Über den „Anormalen Fall" beim Lagrangeschen und Mayerschen Problem mit gemischten Bedingungen und variablen Endpunkten.

Von

Oskar Bolza in Freiburg i. Br.

In einer in Band 64 der Mathematischen Annalen erschienenen Arbeit*) habe ich die Lagrangesche Multiplikatorenregel und die Grenzgleichungen für das Lagrangesche Problem in folgender allgemeiner Formulierung abgeleitet:

Das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\, dt$$

zu einem Extremum zu machen mit der Nebenbedingung, daß die in Parameterdarstellung vorausgesetzten zulässigen Kurvenbogen

$$y_i = y_i(t), \quad t_0 \gtreqless t \gtreqless t_1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

p Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \varphi_\alpha(y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, p$$

und q endlichen Gleichungen

$$(2) \qquad \psi_\beta(y_1, \cdots, y_n) = 0, \qquad \beta = 1, 2, \cdots, q$$

genügen sollen, während die Koordinaten $(y_{10}, \cdots, y_{n0})$, $(y_{11}, \cdots, y_{n1})$ der beiden Endpunkte der zulässigen Kurvenbogen r Bedingungsgleichungen

$$(3) \qquad \chi_\gamma(y_{10}, \cdots, y_{n0}; y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0, \qquad \gamma = 1, 2, \cdots, r$$

genügen.

Ich habe dabei eine von Herrn Hilbert**) für den einfachsten Fall

*) *Die Lagrangesche Multiplikatorenregel in der Variationsrechnung für den Fall von gemischten Bedingungen und die zugehörigen Grenzgleichungen bei variabeln Endpunkten,* Math Ann. 64 (1907), S. 370—387.

**) Hilbert, *Zur Variationsrechnung,* Göttinger Nachr. 1905, S. 159 und Math. Ann. 62 (1906), S. 351.

des Mayerschen Problems entwickelte Methode benutzt, bei welcher die Aufgabe auf ein gewöhnliches Extremum mit Nebenbedingungen zurückgeführt wird. Die Methode hat den Vorzug, daß es dabei nicht nötig ist, zwischen dem sogenannten „normalen" und dem „anormalen" Fall zu unterscheiden.

Nachdem jedoch Herr Hadamard in dem interessanten Kapitel über das Mayersche Problem in seinen „*Leçons sur le calcul des variations*" (Paris 1910) den Gegensatz zwischen diesen beiden Fällen so scharf betont hat, scheint es mir wünschenswert, als Ergänzung zu meiner früheren Arbeit *den anormalen Fall* bei der dort zugrunde gelegten allgemeinsten Formulierung des Lagrangeschen Problems genauer zu diskutieren, wobei sich zugleich Gelegenheit bieten wird, meinen früheren Beweis in wesentlichen Punkten zu vereinfachen.

Um dabei einen hinreichend allgemeinen Standpunkt für die Vergleichung der Probleme von Lagrange und Mayer zu gewinnen, will ich gleichzeitig die Aufgabe so verallgemeinern, daß sie die beiden eben genannten Probleme als Spezialfälle unter sich enthält, indem ich die Aufgabe dahin formuliere, den Ausdruck

$$U = \int_{t_0}^{t_1} f(y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\,dt + G(y_{10}, \cdots, y_{n0}; y_{11}, \cdots, y_{n1})$$

in Beziehung auf die eben definierte Gesamtheit von zulässigen Kurven zu einem Extremum zu machen.

Abgesehen von dieser Verallgemeinerung sollen die Voraussetzungen*) und Bezeichnungen**) genau dieselben sein, wie in der früheren Arbeit, auf die ich mit (I) verweisen werde. Ausdrücklich wiederhole ich noch die Voraussetzung daß die Determinante

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1'}, & \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2'}, & \cdots, & \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_m'} \\ \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ entlang } \mathfrak{E}_0.$$

$$\alpha = 1, 2, \cdots, p;\ \beta = 1, 2, \cdots, q;\ m = p + q.$$

*) Den dort gemachten Stetigkeitsvoraussetzungen fügen wir noch die weitere hinzu, daß die Funktion G als Funktion ihrer $2n$ Argumente stetig differentiierbar sein soll in einer gewissen Umgebung der Stelle $(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0}, \overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1})$.

**) Insbesondere soll die Verabredung über den Gebrauch der Indices von S. 372 festgehalten werden, wonach stets: $i = 1, 2, \cdots, n$; $k = 1, 2, \cdots, m$; $\alpha = 1, 2, \cdots, p$; $\beta = 1, 2, \cdots, q$; $\gamma = 1, 2, \cdots, r$; $\varrho = 1, 2, \cdots, n - m$.

§ 1.

Reduktion der Anfangsbedingungen.*)

Um zu einer richtigen Definition des nach der Terminologie von Herrn Hahn**) als *„anormal“* zu bezeichnenden Falles zu gelangen, ist es vor allem nötig, die Anfangsbedingungen durch Ausscheiden überzähliger Bedingungen in geeigneter Weise auf ein System von unabhängigen Bedingungen zu reduzieren.

Die Koordinaten der beiden Endpunkte der zulässigen Kurvenbogen genügen außer den explizite gegebenen Gleichungen (3) stets noch den aus den endlichen Gleichungen (2) folgenden $2q$ Gleichungen

$$\overset{0}{\psi}_\beta \equiv \psi_\beta(y_{10}, \cdots, y_{n0}) = 0, \quad \overset{1}{\psi}_\beta \equiv \psi_\beta(y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0, \quad \beta = 1, 2, \cdots, q, \tag{5}$$

und es wird vorausgesetzt, daß die Koordinaten $(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0})$, $(\overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1})$ der Endpunkte der Kurve

$$\mathfrak{C}_0\colon \quad y_i = \overset{0}{y}_i(t), \quad t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

von welcher angenommen wird, daß sie ein Extremum für den Ausdruck U liefert, diesen Bedingungen genügt, sodaß also

$$\begin{gathered} \psi_\beta(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0}) = 0, \quad \psi_\beta(\overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1}) = 0, \\ \chi_\gamma(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0}; \overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1}) = 0, \\ \beta = 1, 2, \cdots, q; \ \gamma = 1, 2, \cdots, r. \end{gathered} \tag{6}$$

