9. *Über die Transformationsgleichungen der Relativitätstheorie; von A. C. van Rijn van Alkemade.*

In einer Abhandlung „Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme" haben Ph. Frank und H. Rothe gezeigt[1]), daß man bei der Ableitung der Transformationsgleichungen die Unabhängigkeit des Wertes der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit des Bezugssystems nicht, wie es bisher üblich war, gleich am Anfang vorauszusetzen braucht. Ihre Ableitung stützt sich auf zwei Voraussetzungen:

A. Die Transformationsgleichungen bilden eine lineare homogene Gruppe, wenn die Geschwindigkeit des Bezugsystems als Parameter aufgefaßt wird.[2])

B. Die Kontraktion der Längen soll nicht vom Vorzeichen, sondern nur vom Betrage dieser Geschwindigkeit abhängen.

Im folgenden erlaube ich mir zu zeigen, daß man mit diesen Voraussetzungen denselben Zweck in noch einfacherer Weise erreichen kann, als die genannten Autoren es getan haben.

1. Wir betrachten einfachheitshalber Erscheinungen, die nur von einer Koordinate abhängen, wie z. B. die Paralleltranslation eines Körpers in der Richtung der x-Achse eines festen Koordinatensystems. Wollen wir den Verlauf einer derartigen Erscheinung beschreiben in bezug auf ein Koordinatensystem, das eine gleichförmige Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x-Achse hat, so können wir statt der Zeit t und der absoluten Koordinate x zwei

1) Ph. Frank u. H. Rothe, Ann. d. Phys. **34**. p. 825. 1911.

2) A. Einstein hat in seiner ersten Abhandlung schon bemerkt, daß die Transformationsgleichungen eine Gruppe bilden sollen (Ann. d. Phys. **17**. p. 907. 1905).

neue Veränderliche t' und x' einführen, bestimmt durch die Gleichungen:

$$t' = a_{11}\,t + a_{12}\,x\,, \tag{1}$$

$$x' = a_{21}\,t + a_{22}\,x\,.\text{[1]} \tag{2}$$

Hierin sind die Koeffizienten a, Funktionen der Geschwindigkeit v und es ist unsere Aufgabe, die Form dieser Funktionen zu bestimmen.

Zunächst folgt aus der Gestalt der Gleichungen (1) und (2), daß man über die Anfangswerte der neuen Veränderlichen derart verfügen kann, daß immer $x' = 0$ ist im Anfangspunkte des bewegten Systems, und daß in dem Augenblicke, wenn dieser Punkt mit dem Anfangspunkte des festen Systems zusammenfällt, sowohl $t = 0$, wie auch $t' = 0$ ist.

Weiter ist im Anfangspunkte des bewegten Systems auch immer $x = v\,t$; setzen wir somit in (2) $x' = 0$ und $x = v\,t$, so finden wir leicht:

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} = -\,v\,. \tag{I}$$

2. Um weitere Beziehungen zwischen den Koeffizienten a zu erhalten, betrachten wir zwei bewegte Koordinatensysteme mit den Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2, wo $v_2 > v_1$ ist. Die Berechnung der Werte der Veränderlichen t' und x' für eins dieser Systeme, wenn die Werte für das andere System bekannt sind, wollen wir einen „Übergang" von einem System auf das andere nennen. Aus der Erwägung, daß die Gleichungen (1) und (2) linear und homogen sind, folgert man sogleich, daß der genannte Übergang ebenfalls mittels linearer, homogener Transformationsgleichungen zustande kommt. Zudem stellen wir jetzt aber den Koeffizienten in diesen Gleichungen die Forderung, *daß diese Koeffizienten beim Übergang vom ersten bewegten System* (v_1) *auf das zweite* (v_2) *dieselben Funktionen der relativen Geschwindigkeit V vom zweiten Systeme in bezug auf das erste sein sollen, wie die Koeffizienten beim Übergang vom ruhenden auf eins der bewegten Systeme von der absoluten Geschwindigkeit dieses letzteren sind.*

Wenn es uns gelingt, Funktionen zu finden, welche dieser Forderung genügen, so haben wir damit das ruhende System

1) Ph. Frank u. H. Rothe, l. c. p. 836.

gewissermaßen eliminiert oder, wie man auch sagen kann, wenn das System, welches wir bisher das ruhende genannt haben, vielleicht doch eine uns unbekannte Bewegung hat, bleiben die Gleichungen (1) und (2) doch gültig, nur daß man dann v als eine relative Geschwindigkeit zu betrachten hat. In diesem Sinne wollen wir die von uns gestellte Forderung das *Relativitätsprinzip der Transformation* nennen.

