Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Die von Herrn Nielsen im vorstehenden Aufsatz für die topologischen Transformationen der Ringflächen erzielten Resultate werden im folgenden auf die eindeutigen stetigen Transformationen ausgedehnt. Dabei werden zwei derartige Transformationen zur selben *Klasse* gerechnet, wenn sie sich (unter Erhaltung der Eindeutigkeit und der Stetigkeit) stetig ineinander überführen lassen [1].

§ 1.

Die zweiseitige Ringfläche.

Sei (A, B) eine Basis der Fundamentalgruppe des Torus, so gehört zu jeder eindeutigen stetigen Transformation dieser Fläche in sich ein Formelsystem

$$A' = A^m B^n$$
$$B' = A^p B^q,$$

wo m, n, p, q keinerlei Beschränkung unterliegende ganze Zahlen bezeichnen. Die Menge der Transformationsklassen des Torus und die Menge der Zahlengruppen (m, n, p, q) entsprechen sich eineindeutig. Durch Anwendung der Nielsenschen Methode findet man mühelos, daß *jede Trans-*

[1]) Vgl. Proc. V. Int. Congr. of Math. (Cambridge 1912) 2, S. 9; Amsterd. Ber., holl. Ausgabe, 21, S. 300, engl. Ausgabe 15, S. 352 (1912). Im Anschluß an das Resultat dieser Arbeiten ersieht man mittels Betrachtung der Transformation der Cartesischen Ebene

$$\operatorname{arc\,cot} x' = n \operatorname{arc\,cot} x \qquad y' = y + 1$$

im Zusammenhang mit dem in Math. Ann. 71, S. 114 formulierten Satz 3, daß *im Falle der Kugel* die Fixpunktminimalzahl bei der Klasse der Transformationen vom Grade -1 gleich 0, bei jeder anderen Klasse gleich 1 ist.

formation der Klasse (m, n, p, q) *mindestens* $|mq - np - m - q + 1|$ *Fixpunkte aufweist,* und durch Betrachtung passender linearer Transformationen ersieht man sofort, daß diese Minimalzahl bei jeder Klasse auch wirklich vorkommt.

§ 2.

Die einseitige Ringfläche.

Sei (A, C) die von Nielsen benutzte Basis der Fundamentalgruppe der einseitigen Ringfläche E, so gehört zu einer eindeutigen stetigen Transformation t von E in sich ein Formelsystem

$$A = A^m C^n$$

$$C' = A^p C^q.$$

Hierin ist, weil das Bild der amphidromen Flächenkurve A wieder amphidrom sein muß, $n = 0$; weiter folgt aus der Relation $A'C'A'C'^{-1} = 1$, daß q ungerade ist. Wir erhalten also das zur Transformation t gehörige Formelsystem in der Gestalt

$$A' = A^m$$

$$C' = A^p C^{2r+1}.$$

Je nachdem p gerade oder ungerade ist, werden wir die Transformation t sowie ihre Klasse *gerade* oder *ungerade* nennen. Alsdann enthält jede gerade bzw. ungerade Klasse eine Transformation mit dem Formelsystem

$$(1) \qquad \begin{matrix} A' = A^m \\ C' = C^{2r+1} \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} A' = A^m \\ C' = AC^{2r+1} \end{matrix},$$

wo m nicht-negativ ist. Die Menge der Zahlengruppen (m, r) (m eine nicht-negative, r eine beliebige ganze Zahl) entspricht sowohl der Menge der geraden wie der Menge der ungeraden Transformationsklassen von E eineindeutig.

Wenn man in der von Nielsen angegebenen Weise aus (A, C) eine Basis (A, B) der Fundamentalgruppe des E doppelt überdeckenden Torus R herleitet, so entsprechen einer Transformation t von E, welche einer der beiden Klassen (m, r) angehört, zwei der Reihe nach den Klassen $(m, 0, 0, 2r + 1)$ und $(-m, 0, 0, 2r + 1)$ angehörende Transformationen t_1 und t_2 von R; wenn f, f_1, f_2 der Reihe nach die Anzahlen der Fixpunkte von t, t_1, t_2 bezeichnen, so ist $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$.

Nun haben wir aber nach § 1:

$$f_1 \geqq |2r(m-1)|$$

$$f_2 \geqq |2r(m+1)|,$$

mithin für $m \neq 0$:

$$f \geqq |2mr|$$

und für $m = 0$:

$$f \geqq |2r|,$$

während man wieder innerhalb jeder Klasse (m, r) leicht eine lineare Transformation bestimmt, welche *nicht mehr* als diese Minimalzahl von Fixpunkten aufweist.

(Eingegangen am 20. Januar 1920.)