Wir bezeichnen jetzt die linken Seiten der Gleichungen (3), (5) in irgend welcher Reihenfolge mit

$$\omega_g(y_{10}, \cdots, y_{n0}; y_{11}, \cdots, y_{n1}), \qquad g = 1, 2, \cdots, 2q + r,$$

und es sei R der Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial \omega_g}{\partial y_{10}}, \cdots, \frac{\partial \omega_g}{\partial y_{n0}}; \ \frac{\partial \omega_g}{\partial y_{11}}, \cdots, \frac{\partial \omega_g}{\partial y_{n1}} \right\|, \quad g = 1, 2, \cdots, 2q + r \tag{7}$$

in dem Sinn, daß alle Determinanten $(R+1)^{\text{ten}}$ Grades derselben in einer gewissen Umgebung der Stelle

$$A_0(\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0}; \overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1})$$

identisch verschwinden, während mindestens eine Determinante R^{ten} Grades in derselben Umgebung nicht identisch verschwindet; es ist dann jedenfalls

$$R \lesseqgtr 2q + r, \quad R \lesseqgtr 2n.$$

*) Bei der Abfassung dieses Paragraphen sind mir Unterhaltungen mit Herrn Professor Alfred Loewy von wesentlichem Nutzen gewesen.

**) Math. Ann. 58 (1904), S. 152.

Es könnte nun vorkommen, daß trotzdem gerade an der Stelle A_0 auch noch alle Determinanten R^{ten} Grades verschwinden. Das würde bedeuten, daß die Stelle A_0 für das durch die Gleichungen (3) und (5) definierte Gebilde im Gebiet der Variabeln $y_{10}, \cdots, y_{n0}; y_{11}, \cdots, y_{n1}$ eine singuläre Stelle wäre.

Diesen Fall singulärer Endpunkte schließen wir aus, nehmen also an, daß mindestens eine Determinante R^{ten} Grades gerade an der Stelle A_0 von Null verschieden ist. Es sei dies bei passender Wahl der Reihenfolge der Funktionen ω_g eine aus den R ersten Reihen der Matrix (7) gebildete Determinante.

Sollte $R = 2q + r$ sein, so sagen wir, die Anfangsbedingungen in der Form, in welcher sie gegeben sind, seien *„reduziert"*.

Wenn dagegen $R < 2q + r$, so folgt nach bekannten Sätzen über Funktionaldeterminanten, daß die Funktionen $\omega_{R+1}, \cdots, \omega_{2q+r}$ sich durch die Funktionen $\omega_1, \cdots, \omega_R$ ausdrücken lassen:

$$\omega_{R+1} = \mathfrak{F}_{R+1}(\omega_1, \cdots, \omega_R), \cdots, \omega_{2q+r} = \mathfrak{F}_{2q+r}(\omega_1, \cdots, \omega_R) \tag{8}$$

identisch in

$$y_{10}, \cdots, y_{n0}; y_{11}, \cdots, y_{n1}.$$

Indem wir hierin das spezielle Wertsystem A_0 einsetzen, folgt wegen der Voraussetzung (6), daß

$$\mathfrak{F}_{R+1}(0, \cdots, 0) = 0, \cdots, \mathfrak{F}_{2q+r}(0, \cdots, 0) = 0,$$

und hieraus ergibt sich, daß jedes Wertsystem $y_{10}, \cdots, y_{n0}; y_{11}, \cdots, y_{n1}$ in einer gewissen Umgebung von A_0, welches den R Gleichungen

$$\omega_1 = 0, \cdots, \omega_R = 0 \tag{9}$$

genügt, stets auch den übrigen Gleichungen

$$\omega_{R+1} = 0, \cdots, \omega_{2q+r} = 0$$

genügt. Man kann also die letzteren Gleichungen aus dem System der Anfangsbedingungen einfach weglassen.

Für unsere Zwecke ist es nun wichtig, daß man es stets so einrichten kann, daß unter den übrig bleibenden Gleichungen (9) gerade die $2q$ Gleichungen (5) vorkommen. Denn nach Voraussetzung (4) ist an jeder Stelle des Intervalls $[t_0 t_1]$ mindestens eine Determinante q^{ten} Grades der Matrix

$$\left\| \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_1}, \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_{p+q}} \right\|, \qquad \beta = 1, 2, \cdots, q$$

von Null verschieden, und daher ist mindestens eine Determinante $2q^{\text{ten}}$ Grades der Matrix

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial \overset{0}{\psi}_\beta}{\partial y_{10}}, \cdots, \dfrac{\partial \overset{0}{\psi}_\beta}{\partial y_{n0}}, & 0\;, \cdots, \;0 \\ 0\;, \cdots, \;0\;, & \dfrac{\partial \overset{1}{\psi}}{\partial y_{11}}, \cdots, \dfrac{\partial \overset{1}{\psi}}{\partial y_{n1}} \end{matrix}\right\|, \qquad \beta = 1, 2, \cdots, q$$

an der Stelle A_0 von Null verschieden, woraus zunächst folgt, daß $R \geqq 2q$

Ferner folgt: Wenn wir nach (8) die $2q$ Funktionen $\overset{0}{\psi}_\beta$, $\overset{1}{\psi}_\beta$ durch die unabhängigen Funktionen $\omega_1, \cdots, \omega_R$ ausdrücken, so ist mindestens eine Determinante $2q^{\text{ten}}$ Grades der Matrix