3. Für den Übergang vom ruhenden auf das erste bewegte System haben wir die Gleichungen:

$$t_1' = a_{11}\,t + a_{12}\,x\,, \tag{3}$$

$$x_1' = a_{21}\,t + a_{22}\,x\,, \tag{4}$$

wo die Koeffizienten a jetzt Funktionen von v_1 sind. Für den Übergang vom ruhenden auf das zweite bewegte System:

$$t_2' = b_{11}\,t + b_{12}\,x\,, \tag{5}$$

$$x_2' = b_{21}\,t + b_{22}\,x\,, \tag{6}$$

wo die Koeffizienten b dieselben Funktionen von v_2 sind, und für den Übergang vom ersten auf das zweite bewegte System:

$$t_2' = c_{11}\,t_1' + c_{12}\,x_1'\,,$$

$$x_2' = c_{21}\,t_1' + c_{22}\,x_1'\,,$$

wo die Koeffizienten c wiederum dieselben Funktionen wie a und b, jetzt aber von der relativen Geschwindigkeit V sind.

Aus (3), (4), (5), (6) findet man leicht durch Elimination von t und x:

$$t_2' = \frac{b_{11}\,a_{22} - b_{12}\,a_{21}}{\varDelta}\,t_1' + \frac{b_{12}\,a_{11} - b_{11}\,a_{12}}{\varDelta}\,x_1'\,,$$

$$x_2' = \frac{b_{21}\,a_{22} - b_{22}\,a_{21}}{\varDelta}\,t_1' + \frac{b_{22}\,a_{11} - b_{21}\,a_{12}}{\varDelta}\,x_1'\,,$$

$$\varDelta = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\,,$$

die Koeffizienten c sind somit:

$$c_{11} = \frac{b_{11}\,a_{22} - b_{12}\,a_{21}}{\varDelta}\,, \tag{7}$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}\,a_{11} - b_{11}\,a_{12}}{\varDelta}\,, \tag{8}$$

$$c_{21} = \frac{b_{21}\,a_{22} - b_{22}\,a_{21}}{\varDelta}\,, \tag{9}$$

$$c_{22} = \frac{b_{22}\,a_{11} - b_{21}\,a_{12}}{\varDelta}\,. \tag{10}$$

Aus (I), § 1 folgt

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} = -v_1 \quad \text{und} \quad \frac{b_{21}}{b_{22}} = -v_2$$

und dem Relativitätsprinzip der Transformation entsprechend ist ebenso

$$\frac{c_{21}}{c_{22}} = -V,$$

oder mit Rücksicht auf (9) und (10):

$$V = \frac{b_{22}\,a_{21} - b_{21}\,a_{22}}{b_{22}\,a_{11} - b_{21}\,a_{12}},$$

woraus man, durch Einsetzung der Werte von a_{21}/a_{22} und b_{21}/b_{22}, leicht findet:

$$V = \frac{v_2 - v_1}{\frac{a_{11}}{a_{22}} + v_2\,\frac{a_{12}}{a_{22}}}. \tag{11}$$

4. Aus der Formel (11) für die relative Geschwindigkeit leiten wir folgendes ab.

α) Setzen wir $v_1 = 0$, so wird das erste bewegte Koordinatensystem identisch mit dem ruhenden Systeme, die relative Geschwindigkeit des zweiten bewegten Systems in bezug auf das erste soll somit gleich deren absoluter Geschwindigkeit werden. In der Tat ist $a_{11}(0) = a_{22}(0) = 1$ und $a_{12}(0) = 0$ (wie man leicht aus (3) und (4) ersieht, weil für $v_1 = 0$, $t_1' = t$ und $x_1' = x$ werden soll), man findet somit aus (11) $V = v_2$.

