

Ueber Büschel von Kegelschnitten.

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Die beiden letzten Aufsätze, welche ich in diesen Annalen publicirt habe*), hatten den doppelten Zweck, einmal die Invariantentheorie der ternären Formen in bestimmtem Sinne zu fördern, dann aber zu einer wirklich durchgeführten Theorie der Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen Vorarbeiten zu sein. In gleichem Sinne mögen die Untersuchungen aufgefasst werden, die ich hier nachstehend veröffentliche, und in denen es sich um *die Theorie zweier ternärer quadratischer Formen* handelt. Das volle System zugehöriger Formen wurde nach meinen Angaben bereits in Clebsch's Vorlesungen über Geometrie (Bd. 1, pag. 288 ff.) durch Herrn Lindemann mitgetheilt. Dasselbe unterliegt im ersten Abschnitte des Folgenden einer näheren Untersuchung, indem ich nämlich eine Anzahl von Relationen explicite entwickle, die zwischen den Formen des Systems bestehen**). Ich wende mich sodann im zweiten Abschnitte zu der bekannten kanonischen Darstellung (oder „irrationalen Typik“), welche, geometrisch zu reden, durch die Existenz des gemeinsamen Polardreiecks der beiden vorgelegten Kegelschnitte ermöglicht ist. Zwei ternäre quadratische Formen haben keine rationale lineare Covariante. Soll also bei ihnen von einer *rationalen* typischen Darstellung die Rede sein, so muss man ihnen, wie es im dritten Abschnitte des Folgenden geschieht, eine lineare Form adjungiren. Ich verfolge diese Darstellung insbesondere für den Fall, dass diese lineare Form als simultane Covariante der beiden in Betracht kommenden Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitte oder auch mit einer Curve vierter Ordnung gegeben ist, wobei es zumal von Interesse wird, die typische Darstellung dieser zutretenden Curven auf möglichst niedrige Bildungen zurückzuführen.

*) Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$; über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$; beide in Bd. XVII.

**) Man vergleiche hierzu Rosanes im VI. Bande dieser Annalen; pag. 264 ff.: „Ueber Systeme von Kegelschnitten“.

Abschnitt I.

Das simultane System von s und ϱ .

§ 1.

Aufstellung des Systems.

Von den beiden vorgelegten Kegelschnitten soll der eine, ϱ , in Liniencoordinaten, der andere, s , in Punktkoordinaten gegeben sein. Einzel genommen haben dieselben die Systeme:

$$(I) \quad r; \quad (\varrho \varrho x)^2 = r; \quad r_\varrho^2 = 6(1);$$

$$(II) \quad s; \quad (ssu)^2 = \tau; \quad s_\tau^2 = 3(4);$$

(womit zugleich, wie immer im Folgenden, die Bezeichnungen, also hier r und τ für die Covarianten, (1) und (4) für die Invarianten, eingeführt sein sollen). Um die Formen des simultanen Systems zu gewinnen, haben wir (I) und (II) durch Ueberschiebung zu combiniren. So entstehen (vergl. Clebsch-Lindemann l. c.) ausser

$$\varrho, r, (1), s, \tau, (4)$$

im Ganzen noch 14 Formen, nämlich einmal:

$$s_\varrho = s_x u_\varrho s_\varrho; \quad s_\varrho^2 = 2(2); \quad (\varrho, \tau, x) = u_\varrho u_\tau (\varrho \tau x); \quad (\varrho, \tau, x)^2 = t;$$

$$(r, s, u) = r_x s_x (rsu); \quad (r, s, u)^2 = \sigma; \quad r_\tau = r_x u_\tau r_\tau; \quad r_\tau^2 = (3);$$

sodann die folgenden:

$$(\varrho, \sigma, x) = u_\varrho u_\sigma (\varrho \sigma x); \quad (\sigma, \tau, x) = u_\sigma u_\tau (\sigma \tau x); \quad (s, t, u) = r_x t_x (stu);$$

$$(s, t, u) = s_x t_x (stu); \quad r_x s_x t_x (r, s, t); \quad u_\varrho u_\sigma u_\tau (\varrho \sigma \tau) = (\varrho, \sigma, \tau).$$

Ich stelle die 20 Formen des Systems in der folgenden Tabelle zusammen, die nach dem Grade in den x und den u geordnet ist:

	0	1	2	3
(S)	0	(1), (2) (3), (4)	r s t	(r, s, t)
	1	$s_\varrho; r_\tau$	(r, s, u) (r, t, u) (s, t, u)	
	2	ϱ, σ, τ	(ϱ, σ, x) (ϱ, τ, x) (σ, τ, x)	
	3	$(\varrho, \sigma, \tau,)$		

§ 2.