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial \omega_1}, \cdots, \dfrac{\partial \overset{0}{\psi}_\beta}{\partial \omega_R} \\ \dfrac{\partial \overset{1}{\psi}_\beta}{\partial \omega_1}, \cdots, \dfrac{\partial \overset{1}{\psi}_\beta}{\partial \omega_R} \end{matrix}\right\|, \qquad \beta = 1, 2, \cdots, q$$

an der Stelle: $\omega_1 = 0, \cdots, \omega_R = 0$ von Null verschieden, und daraus folgt, daß wir $2q$ der Größen $\omega_1, \cdots, \omega_R$, etwa $\omega_1, \cdots, \omega_{2q}$ durch die $2q$ Größen $\overset{0}{\psi}_\beta$, $\overset{1}{\psi}_\beta$ und die übrigen Größen $\omega_{2q+1}, \cdots, \omega_R$ ausdrücken können. Wir können also die Funktionen

$$\overset{0}{\psi}_1, \cdots, \overset{0}{\psi}_q; \;\; \overset{1}{\psi}_1, \cdots, \overset{1}{\psi}_q; \;\; \omega_{2q+1}, \cdots, \omega_R$$

für die unabhängigen unter den Funktionen ω_g wählen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Das so erhaltene System von R *unabhängigen* Anfangsbedingungen, *unter welchen die* $2q$ *Gleichungen* (5) *enthalten sind*, nennen wir dann wieder „*reduziert*“.

Indem wir uns diese Reduktion bereits im voraus ausgeführt denken, können wir sagen:

Satz I. *Wenn wir den Fall singulärer Endpunkte ausschließen, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das System* (3), (5) *der Anfangsbedingungen reduziert ist, d. h. daß* $2q + r \leqq 2n$, *und daß mindestens eine Determinante* $(2q+r)^{\text{ten}}$ *Grades der Matrix*

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial \overset{0}{\psi}_\beta}{\partial y_{10}}, \cdots, \dfrac{\partial \overset{0}{\psi}_\beta}{\partial y_{n0}}, & 0\;, \cdots, \;0 \\ 0\;, \cdots, \;0\;, & \dfrac{\partial \overset{1}{\psi}_\beta}{\partial y_{11}}, \cdots, \dfrac{\partial \overset{1}{\psi}_\beta}{\partial y_{n1}} \\ \dfrac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{10}}, \cdots, \dfrac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{n1}}, & \dfrac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{11}}, \cdots, \dfrac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{n1}} \end{matrix}\right\|,$$

$$\beta = 1, 2, \cdots, q; \quad \gamma = 1, 2, \cdots, r$$

an der Stelle

$$A_0 (\overset{0}{y}_{10}, \cdots, \overset{0}{y}_{n0}; \overset{0}{y}_{11}, \cdots, \overset{0}{y}_{n1})$$

von Null verschieden ist.

Alsdann gibt es kein System von $2q + r$ *Multiplikatoren*

$$c_1, c_2, \cdots, c_{2q+r},$$

welche nicht alle gleich Null sind, und für welche an der Stelle A_0

$$(10)\qquad \begin{gathered} \sum_\beta c_\beta \frac{\partial \overset{0}{\psi}_\beta}{\partial y_{i0}} + \sum_\gamma c_{2q+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}} = 0, \\ \sum_\beta c_{q+\beta} \frac{\partial \overset{1}{\psi}_\beta}{\partial y_{i1}} + \sum_\gamma c_{2q+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}} = 0, \\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{gathered}$$

In der ganzen weiteren Entwicklung wird der Fall singulärer Endpunkte ausgeschlossen und vorausgesetzt, daß die Anfangsbedingungen in dem angegebenen Sinn reduziert sind.

§ 2.

Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen und die Grenzgleichungen.

Ich will nun nochmals kurz auf die Ableitung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen und der Grenzgleichungen eingehen, dabei jedoch einige nicht unwesentliche Vereinfachungen meines früheren Beweises andeuten.

Man beweist zunächst den

Hilfssatz. Sind $q + r + 1$ Systeme von Funktionen

$$\overset{\sigma}{\eta}_1(t), \overset{\sigma}{\eta}_2(t), \cdots, \overset{\sigma}{\eta}_n(t), \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, q + r + 1$$

gegeben, welche im Intervall $[t_0 t_1]$ zweimal stetig differentiierbar sind und den $m = p + q$ Differentialgleichungen

$$(11)\qquad \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \overset{\sigma}{\eta}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \overset{\sigma}{\eta}_i' \right) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

genügen, wobei, wie in (I)

$$(12)\qquad \varphi_{p+\beta} = \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} y_i'$$

gesetzt ist, so kann man stets eine $(q + r + 1)$-parametrige Schar von Kurven

$$(13)\qquad y_i = \mathfrak{Y}_i(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{q+r+1})$$

konstruieren, welche die erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzt, den m Differentialgleichungen

$$\varphi_k(\mathfrak{Y}_1, \cdots, \mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Y}_1', \cdots, \mathfrak{Y}_n') = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

und den Gleichungen

$$\mathfrak{Y}_i(t, 0, 0, \cdots, 0) = \overset{0}{y}_i(t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

genügt, und für welche

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial \varepsilon_\sigma}\right)_0 = \overset{\sigma}{\eta}_i(t),$$

wobei der Index 0 die Substitution: $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \cdots, \varepsilon_{q+r+1} = 0$ andeutet.

Zum Beweise setze man

$$\mathfrak{Y}_{m+\varrho}(t, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+r+1}) = \overset{0}{y}_{m+\varrho}(t) + \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \overset{\sigma}{\eta}_{m+\varrho}(t), \quad \varrho = 1, 2, \cdots, n-m,$$

und löse dann die m Differentialgleichungen

$$\varphi_k(y_1, \cdots, y_m, \mathfrak{Y}_{m+1}, \cdots, \mathfrak{Y}_n, y_1', \cdots, y_m', \mathfrak{Y}_{m+1}', \cdots, \mathfrak{Y}_n') = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

nach $y_1, \cdots, y_m$ auf mit den Anfangsbedingungen

$$y_k/^{t_0} = \overset{0}{y}_{k0} + \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \overset{\sigma}{\eta}_k(t_0).$$

Unterwirft man nun die $q + r + 1$ Größen ε_σ den $q + r$ Bedingungen

$$(14) \qquad \begin{cases} \psi_\beta(\mathfrak{Y}_1(t_0), \cdots, \mathfrak{Y}_n(t_0)) = 0, \\ \chi_\gamma(\mathfrak{Y}_1(t_0), \cdots, \mathfrak{Y}_n(t_0); \ \mathfrak{Y}_1(t_1), \cdots, \mathfrak{Y}_n(t_1)) = 0, \end{cases}$$

so stellen die Gleichungen (13) eine zulässige Variation der Kurve $\mathfrak{E}_0$ dar.