β) Setzen wir $v_2 = 0$, so wird das zweite bewegte System identisch mit dem ruhenden und dessen relative Geschwindigkeit in bezug auf das erste bewegte System soll somit $= -v_1$ werden. Man findet aber aus (11) in diesem Fall:

$$V = \frac{-v_1}{\frac{a_{11}}{a_{22}}},$$

es soll somit

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = 1 \tag{II}$$

sein und selbstverständlich auch $b_{11}/b_{22} = 1$.

γ) Durch Verwechselung von v_1 und v_2 in (11) bekommen wir die relative Geschwindigkeit des ersten bewegten Systems in bezug auf das zweite und diese soll $= -V$ sein. Wir haben somit

$$-V = \frac{v_1 - v_2}{\frac{b_{11}}{b_{22}} + v_1 \frac{b_{12}}{b_{22}}}$$

und wenn wir diese Formel vergleichen mit (11) und beachten, daß

$$\frac{b_{11}}{b_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = 1$$

ist, sehen wir, daß:

$$v_1 \frac{b_{12}}{b_{22}} = v_2 \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

sein soll. Diese Gleichung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{v_1} \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{1}{v_2} \frac{b_{12}}{b_{22}},$$

woraus sich ergibt, daß

$$\text{(III)} \qquad \frac{a_{12}}{a_{22}} = p\, v_1 \quad \text{und} \quad \frac{b_{12}}{b_{22}} = p\, v_2,$$

wo p eine universelle Konstante ist.

Die Formel (11) für die relative Geschwindigkeit geht nunmehr über in

$$\text{(12)} \qquad V = \frac{v_2 - v_1}{1 + p\, v_1 v_2}.$$

5. Durch Substitution der Beziehungen (I), (II), (III) in (7), (8), (10) kann man sich leicht davon überzeugen, daß

$$\frac{c_{11}}{c_{22}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{c_{12}}{c_{22}} = p\, V.$$

Dem Relativitätsprinzip der Transformation entsprechend finden wir somit zwischen den Koeffizienten c dieselben Beziehungen wie zwischen den Koeffizienten a einerseits und b andererseits.

6. Es erübrigt jetzt noch die Bestimmung der Koeffizienten a_{22} bzw. b_{22} und c_{22} als Funktionen von v_1 bzw. v_2 und V. Aus (10) folgt:

$$c_{22} = \frac{b_{22}\, a_{11} - b_{21}\, a_{12}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}},$$

und wenn man hierin die Beziehungen (I), (II), (III) einsetzt, findet man leicht:

$$c_{22} = \frac{b_{22}}{a_{22}} \cdot \frac{1 + p\, v_1 v_2}{1 + p\, v_1^2}.$$

Nennen wir $a_{22} = f(v_1)$, dann ist $b_{22} = f(v_2)$ und, dem Relativitätsprinzip entsprechend, auch $c_{22} = f(V)$. Wenn wir auch noch (12) heranziehen, erhalten wir, zur Bestimmung der Funktion f, die Gleichung

$$f\left(\frac{v_2 - v_1}{1 + p\, v_1\, v_2}\right) = \frac{f(v_2)}{f(v_1)} \frac{1 + p\, v_1\, v_2}{1 + p\, v_1^2} \,. \tag{13}$$

Setzen wir $v_2 = 0$, $v_1 = v$, so wird

$$f(-v) = \frac{1}{f(v)} \cdot \frac{1}{1 + p\, v^2}$$

oder

$$f(-v) \cdot f(v) = \frac{1}{1 + p\, v^2} \,.$$

Führen wir jetzt die Voraussetzung B ein, daß die Kontraktion unabhängig von der Bewegungsrichtung sein soll, dann ist, weil $f(v)$ bekanntlich die Kontraktion vorstellt, $f(v) = f(-v)$ und

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + p\, v^2}} \,. \tag{IV}$$

7. Nachdem wir die Beziehungen (I), (II), (III), (IV) gefunden haben, ist die Aufgabe erledigt, die Koeffizienten a in den Transformationsgleichungen (1) und (2) den Voraussetzungen A. und B. entsprechend zu bestimmen.