Darstellung der einfachsten Formen durch die Formen des Systems.

Alle simultanen Formen von s und ϱ sind ganze Functionen der Formen des Systems (S). Ich will nunmehr in diesem und den folgenden Paragraphen einige als solche Functionen darstellen und beginne mit den einfachsten derselben, nämlich den Ueberschiebungen der quadratischen Formen

$$r, s, t, \varrho, \sigma, \tau$$

übereinander. Indem wir die Producte der Invarianten (1), (2), (3), (4) mit (12), (13), (14), (24), . . . bezeichnen, erhalten wir nach leichter Rechnung:

a) zunächst für die einfachsten Ueberschiebungen je zweier Kegelschnitte:

$$(1) \quad r\sigma^2 = 16(12); \quad s\sigma^2 = (3); \quad t\varrho^2 = (3); \quad t\tau^2 = 8(24); \quad t\sigma^2 = 2(23) + 6(14);$$

$$(2) \quad \begin{cases} (\varrho, \sigma, x)^2 = 2(2)r + 2(1)s; & (\sigma, \sigma, x)^2 = (3)r + 16(12)s - 4(1)t; \\ (\sigma, \tau, x)^2 = (4)r + (3)s; & (\tau, \tau, x)^2 = 4(4)s; & (r, r, u)^2 = 8(1)\varrho; \\ (r, t, u)^2 = (3)\varrho + 2(1)\tau; & (s, t, u)^2 = (4)\varrho + 2(2)\tau; \\ (t, t, u)^2 = 8(24)\varrho - 2(4)\sigma + (3)\tau; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} r\varrho = 2(1)u_x; & r\sigma = 8(12)u_x - 4(1)s\varrho; & s\sigma = \frac{1}{2}(3)u_x - \frac{1}{2}r\tau; \\ s\tau = (4)u_x; & t\varrho = \frac{1}{2}(3)u_x - \frac{1}{2}r\tau; \\ t\sigma = (2(23) + 2(14))u_x - (3)s\varrho - 2(2)r\tau; & t\tau = 4(24)u_x - 2(4)s\varrho; \end{cases}$$

b) sodann für die complicirteren Bildungen, bei denen in den Klammerfactoren Unterdeterminanten aus Punkt- oder Linienkoordinaten und Symbolen auftreten:

$$(4) \quad \begin{cases} (ru \hat{\varrho} x)^2 = 2(1)u_x^2 + r\varrho; *) \\ (ru \hat{\sigma} x)^2 = r\sigma + 4(1)s\varrho + 8(12)u_x^2 - 4(1)(su \hat{\varrho} x)^2; \\ (su \hat{\sigma} x)^2 = s\sigma - t\varrho + (tu \hat{\varrho} x)^2; \\ (tu \hat{\sigma} x)^2 = t\sigma + (3)s\varrho - 4(2)t\varrho + 2(14)u_x^2 - (3)(su \hat{\varrho} x)^2 \\ \quad \quad \quad + 4(2)(tu \hat{\varrho} x)^2; \\ (ru \hat{\tau} x)^2 = r\tau + 2t\varrho + (3)u_x^2 - 2(tu \hat{\varrho} x)^2; \\ (su \hat{\tau} x)^2 = s\tau + (4)u_x^2; \\ (tu \hat{\tau} x)^2 = t\tau + 2(4)s\varrho + 4(24)u_x^2 - 2(4)(su \hat{\varrho} x)^2; \end{cases}$$