Bezeichnet man daher

$$U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{q+r+1}) = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathfrak{Y}_1, \cdots, \mathfrak{Y}_n, \mathfrak{Y}_1', \cdots, \mathfrak{Y}_n')\, dt$$
$$+ G(\mathfrak{Y}_1(t_0), \cdots, \mathfrak{Y}_n(t_0); \ \mathfrak{Y}_1(t_1), \cdots, \mathfrak{Y}_n(t_1)),$$

so muß die Funktion $U(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+r+1})$ an der Stelle $\varepsilon_1 = 0, \cdots, \varepsilon_{q+r+1} = 0$ ein Extremum mit den Nebenbedingungen (14) besitzen. Daraus folgt aber nach der Theorie der gewöhnlichen Extrema mit Nebenbedingungen: Bezeichnet man allgemein für ein beliebiges Funktionensystem $\eta_1, \cdots, \eta_n$

$$(15) \begin{cases} V(\eta) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \eta_i' \right\} dt + \sum_i \left\{ \frac{\partial G}{\partial y_{i0}} \eta_i(t_0) + \frac{\partial G}{\partial y_{i1}} \eta_i(t_1) \right\}, \\ \overset{0}{\Psi}_\beta(\eta) = \displaystyle\sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} \Big/^{t_0} \eta_i(t_0), \\ \mathrm{X}_\gamma(\eta) = \displaystyle\sum_i \left\{ \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}} \eta_i(t_0) + \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}} \eta_i(t_1) \right\}, \end{cases}$$

wobei sich die Argumente der Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}, \frac{\partial f}{\partial y_i'}; \quad \frac{\partial G}{\partial y_{i0}}, \frac{\partial G}{\partial y_{i1}}; \quad \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}, \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}$$

auf die Kurve $\mathfrak{E}_0$ beziehen, so muß es konstante Multiplikatoren

$$l_0, l_1, \cdots, l_{q+r},$$

die nicht alle Null sind, geben, derart daß die $q+r+1$ Gleichungen bestehen

$$l_0 V(\overset{\sigma}{\eta}) + \sum_\beta l_\beta \overset{0}{\Psi}_\beta(\overset{\sigma}{\eta}) + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \mathrm{X}_\gamma(\overset{\sigma}{\eta}) = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots q+r+1.$$

Man zeigt dann weiter wie in § 4 von (I), daß die Multiplikatoren l von der Wahl mindestens eines der $q+r+1$ Funktionensysteme $\overset{\sigma}{\eta}_1, \cdots, \overset{\sigma}{\eta}_n$ unabhängig sind, sodaß also wegen der noch vorhandenen Willkürlichkeit der Funktionen $\overset{\sigma}{\eta}_i$ die Gleichung

(16) $$l_0 V(\eta) + \sum_\beta l_\beta \overset{0}{\Psi}_\beta(\eta) + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \mathrm{X}_\gamma(\eta) = 0$$

mit denselben Multiplikatoren l für alle in $[t_0 t_1]$ zweimal stetig differentiierbaren Funktionensysteme $\eta_1, \cdots, \eta_n$, welche den m Differentialgleichungen

(17) $$\Phi_k(\eta) \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \eta_i'\right) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

genügen, bestehen muß.

Der kürzeren Ausdrucksweise halber werden wir in der Folge die Gesamtheit aller Funktionensysteme $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, welche in $[t_0 t_1]$ zweimal stetig differentiierbar sind und den n Differentialgleichungen (17) genügen, mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen und dann sagen: Eine Gleichung wie (16) *gilt in* $\mathfrak{H}$, (was wir nach dem Vorgang von E. H. Moore durch Hinzufügung der Klammer ($\mathfrak{H}$) andeuten), wenn sie für alle Elemente von $\mathfrak{H}$ gilt.

Nunmehr multipliziere man die p ersten der Gleichungen (17),

(18) $$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i'} \eta_i'\right) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, p$$

mit unbestimmten Multiplikatoren $\lambda_\alpha(t)$ und integriere von t_0 bis t_1; ebenso multipliziere man die nach (12) für $k = p + \beta$ durch Integration aus (17) folgenden q Gleichungen

(19) $$\sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} \eta_i - \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} \Big/^{t_0} \eta_i(t_0) = 0, \qquad \beta = 1, 2, \cdots, q$$

mit unbestimmten Multiplikatoren $\mu_\beta(t)$ und integriere von t_0 bis t_1; ferner multipliziere man die aus (19) für $t = t_1$ folgenden Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big/^{t_1} \eta_i(t_1) - \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big/^{t_0} \eta_i(t_0) = 0 \tag{20}$$

mit willkürlichen konstanten Multiplikatoren l_β^1, summiere in allen Fällen nach α und β und addiere die erhaltenen Resultate zu (16).

