par définition; il doit donc être possible d'en indiquer des limites supérieures; si on pouvait affirmer que de telles limites ne peuvent pas être trouvées, cela prouverait que le problème est impossible. Mais, même quand ces limites supérieures sont trouvées, et quoique ce soit le plus souvent la seule condition essentielle, l'existence de la solution n'est pas encore assurée. S'il n'est pas possible d'introduire le paramètre α comme l'exige notre théorème C (§ 20), la solution n'existe pas; car, si elle existait, il serait manifestement possible d'y arriver, en partant d'une solution régulière quelconque dans le voisinage de l'origine et en passant par des solutions uniformément régulières, au moyen de la variation continue*) d'un paramètre α.

En résumé, en se bornant aux solutions *régulières* ou peut compléter le théorème du § 20 et lui donner la forme suivante.

Théorème. *Etant donnée l'équation analytique*

$$(2)\qquad F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \qquad (F_r' F_t' \leq 0,\ \ 4F_r' F_t' - (F_s')^2 > 0$$

du type elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution regulière d'un problème particulier de Dirichlet, est qu'il soit possible d'introduire dans l'équation (ou dans les données sur le contour) *un paramètre α de telle sorte: que, pour $\alpha = 0$, on ait une solution évidente; pour α inférieur ou égal à 1 on puisse indiquer a priori des limites supérieures des modules des dérivées des deux premiers ordres de la solution, et que pour $\alpha = 1$, l'équation se réduise à l'équation donnée.***)

---

*) Je n'ai pas à insister sur la transformation évidente par laquelle on peut faire passer le paramètre dans l'équation.

**) Il est inutile de rappeler comment doit être simplifié l'enoncé si l'équation (2) se réduit à la forme (3).

On pourrait donner une proposition analogue relative aux solutions *irrégulières*. Il suffirait de remarquer que ces solutions peuvent toujours être considérées commes des *limites de solutions régulières*.

J'ajouterai que le cas général où l'on n'a pas nécessairement $F_r' F_z' \leqq 0$, peut être traité par la même méthode; quoique les résultats deviennent un peu moins simples.

On voit que l'application des principes exposés dans ce travail ouvre un large champ de recherches: parmi elles, et en première ligne, je dois signaler l'étude des problèmes avec des données sur le contour autres que celles de Dirichlet.