*) Hierbei bedeutet in bekannter Weise:

$$(ru \hat{\varrho} x)^2 = \begin{vmatrix} r_1 & u_1 & \varrho_2 x_3 - \varrho_3 x_2 \\ r_2 & u_2 & \varrho_3 x_1 - \varrho_1 x_3 \\ r_3 & u_3 & \varrho_1 x_2 - \varrho_2 x_1 \end{vmatrix}^2 \text{ etc.}$$

c) endlich für die simultanen Invarianten je dreier Kegelschnitte:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (\varrho\varrho_1\varrho_2)^2=6(1); \quad (\varrho\varrho_1\sigma)^2=16(12); \quad (\varrho\varrho_1\tau)^2=(3); \\ (\varrho\sigma\sigma_1)^2=32(122)+2(13); \quad (\varrho\sigma\tau)^2=2(23)+6(14); \\ (\varrho\tau\tau_1)^2=8(24); \quad (\sigma\sigma_1\sigma_2)^2=24(123)-24(114); \\ (\sigma\sigma_1\tau)^2=(33)+16(124); \quad (\sigma\tau\tau_1)^2=4(34); \quad (\tau\tau_1\tau_2)^2=12(44); \\ (rr_1r_2)^2=48(11); \quad (rr_1s)^2=16(12); \quad (rr_1t)^2=8(13); \quad (rss_1)^2=(3); \\ (rst)^2=6(14)+2(23); \quad (rtt_1)^2=(33)+16(124); \quad (ss_1s_2)^2=3(4); \\ (ss_1t)^2=8(24); \quad (stt_1)^2=(34)+16(224); \quad (tt_1t_2)^2=12(234)-12(144). \end{array} \right.$$

Indem ich unter x_1, x_2, x_3 , sowie u_1, u_2, u_3 einen Augenblick ganz willkürliche Größen verstehe, fasse ich diese Formeln folgendermassen zusammen:

$$(6a) \left\{ \begin{array}{l} (x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau, \quad x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau, \quad y)^2 \\ = (x_1^2+4(2)x_1x_2+(3)x_2^2+2(4)x_2x_3) r_y^2 \\ + (4(1)x_1x_2+16(12)x_2^2+2(3)x_2x_3+4(4)x_3^2) s_y^2 \\ + (-4(1)x_2^2+2x_1x_3) t_y^2; \end{array} \right.$$

$$(6b) \left\{ \begin{array}{l} (u_1r+u_2s+u_3t, \quad u_1r+u_2s+u_3t, \quad v)^2 \\ = (8(1)u_1^2+2(3)u_1u_2+2(4)u_2u_3+8(24)u_3^2) v_\varrho^2 \\ + (2u_1u_2-2(4)u_3^2) v_\sigma^2 + (u_2^2+4(1)u_1u_3+4(2)u_2u_3+(3)u_3^2) v_\tau^2; \end{array} \right.$$

$$(7a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} (x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau, \quad x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau, \quad x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau)^2 \\ = \left\{ \begin{array}{l} 2(1)x_1^3+16(12)x_1^2x_2+(32(122)+2(13))x_1x_2^2 \\ + (4(23)+12(14))x_1x_2x_3+8(24)x_2x_3^2+(8(123)-8(114))x_2^3 \\ + ((33)+16(124))x_2x_3^2+4(44)x_3^3; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(7b) \left\{ \begin{array}{l} (u_1r+u_2s+u_3t, \quad u_1r+u_2s+u_3t, \quad u_1r+u_2s+u_3t)^2 \\ = \left\{ \begin{array}{l} 16(11)u_1^3+16(12)u_1^2u_2+8(13)u_1^2u_3+(3)u_1u_2^2 \\ + (12(14)+4(23))u_1u_2u_3+((33)+16(124))u_1u_3^2 \\ + (4)u_2^3+8(24)u_2^2u_3+((34)+16(224))u_2u_3^2 \\ + (4(234)-4(144))u_3^3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ich betrachte endlich noch die Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} (\varrho\varrho x)^2 & (\varrho\sigma x)^2 & (\varrho\tau x)^2 \\ (\varrho\sigma x)^2 & (\sigma\sigma x)^2 & (\sigma\tau x)^2 \\ (\varrho\tau x)^2 & (\sigma\tau x)^2 & (\tau\tau x)^2 \end{vmatrix},$$