Schließlich wende man noch die Lagrangesche partielle Integration an; so erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right) dt + \sum_i H_i^0 \eta_i(t_0) + \sum_i H_i^1 \eta_i(t_1) = 0, \quad (\mathfrak{H}) \tag{21}$$

worin

$$\left\{\begin{aligned} \Omega &= \quad l_0 f + \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \psi_\beta, \\ H_i^0 &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big/^{t_0} + l_0 \frac{\partial G}{\partial y_{i0}} + \sum_\beta l_\beta^0 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big/^{t_0} + \sum_\gamma l_{\varrho+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}, \\ H_i^1 &= \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big/^{t_1} + l_0 \frac{\partial G}{\partial y_{i1}} + \sum_\beta l_\beta^1 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big/^{t_1} + \sum_\gamma l_{\varrho+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}, \\ l_\beta^0 &= \quad l_\beta - l_\beta^1 - \int_{t_0}^{t_1} \mu_\beta(t)\, dt. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Nunmehr bestimme man die Funktionen $\lambda_\alpha(t)$, $\mu_\beta(t)$ und die Konstanten l_β^1 so, daß gleichzeitig die Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial y_k'} = 0, \quad H_k^1 = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, m$$

bestehen, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_\varrho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_{m+\varrho}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial y_{m+\varrho}'}\right) \eta_{m+\varrho}\, dt + \sum_i H_i^0 \eta_i(t_0) \\ + \sum_\varrho H_{m+\varrho}^1 \eta_{m+\varrho}(t_1) = 0, \quad (\mathfrak{H}). \end{aligned} \tag{23}$$

Nun kann man alle Funktionensysteme η_i von $\mathfrak{H}$ erhalten, indem man die Funktionen $\eta_{m+1}, \cdots, \eta_n$ willkürlich wählt und dann noch die Werte von $\eta_1, \cdots, \eta_m$ für $t = t_0$ willkürlich vorschreibt; hierdurch und durch die Differentialgleichungen (17) sind dann die Funktionen $\eta_1, \cdots, \eta_m$ eindeutig bestimmt. Indem man hiervon in passender Weise Gebrauch macht, erhält man aus (23) den in (I) auf etwas umständlichere Weise bewiesenen

Satz II. *Wenn die Kurve $\mathfrak{C}_0$ ein Extremum für den Ausdruck U unter* *den angegebenen Bedingungen liefert, so gibt es* $p+q$ *von* t *abhängige Multiplikatoren* $\lambda_\alpha(t)$, $\mu_\beta(t)$ *und gleichzeitig* $2q+r+1$ *konstante Multiplikatoren:* l_0, l_β^0, l_β^1, $l_{q+\gamma}$ *derart, daß die* n *Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

und die $2n$ *Grenzgleichungen*

$$H_i^0 = 0, \qquad H_i^1 = 0 \tag{25}$$

erfüllt sind, und überdies die $q+r+1$ *Multiplikatoren* l_0, l_β, $l_{q+\gamma}$ *nicht alle gleichzeitig gleich Null sind. Dabei sind die Größen* Ω, H_i^0, H_i^1, l_β *durch die Gleichungen* (22) *definiert.*

Weiter gilt die folgende Umkehrung*) hierzu:

Satz IIa: *Wenn es ein System von Multiplikatoren*

$$\lambda_\alpha(t),\ \mu_\beta(t);\ l_0,\ l_\beta^0,\ l_\beta^1,\ l_{q+\gamma}$$

gibt, in welchen $l_0 \neq 0$, *und für welches die Differentialgleichungen* (24) *und die Grenzgleichungen* (25) *bestehen, so ist*

$$V(\eta) = 0$$

für jedes System von zulässigen ersten Variationen, d. h. für jedes zweimal stetig differentiierbare Funktionensystem $\eta_1, \cdots, \eta_n$, *welches den* p *Differentialgleichungen* (18), *den* q *endlichen Gleichungen*

$$\Psi_\beta(\eta) \equiv \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\eta_i = 0 \tag{26}$$

und den r *Anfangsbedingungen*

$$\mathrm{X}_\gamma(\eta) \equiv \sum_i \left\{ \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}\eta_i(t_0) + \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}\eta_i(t_1) \right\} = 0 \tag{27}$$

genügt.

Zum Beweis bilde man mit den in der Voraussetzung genannten Multiplikatoren, wobei man $l_0 = 1$ setzen darf, den Ausdruck

$$V(\eta) + \sum_\alpha \int_{t_0}^{t_1} \lambda_\alpha \Phi_\alpha(\eta)\,dt + \sum_\beta \int_{t_0}^{t_1} \mu_\beta \Psi_\beta(\eta)\,dt$$
$$+ \sum_\beta l_\beta^0 \overset{0}{\Psi}_\beta(\eta) + \sum_\beta l_\beta^1 \overset{1}{\Psi}_\beta(\eta) + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \mathrm{X}_\gamma(\eta).$$

Derselbe ist gleich $V(\eta)$, wenn die η_i den Gleichungen (18), (26) und (27) genügen und andererseits reduziert sich derselbe nach Ausführung der Lagrangeschen partiellen Integration auf die linke Seite von (21), und ist daher wegen der vorausgesetzten Gleichungen (24) und (25) gleich Null.

*) Verallgemeinerung eines Resultates von Hadamard, vgl. „Leçons" Nr. 204.

§ 3.

Der normale und der anormale Fall.

In den Entwicklungen des vorigen Paragraphen haben wir nach dem Vorgang von Hilbert durch Einführung des Multiplikators l_0 zwei wesentlich verschiedene Fälle zusammengefaßt, die nunmehr getrennt betrachtet werden sollen.

Nach der Theorie der gewöhnlichen Extrema mit Nebenbedingungen haben wir nämlich bei der Behandlung des Extremums der Funktion $U(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+r+1})$ folgende zwei Fälle zu unterscheiden:*)

Fall I: Es ist möglich $q+r+1$ Funktionensysteme $\overset{\sigma}{\eta}_1, \cdots, \overset{\sigma}{\eta}_n$ von $\mathfrak{H}$ so auszuwählen, daß mindestens eine Determinante $q+r^{\text{ten}}$ Grades der Matrix

$$\left\| \overset{0}{\Psi}_1(\overset{\sigma}{\eta}), \cdots, \overset{0}{\Psi}_q(\overset{\sigma}{\eta}), \; X_1(\overset{\sigma}{\eta}), \cdots, X_r(\overset{\sigma}{\eta}) \right\|, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, q+r+1 \tag{28}$$

von Null verschieden ist.

Alsdann ist in den Formeln des vorigen Paragraphen

$$l_0 = 1$$

zu setzen. Dies ist der „*Hauptfall*"; wir sagen in diesem Fall, die Kurve $\mathfrak{E}_0$ verhalte sich „*normal*".