Unsere Lösung ist aber insofern noch unbestimmt, als der Konstante p verschiedene Werte beigelegt werden können. Setzt man $p = 0$, so erhält man die gewöhnliche Galileitransformation; die Bedeutung einer anderen Wahl für den Wert von p geht am deutlichsten aus einer näheren Betrachtung der Gleichung (12) für die relative Geschwindigkeit hervor. Diese Gleichung

$$V = \frac{v_2 - v_1}{1 + p\, v_1\, v_2}$$

sagt nämlich folgendes aus:

„Für eine Bewegung, die in der Richtung der x-Achse eines ruhenden Koordinatensystems eine Geschwindigkeit v_2 hat, ist die relative Geschwindigkeit in bezug auf ein Koordinatensystem, welches eine Translationsgeschwindigkeit v_1 in der nämlichen Richtung hat $= V$."

Sobald p von Null verschieden ist, ergibt sich aus dieser Formel die Existenz einer Geschwindigkeit, die sowohl in bezug auf ein ruhendes System wie in bezug auf jedes bewegte System denselben Wert hat. Setzt man nämlich $v_2 = V = c$, so findet man leicht aus (12)

$$v_1 (1 + p c^2) = 0.$$

Es ist also entweder $v_1 = 0$, und in diesem Falle wird das bewegte System identisch mit dem ruhenden, so daß selbstverständlich die relative Geschwindigkeit gleich der absoluten ist, oder es ist

$$1 + p c^2 = 0$$

für jeden Wert von v_1.

Betrachtet man jetzt die Unabhängigkeit der Geschwindigkeit des Lichtes von der Bewegung des Bezugssystems als eine Erfahrungstatsache, so ist dieser Geschwindigkeit die oben genannte Eigentümlichkeit zuzuschreiben. Dadurch ist aber ebenfalls unsere Wahl für den Wert der Konstante p bestimmt, denn wir haben zu setzen

$$p = -\frac{1}{c^2}\,.$$

8. Schließlich möchte ich noch hervorheben, daß man mittels der Gleichung (13) die Gestalt der Funktion $f(v)$ leicht bestimmen kann, auch wenn die Voraussetzung $f(v) = f(-v)$ nicht gemacht wird. Subtrahiert man nämlich von der Gleichung:

$$f\left(\frac{v_2 - v_1}{1 + p\, v_1 v_2}\right) = \frac{f(v_2)}{f(v_1)}\,\frac{1 + p\, v_1 v_2}{1 + p\, v_1^2}$$

$f(0) = 1$, und dividiert dann mit $v_2 - v_1 / 1 + p\, v_1 v_2$, so wird:

$$\frac{f\left(\frac{v_2 - v_1}{1 + p\, v_1 v_2}\right) - f(0)}{\frac{v_2 - v_1}{1 + p\, v_1 v_2}} = \frac{\frac{f(v_2) - f(v_1)}{v_2 - v_1}}{f(v_1)}\,\frac{(1 + p\, v_1 v_2)^2}{1 + p\, v_1^2} + \frac{p\, v_1 (1 + p\, v_1 v_2)}{1 + p\, v_1^2}\,.$$

Setzt man hierin $v_2 = v_1 = v$, so erhält man

$$f'(0) = \frac{f'(v)}{f(v)}(1 + p\, v^2) + p\, v\,,$$

oder wenn man die Konstante $f'(0) = q$ nennt:

$$\frac{q}{1 + p\, v^2} = \frac{f'(v)}{f(v)} + \frac{p\, v}{1 + p\, v^2}\,.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$(14) \qquad f(v) = \frac{e^{\frac{q}{\sqrt{p}} \operatorname{arctg} v \sqrt{p}}}{\sqrt{1 + p v^2}};$$

eine additive Konstante braucht nicht hinzugefügt zu werden, weil für $v = 0$ $f(v) = 1$ wird.

Nimmt man $p = -1/c^2$ und schreibt man zur Abkürzung β für v/c, dann findet man mittels der Formel

$$\operatorname{arctg} i \beta = \tfrac{1}{2} i \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

$$(15) \qquad f(v) = \frac{(1 + \beta)^{\frac{c q - 1}{2}}}{(1 - \beta)^{\frac{c q + 1}{2}}}.$$

Will man jetzt wieder die Forderung $f(v) = f(-v)$ stellen, so hat man in (14) und (15) einfach $q = 0$ zu setzen.

(Eingegangen 11. Mai 1912.)