für die ich folgenden Werth finde:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} r & 2(2)r + 2(1)s & t \\ 2(2)r + 2(1)s & (3)r + 16(12)s - 4(1)t & (4)r + (3)s \\ t & (4)r + (3)s & 4(4)s \end{array} \right| \\ = \left\{ \begin{array}{l} -(44)r^3 + (2(34) - 16(224))r^2s - ((33) - 32(124))rs^2 \\ + (4(23) - 12(14))rst - 16(114)s^3 + 4(24)r^2t \\ + 4(13)s^2t - (3)rt^2 - 16(12)st^2 + 4(1)t^3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Entsprechend kommt:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} (rru)^2 & (rsu)^2 & (rtu)^2 \\ (rsu)^2 & (ssu)^2 & (stu)^2 \\ (rtu)^2 & (stu)^2 & (ttu)^2 \end{array} \right| \\ = \left| \begin{array}{ccc} 8(1)\varrho & \sigma & (3)\varrho + 2(1)\tau \\ \sigma & \tau & (4)\varrho + 2(2)\tau \\ (3)\varrho + 2(1)\tau & (4)\varrho + 2(2)\tau & 8(24)\varrho - 2(4)\sigma + (3)\tau \end{array} \right| \\ = \left\{ \begin{array}{l} -8(144)\varrho^3 + 2(34)\varrho^2\sigma - 8(24)\varrho\sigma^2 + 2(4)\sigma^3 \\ - ((33) - 32(124))\varrho^2\tau + (4(23) - 12(14))\varrho\sigma\tau \\ + (4(13) - 32(122))\varrho\tau^2 - (3)\sigma^2\tau + 8(12)\sigma\tau^2 - 4(11)\tau^3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

§ 3.

Die Determinante D .

Eine besondere Beachtung verdient folgende Determinante:

$$\left| \begin{array}{ccc} r_\varrho^2 & r_\sigma^2 & r_\tau^2 \\ s_\varrho^2 & s_\sigma^2 & s_\tau^2 \\ t_\varrho^2 & t_\sigma^2 & t_\tau^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 6(1) & 16(12) & (3) \\ 2(2) & (3) & 3(4) \\ (3) & 2(23) + 6(14) & 8(24) \end{array} \right|,$$

die sich später als *Tactinvarianten* der beiden Kegelschnitte erweisen wird. Ich will dieselbe mit D und ihre Unterdeterminanten (zur Vermeidung überflüssiger Nenner) mit $D \cdot A_i$, $D \cdot B_i$, $D \cdot \Gamma_i$ bezeichnen, so dass man zuvörderst hat:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} D \cdot A_1 = 2(234) - 18(144), \\ D \cdot A_2 = 3(34) - 16(224), \\ D \cdot A_3 = 4(223) + 12(124) - (33), \\ D \cdot B_1 = 2(233) + 6(134) - 128(1224), \\ D \cdot B_2 = 48(124) - (33), \\ D \cdot B_3 = 2(23) - 18(14), \\ D \cdot \Gamma_1 = 48(124) - (33), \\ D \cdot \Gamma_2 = 2(23) - 18(14), \\ D \cdot \Gamma_3 = 6(13) - 32(122). \end{array} \right.$$

Die Ausrechnung giebt dann:

$$(2) \quad D = 72(1234) - 108(1144) - 256(12224) + 4(2233) - (333);$$

ferner:

$$(3) \quad D \cdot (AB\Gamma) = 1;$$

und endlich, indem wir mit x_1, x_2, x_3 wieder willkürliche Grössen bezeichnen:

$$(4) \quad \begin{aligned} D(B\Gamma x) &= 6(1)x_1 + 16(12)x_2 + (3)x_3, \\ D(\Gamma Ax) &= 2(2)x_1 + (3)x_2 + 3(4)x_3, \\ D(ABx) &= (3)x_1 + (2(23) + 6(14))x_2 + 8(24)x_3. \end{aligned}$$

§ 4.

Formes gauches.

Unter den Formen des Systems (S) befinden sich folgende „formes gauches“:

$$(\varrho, \sigma, x), (\varrho, \tau, x), (\sigma, \tau, x), (r, s, u), (r, t, u), (s, t, u), (r, s, t), (\varrho, \sigma, \tau).$$

Die Quadrate und die Producte je zweier dieser Formen, sowie ihre geraden Ueberschiebungen sind, wie man weiss, ganze Functionen der übrigen Formen. Ich will sie hier nicht alle als solche darstellen, sondern nur an einigen Beispielen zeigen, wie man die Rechnungen anzulegen hat.