Im Hauptfall kann man die $q+r$ Gleichungen (14) nach $q+r$ der Größen $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{q+r+1}$ auflösen und erhält so durch Einsetzen der gefundenen Werte in (13) eine einparametrige *Schar von zulässigen Variationen* der Kurve $\mathfrak{E}_0$.

Zugleich beweist man leicht den zuerst von Weierstraß für das einfachste isoperimetrische Problem bewiesenen Satz, den ich dem „Fundamentallemma" der Variationsrechnung gegenüber als „*Ergänzungslemma*" bezeichnet habe**):

Ist $\eta_1, \cdots, \eta_n$ ein System von zulässigen ersten Variationen der Kurve $\mathfrak{E}_0$, so gibt es stets eine einparametrige Schar von zulässigen Kurven

$$y_i = \bar{y}_i(t, \varepsilon), \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

in welcher die Kurve $\mathfrak{E}_0$ für $\varepsilon = 0$ enthalten ist, und für welche

$$\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \varepsilon}\Big/^{\varepsilon=0} = \eta_i .$$

Fall II: Sämtliche Determinanten der Matrix (28) verschwinden, wie man auch die $q+r+1$ Funktionensysteme $\overset{\sigma}{\eta}_1, \cdots, \overset{\sigma}{\eta}_n$ von $\mathfrak{H}$ wählen mag.

---

*) Vgl. meine „*Vorlesungen über Variationsrechnung*", S. 547.

**) Ibid. S. 460 und 568, und Hadamard, Leçons, S. 228.

Alsdann ist in den Entwicklungen des vorigen Paragraphen

$$l_0 = 0$$

zu setzen. Wir sagen in diesem Fall nach dem Vorgang von Hahn, die Kurve $\mathfrak{C}_0$ verhalte sich „*anormal*".

Aus (16) folgt daher:*)

Im anormalen Fall gibt es ein System von $q + r$ Multiplikatoren

$$l_1, l_2, \cdots, l_{q+r}$$

die nicht alle Null sind, sodaß

$$\sum_\beta l_\beta \overset{0}{\Psi}(\eta) + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \mathrm{X}_\gamma(\eta) = 0, \quad (\mathfrak{H}). \tag{29}$$

Da dies offenbar im Hauptfall nicht möglich ist, so ist diese Eigentümlichkeit *charakteristisch* für den anormalen Fall.

Im anormalen Fall ist es, wenigstens auf dem oben beim Hauptfall angegebenen Weg, nicht möglich, Scharen von zulässigen Variationen der Kurve $\mathfrak{C}_0$ zu konstruieren, und dementsprechend wird auch das Ergänzungslemma hinfällig.

Der Hauptsatz des vorigen Paragraphen nimmt nunmehr folgende Form an:

Satz III: *Damit die Kurve $\mathfrak{C}_0$ sich anormal verhalte, ist notwendig und hinreichend, daß es ein System von Multiplikatoren*

$$\lambda_\alpha(t),\ \mu_\beta(t);\ l_\beta^0,\ l_\beta^1,\ l_{q+\gamma}$$

gibt, für welche 1. *die n Differentialgleichungen bestehen*

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{30}$$

mit

$$\Omega_0 = \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \psi_\beta, \tag{31}$$

2. *die* $2n$ *Grenzgleichungen gelten*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'}\Big/^{t_0} + \sum_\beta l_\beta^0 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big/^{t_0} + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}} = 0, \\ \frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'}\Big/^{t_1} + \sum_\beta l_\beta \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big/^{t_1} + \sum_\gamma l_{q+\gamma} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}} = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

3. *die $q + r$ Konstanten l_β, l_{q+r} nicht alle gleich Null sind, wo*

$$l_\beta = l_\beta^0 + l_\beta^1 + \int_{t_0}^{t_1} \mu_\beta(t)\, dt. \tag{33}$$

*) Verallgemeinerung eines Resultates von Hadamard, Leçons, S. 228.

Daß diese Bedingungen notwendig sind, folgt unmittelbar aus Satz II für $l_0 = 0$. Daß sie auch hinreichend sind, ergibt sich folgendermaßen: Für jedes Funktionensystem η_i von $\mathfrak{H}$ gelten die Differentialgleichungen (18), die Gleichungen (19) und die Anfangsbedingungen (20). Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit den im Satz vorkommenden Multiplikatoren λ_α, μ_β, l_β^1, integrieren die beiden ersten zwischen t_0 und t_1, summieren dann nach α und β und addieren die erhaltenen Resultate. Sodann wenden wir die Lagrangesche partielle Integration an und drücken schließlich mit Hilfe der Voraussetzung (32) die Größen

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'}\Big/^{t_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'}\Big/^{t_1}$$

durch die übrigen Größen aus. Dann ergibt sich als Resultat die Gleichung (29), gültig in $\mathfrak{H}$, mit Multiplikatoren l_β, $l_{\varrho+\gamma}$, die nicht alle gleich Null sind. Daher ist $\mathfrak{C}_0$ anormal.

Zusatz: *Die Funktionen $\lambda_\alpha(t)$, $\mu_\beta(t)$ sind dabei nicht alle identisch gleich Null in $[t_0 t_1]$.*

Dies folgt nach Satz I daraus, daß die Anfangsbedingungen als reduziert vorausgesetzt sind und der Fall singulärer Endpunkte ausgeschlossen ist.

Aus Satz III ergibt sich ein wichtiges Resultat für den normalen Fall:

Satz IV: *Wenn die Kurve $\mathfrak{C}_0$ sich normal verhält, und es ein Multiplikatorensystem*

$$\lambda_\alpha(t),\ \mu_\beta(t);\ l_\beta^0,\ l_\beta^1,\ l_{\varrho+\gamma}$$

gibt, für welches die Differentialgleichungen (24) *und die Grenzgleichungen* (25) *mit $l_0 = 1$ erfüllt sind, so gibt es nur ein einziges solches System von Multiplikatoren.*

Denn gäbe es ein zweites System

$$\bar\lambda_\alpha(t),\ \bar\mu_\beta(t);\ \bar l_\beta^0,\ \bar l_\beta,\ \bar l_{\varrho+\gamma},$$

so subtrahiere man von den zugehörigen Differentialgleichungen und Grenzgleichungen

$$\frac{\partial \bar\Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar\Omega}{\partial y_i'} = 0, \quad \bar H_i^0 = 0, \quad \bar H_i^1 = 0$$

die Gleichungen (24), resp. (25). Das so erhaltene System von Differentialgleichungen und Grenzgleichungen würde dann nach Satz III ausdrücken, daß $\mathfrak{C}_0$ anormal wäre (was der Voraussetzung widersprechen würde), außer wenn die sämtlichen Differenzen

$$\bar l_\beta - l_\beta, \quad \bar l_{\varrho+\gamma} - l_{\varrho+\gamma}$$

verschwinden. Es muß also insbesondere: $\bar l_{\varrho+\gamma} - l_{\varrho+\gamma} = 0$ sein.

Nunmehr folgt aus den Gleichungen

$$\overline{H}_i^0 - H_i^0 = 0, \quad \overline{H}_i^1 - H_i^1 = 0$$

auf Grund von Voraussetzung (4), daß

$$\bar{\lambda}_\alpha(t_0) - \lambda_\alpha(t_0) = 0, \quad \bar{l}_\beta^0 - l_\beta^0 = 0,$$
$$\bar{\lambda}_\alpha(t_1) - \lambda_\alpha(t_1) = 0, \quad \bar{l}_\beta^1 - l_\beta^1 = 0$$

sein muß. Endlich schließt man aus den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial(\overline{\Omega} - \Omega)}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\overline{\Omega} - \Omega)}{\partial y_i'} = 0$$

wieder auf Grund der Voraussetzung (4), daß

$$\bar{\lambda}_\alpha(t) - \lambda_\alpha(t) = 0, \quad \bar{\mu}_\beta(t) - \mu_\beta(t) = 0,$$

identisch in t, womit der Satz bewiesen ist.

Es möge mit $\mathfrak{M}$ die bisher betrachtete Gesamtheit von zulässigen Kurven bezeichnet werden, also die (abgesehen von Stetigkeitsbedingungen und Gebietseinschränkungen) durch die Bedingungen (1), (2), (3) charakterisierte Kurvenmenge, mit $\mathfrak{M}'$ dagegen diejenige Kurvenmenge, welche durch dieselben Bedingungen *mit Weglassung der Anfangsbedingung*

$$\chi_{\gamma_0}(y_{10}, \cdots, y_{n0};\ y_{11}, \cdots, y_{n1}) = 0$$

charakterisiert ist, wo γ_0 eine der Zahlen $1, 2, \cdots, r$ ist.

Dem bisher betrachteten Problem I:

$$U = \text{Extremum in } \mathfrak{M}$$

stellen wir dann das Problem II:

$$\chi_{\gamma_0}(y_{10}, \cdots, y_{n0};\ y_{11}, \cdots, y_{n1}) = \text{Extremum in } \mathfrak{M}'$$

gegenüber.

Schreibt man für dieses neue Problem die Differentialgleichungen (24) und die Grenzgleichungen (25) hin, so sieht man, daß dieselben mit den Differentialgleichungen (31) und den Grenzgleichungen (32) für den anormalen Fall des Problems I identisch werden, wenn man statt l_0 schreibt $l_{\varrho+\gamma_0}$, und man erhält so den

Satz V: *Erfüllt die Kurve $\mathfrak{C}_0$ die Differentialgleichungen und die Grenzgleichungen für das Problem* II, *so ist $\mathfrak{C}_0$ anormal für das Problem* I, *und umgekehrt.*

Zusatz: Ist die Kurve $\mathfrak{C}_0$ anormal für Problem I und ist dabei der in Satz III vorkommende Multiplikator $l_{\varrho+\gamma_0} \neq 0$, so ist $\mathfrak{C}_0$ *normal* für Problem II.

§ 4.

Bemerkungen über einige Spezialfälle.

Wir wollen die vorangehenden Resultate noch auf einige Spezialfälle anwenden.

a) *Das Lagrangesche Problem mit reinen Differentialgleichungsbedingungen und festen Endpunkten* wird erhalten für $G \equiv 0$, wenn die Bedingungen (2) wegfallen und die Bedingungen (3) die spezielle Form annehmen:

$$y_{i0} - \overset{0}{y}_{i0} = 0, \quad y_{i1} - \overset{0}{y}_{i1} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{34}$$

Die Grenzgleichungen (25) lauten

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big/^{t_0} + l_i = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big/^{t_1} + l_{n+i} = 0.$$

Sie drücken keine Bedingung für die Kurve $\mathfrak{E}_0$ aus, sondern dienen nur dazu, die Multiplikatoren l zu bestimmen.

Die Sätze III, IV, V gehen in bekannte Sätze*) über den normalen und anormalen Fall über.

b) *Das Lagrangesche Problem mit gemischten Bedingungen und festen Endpunkten.*

Schon A. Mayer hat in seiner grundlegenden Arbeit über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode**) davor gewarnt, das Lagrangesche Problem mit gemischten Bedingungen und festen Endpunkten durch Differentiation der endlichen Gleichungen auf den Fall reiner Differentialgleichungsbedingungen zurückzuführen, da man hierbei stets auf den anormalen Fall geführt werde, und neuerdings haben Hadamard***) und ich selbst†) diese Warnung wiederholt.

Die erwähnten Bedenken sind jedoch unbegründet: Wenn man, wie es für eine richtige Definition des anormalen Falles notwendig ist, vor Eintritt in die Untersuchung die Anfangsbedingungen in der angegebenen Weise reduziert, so wird man im allgemeinen nicht auf den anormalen Fall geführt.