Zu dem Zwecke beginne ich mit dem Quadrate von $(\varrho \sigma x)$. Es ist:

$$\begin{aligned} ((\varrho, \sigma, x))^2 &= u_\varrho u_\sigma u_\varrho, u_{\sigma_1} (\varrho \sigma x) (\varrho_1 \sigma_1 x) = uu_\sigma u_{\varrho_1} (\varrho_1 \sigma_1 x) \{u_\sigma (\varrho \sigma_1 x) \\ &\quad - u_\varrho (\sigma \sigma_1 x) + u_x (\varrho \sigma \sigma_1)\}, \\ &= \sigma \{ \varrho \cdot (\varrho \sigma x)^2 - \frac{1}{2} (u_\sigma (\varrho \varrho_1 x) - u_x (\varrho \varrho_1 \sigma)) \}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} u_\varrho u_{\varrho_1} (u_{\varrho_1} (\sigma \sigma_1 x) - u_x (\sigma \sigma_1 \varrho_1)) (u_\varrho (\sigma \sigma_1 x) - u_x (\sigma \sigma_1 \varrho)), \\ &= \sigma \varrho (\varrho \sigma x)^2 - \frac{\sigma}{2} (ru \widehat{\sigma x})^2 - \frac{1}{2} \varrho (\widehat{\sigma \sigma_1} u \widehat{\varrho x})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \{u_\varrho (u_{\varrho_1} (\sigma \sigma_1 x) - u_x (\sigma \sigma_1 \varrho_1)) - u_{\varrho_1} (u_\varrho (\sigma \sigma_1 x) - u_x (\sigma \sigma_1 \varrho))\}^2, \\ &= \sigma \varrho (\varrho \sigma x)^2 - \frac{\sigma}{2} (ru \widehat{\sigma x})^2 - \frac{1}{2} \varrho (\widehat{\sigma \sigma_1} u \widehat{\varrho x})^2 + \frac{1}{4} u_x^2 (\widehat{\sigma \sigma_1} r u)^2. \end{aligned}$$

Analog kommt:

$$\begin{aligned} ((\tau, \varrho, x))^2 &= \varrho \tau \cdot (\tau \varrho x)^2 - \frac{\tau}{2} (ru \widehat{\tau x})^2 - \frac{1}{2} \varrho (\widehat{\tau \tau_1} u \widehat{\varrho x})^2 + \frac{1}{4} u_x^2 (\widehat{\tau \tau_1} r u)^2, \\ ((\sigma, \tau, x))^2 &= \sigma \tau \cdot (\sigma \tau x)^2 - \frac{\tau}{2} (\widehat{\sigma \sigma_1} u \widehat{\tau x})^2 - \frac{1}{2} \sigma (\widehat{\tau \tau_1} u \widehat{\sigma x})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} u_x^2 (\widehat{\tau \tau_1} \widehat{\sigma \sigma_1} u)^2. \end{aligned}$$

Hier sind nun noch rechter Hand die Werthe aus § 2. einzutragen.

Natürlich steht nichts im Wege, in ähnlicher Weise Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen zu behandeln. Ich wähle beispielsweise das Product:

$$u_{\varrho} u_{\tau}(\varrho \tau x) \cdot v_{\varrho} v_{\tau}(\varrho \tau x).$$

Die betreffende Rechnung verläuft folgendermassen:

$$\begin{aligned} u_{\varrho} v_{\varrho_i} u_{\tau} v_{\tau_i}(\varrho \tau x)(\varrho_i \tau_i x) &= v_{\varrho_i} u_{\tau} v_{\tau_i}(\varrho \tau x) \{ u_{\varrho_i}(\varrho \tau_i x) - u_{\tau_i}(\varrho \varrho_i x) + u_x(\varrho \varrho_i \tau_i) \}, \\ &= u_{\varrho_i} v_{\varrho_i} v_{\tau_i}(\varrho \tau x) \{ u_{\tau_i}(\varrho \tau x) + u_{\varrho}(\tau \tau_i x) - u_x(\varrho \tau \tau_i) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} u_{\tau} v_{\tau_i}(ru \tau_i \hat{x})(rv \tau \hat{x}), \\ &= \frac{t}{2} (\varrho v_{\tau}^2 + \tau v_{\varrho}^2 - (tuv)^2) - 2(4) u_{\varrho_i} v_{\varrho_i}(su \varrho \hat{x})(sv \varrho \hat{x}) \\ &\quad - \frac{1}{2} v_{\tau_i}(rv \tau \hat{x})(u_{\tau_i}(ru \tau \hat{x}) - u_x(ru \tau \tau_i)), \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{t}{2} (\varrho v_{\tau}^2 + \tau v_{\varrho}^2 - (tuv)^2) - (4) \varrho (sv \varrho \hat{x})^2 \\ &\quad - (4) v_{\varrho}^2 (su \varrho \hat{x})^2 + (4) (s_{\varrho_i}(uv \varrho \hat{x}) + (su v)(\varrho \varrho_i x))^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \tau (rv \tau \hat{x})^2 - \frac{1}{4} v_{\tau}^2 (ru \tau \hat{x})^2 + \frac{1}{4} (r_{\tau_i}(uv \tau \hat{x}) + (ru v)(\tau \tau_i x))^2 \\ &\quad + (4) u_x v_x u_{\sigma} v_{\sigma}, \end{aligned} \right. \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{t}{2} (\varrho v_{\tau}^2 + \tau v_{\varrho}^2 - (tuv)^2) - (4) (\varrho (sv \tau \hat{x})^2 + v_{\varrho}^2 (su \varrho \hat{x})^2) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\tau (rv \tau \hat{x})^2 + v_{\tau}^2 (ru \tau \hat{x})^2) + 2(24) (uv \varrho \hat{x})^2 + (4) r_x s_x (ru v)(su v) \\ &\quad + \frac{1}{4} (3) (uv \tau \hat{x})^2 + (4) r_x s_x (ru v)(su v) + \frac{1}{2} (4) \sigma v_x^2 + \frac{1}{2} (4) v_{\sigma}^2 u_x^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (4) (uv \sigma \hat{x}), \end{aligned} \right. \\ &= \left\{ \begin{aligned} &(4) (r(suv)^2 + s(ruv)^2) + \frac{1}{2} t(\varrho v_{\tau}^2 + \tau v_{\varrho}^2 - (tuv)^2) \\ &\quad - (4) (\varrho (sv \varrho \hat{x})^2 + v_{\varrho}^2 (su \varrho \hat{x})^2) - \frac{1}{4} (\tau (rv \tau \hat{x})^2 + v_{\tau}^2 (ru \tau \hat{x})^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (4) (\sigma v_x^2 + v_{\sigma}^2 u_x^2) + 2(24) (uv \varrho \hat{x})^2 - \frac{3}{2} (4) (uv \sigma \hat{x})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (3) (uv \tau \hat{x})^2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

§ 5.

Die Formen l , m , n , U .

Es kommt mir nun noch darauf an, die in § 2. eingeführte Determinante H genauer zu untersuchen und insbesondere nachzuweisen,

dass sich die Quadrate und Producte unserer drei Kegelschnitte r, s, t aus den Unterdeterminanten von H linear zusammensetzen. Es hat dies zu geometrischer Folge, dass die sechsfach unendlich vielen zerfallenden Curven vierter Ordnung, welche durch die vier gemeinsamen Tangenten von irgend zwei Kegelschnitten der Schaar

$$\lambda r + \mu s + \tau t$$

gebildet werden, linear unabhängig sind: denn die Gleichungen dieser Curven vierter Ordnung sind geradezu durch lineare Verbindungen jener Unterdeterminanten gegeben. Um die etwas lange Rechnung in einzelne Schritte zu zerlegen, bringe ich im gegenwärtigen Paragraphen nur erst Hilfsbetrachtungen, die der Theorie der ternären cubischen Formen entnommen sind.