Im gegenwärtigen Fall hat man wieder $G \equiv 0$ und an Stelle der Anfangsbedingungen (3) treten die Gleichungen (34), zu denen noch die stets vorhandenen Anfangsbedingungen (5) kommen. Läßt man nun die Anfangsbedingungen in dieser unmittelbar gegebenen Form, so lauten die Bedingungen (29) für den anormalen Fall dahin, daß es $q + 2n$ Multiplikatoren $l_1, l_2, \cdots, l_{q+2n}$, nicht alle gleich Null, geben muß derart, daß

*) Vgl. meine „Vorlesungen" § 69, d).

**) Math. Ann. 26 (1886), S. 80, Fußnote.

***) Leçons, Nr. 207.

†) „Vorlesungen", S. 582.

$$\sum_{\beta} l_\beta \overset{0}{\Psi}_\beta(\eta) + \sum_i l_{q+i}\,\eta_i(t_0) + \sum_i l_{q+n+i}\,\eta_i(t_1) = 0, \quad (\mathfrak{H}) \tag{35}$$

und dieser Bedingung kann man auf Grund der in $\mathfrak{H}$ gültigen Gleichungen (20) stets genügen, indem man z. B.

$$l_\beta = 0, \quad l_{q+i} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i}\Big/^{t_0}, \quad l_{q+n+i} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i}\Big/^{t_1}$$

wählt, und es scheint also in der Tat, als ob immer der normale Fall eintreten müßte.

Dem ist aber nicht so. Denn aus der Voraussetzung (4) folgt, daß es zwei Systeme von q Zahlen $i_1, i_2, \cdots, i_q$ und $k_1, k_2, \cdots, k_q$ aus der Reihe $1, 2, \cdots, n$ gibt, für welche

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_q)}{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_q})}\Big/^{t_0} \neq 0, \quad \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_q)}{\partial(y_{k_1}, y_{k_2}, \cdots, y_{k_q})}\Big/^{t_1} \neq 0.$$

Daher sind nach dem Dinischen Satz über implizite Funktionen die $2q$ Gleichungen

$$\begin{cases} y_{i_1,0} - \overset{0}{y}_{i_1,0} = 0, \; y_{i_2,0} - \overset{0}{y}_{i_2,0} = 0, \; \cdots, \; y_{i_q,0} - \overset{0}{y}_{i_q,0} = 0, \\ y_{k_1,1} - \overset{0}{y}_{k_1,1} = 0, \; y_{k_2,0} - \overset{0}{y}_{k_2,0} = 0, \; \cdots, \; y_{k_q,0} - \overset{0}{y}_{k_q,0} = 0 \end{cases} \tag{36}$$

eine Folge der übrigen $2n - 2q$ Gleichungen (34) und der Gleichungen (5), und erst nach Weglassung dieser $2q$ Gleichungen (36) wird das System der Anfangsbedingungen in dem in § 1 definierten Sinn reduziert.

In der Bedingung (35) für den anormalen Fall sind also jetzt bei den beiden Summationen nach i die Indizeswerte $i_1, \cdots, i_q$, resp. $k_1, \cdots, k_q$ auszulassen, und die so reduzierte Bedingung ist nun im allgemeinen durchaus keine Folge der Gleichungen (20) mehr, womit der oben erwähnte Einwand widerlegt ist.

Dieses Beispiel zeigt, wie nötig es für die Charakterisierung des anormalen Falles ist, daß man vor Eintritt in die Untersuchung die Anfangsbedingungen in der in § 1 angegebenen Weise reduziert.

c) *Das Mayersche Problem,* wie es A. Mayer selbst formuliert hat, ergibt sich für

$$f \equiv 0, \quad G \equiv y_{11},$$

wenn die Bedingungen (2) wegfallen und die Bedingungen (3) die spezielle Form annehmen:

$$\begin{aligned} y_{10} - \overset{0}{y}_{10} = 0, \; y_{20} - \overset{0}{y}_{20} = 0, \; \cdots, \; y_{n0} - \overset{0}{y}_{n0} = 0, \\ y_{21} - \overset{0}{y}_{21} = 0, \; \cdots, \; y_{n1} - \overset{0}{y}_{n1} = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Man erhält die bekannten Differentialgleichungen, und von den Grenzgleichungen ist nur die auf y_{11} bezügliche Gleichung

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'} \Big/^1 + l_0 = 0,$$

wo

$$\Omega_0 = \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha$$

von Bedeutung, insofern sie zeigt, daß im normalen Fall

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'} \Big/^1 \neq 0,$$

im anormalen Fall dagegen

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y_i'} \Big/^1 = 0.\text{*)}$$

Mit diesem Mayerschen Problem vollständig äquivalent ist das folgende Lagrangesche Problem: In Beziehung auf dieselbe Gesamtheit $\mathfrak{M}$ von zulässigen Kurven, — also insbesondere mit denselben Anfangsbedingungen (37), — das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} y_1' \, dt$$

zu einem Extremum zu machen, da auf Grund der ersten der Anfangsbedingungen (37)

$$J = y_{11} - \overset{0}{y}_{10}$$

ist, sich also von der im Mayerschen Problem zu einem Extremum zu machenden Größe y_{11} nur um die additive, in $\mathfrak{M}$ konstante, Größe $\overset{0}{y}_{10}$ unterscheidet.

In der Tat erhält man auch nach § 2 genau dieselben Differentialgleichungen und Grenzgleichungen für beide Probleme, und wenn die Kurve $\mathfrak{E}_0$ normal (resp. anormal) für das eine Problem ist, so ist sie auch normal (resp. anormal) für das andere. *Man darf also das Mayersche Problem als Spezialfall des Lagrangeschen Problems mit einer frei variabeln Endkoordinate auffassen**).*

Freiburg i. B., den 11. Januar 1913.

---

*) In Übereinstimmung mit Hadamard, „Leçons", Nr. 204.

**) Die Einwände, die Hadamard gegen die Behandlung des Mayerschen Problems als Spezialfall des Lagrangeschen erhoben hat („Leçons", Nr. 197, 206) finden auf die obige Betrachtung keine Anwendung, ebensowenig auf den Beweis, den ich in § 70, c) meiner „Vorlesungen" für die Multiplikatorenregel beim Mayerschen Problem gegeben habe.