Unter x_1, x_2, x_3 abermals willkürliche Grössen verstanden, setze man

$$(1) \quad (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau) = U = U_x^3,$$

wo also:

$$\begin{aligned} U_1 &= (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad \varrho)^2, \\ (2) \quad U_2 &= (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad \sigma)^2, \\ U_3 &= (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad \tau)^2. \end{aligned}$$

Nun ist nach § 4. Formel (6a):

$$\begin{aligned} & (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \quad y)^2 \\ &= (x_1^2 + 4(2)x_1x_2 + (3)x_2^2 + 2(4)x_2x_3)r_y^2 \\ (3) \quad &+ (4(1)x_1x_2 + 16(12)x_2^2 + 2(3)x_2x_3 + 4(4)x_3^2)s_y^2 \\ &+ (-4(1)x_2^2 + 2x_1x_3)t_y^2 \\ &= l_x^2 r_y^2 + m_x^2 s_y^2 + n_x^2 t_y^2, \end{aligned}$$

wo die l, m, n die Formen bedeuten:

$$\begin{aligned} l &= x_1^2 + 4(2)x_1x_2 + (3)x_2^2 + 2(4)x_2x_3, \\ (4) \quad m &= 4(1)x_1x_2 + 16(12)x_2^2 + 2(3)x_2x_3 + 4(4)x_3^2, \\ n &= -4(1)x_2^2 + 2x_1x_3. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der Formel (3) die y der Reihe nach durch ϱ, σ, τ , so wird (Formel (2)):

$$\begin{aligned} U_1 &= 6(1)l + 2(2)m + (3)n, \\ U_2 &= 16(12)l + (3)m + (2(23) + 6(14))n, \\ U_3 &= (3)l + 3(4)m + 8(24)n, \end{aligned}$$

und wenn wir diese Gleichungen nach l, m, n auflösen und gleichzeitig von der Bezeichnung des § 3. Gebrauch machen:

$$(5) \quad l = U_A, \quad m = U_B, \quad n = U_I.$$

Da sonach l, m, n Polaren von U sind, bestehen zwischen ihnen viele Relationen, von denen ich hier nur diejenigen ableite, die ich im folgenden Paragraphen benöthige. Ich benutze dabei der Kürze halber die bekannte von Aronhold gegebene Formel:

$$6 U_x'' U_x''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u)^2 \\ = u_x^2 (U U_1 U_2) (U U_1 U_3) (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) = T u_x^2.$$

Man hat zunächst:

$$\begin{aligned} 12 U_A'' U_A''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u) U_B U_I & \\ = 12 (m n u) (m l l_1) (n l l_1) & = T u_A (AB\Gamma), \\ 12 U_B'' U_B''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u) U_B U_I & \\ = 12 (m n u) (m m_1 m_2) (n m_1 m_2) & = 0, \\ 12 U_I'' U_I''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u) U_B U_I & \\ = 12 (m n u) (m n_1 n_2) (n n_1 n_2) & = 0, \\ 12 U_B'' U_I''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u) U_B U_I & \\ = 12 (m n u) (m m_1 n_1) (m m_1 n_1) & = 0, \\ 12 U_I'' U_A''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u) U_B U_I & \\ = 12 (m n u) (m n_1 l) (n n_1 l) & = \frac{T}{2} u_I (AB\Gamma), \\ 12 U_A'' U_B''' (U U_2 U_3) (U_1 U_2 U_3) (U U_1 u) U_B U_I & \\ = 12 (m n u) (m l m_1) (n l m_1) & = \frac{T}{2} u_B (AB\Gamma), \end{aligned}$$

und berechnet hiernach für die zweiten Ueberschiebungen der in den x quadratischen Form:

$$(6) \quad (m n u) = \begin{cases} u_1 (2(1)x_1^2 + 4(13)x_2^2 + 16(14)x_2 x_3 + (3)x_1 x_3 + 16(12)x_1 x_2) \\ + u_2 (4(4)x_3^2 + (3)x_2 x_3 - 2(1)x_1 x_2) \\ + u_3 (-8(11)x_2^2 - (3)x_3^2 - 16(12)x_2 x_3 - 2(1)x_1 x_3) \end{cases}$$

mit den in den u quadratischen Formen:

$$(I) \quad (ll_1 u)^2, \quad (mm_1 u)^2, \quad (nn_1 u)^2, \quad (m n u)^2, \quad (n l u)^2, \quad (l m u)^2$$

die folgenden Werthe:

$$(7) \quad \frac{T}{12D} u_A, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T}{24D} u_I, \quad \frac{T}{24D} u_B.$$

Genau ebenso berechnet man natürlich die zweiten Ueberschiebungen der Formen (I) mit den folgenden beiden in den x quadratischen Formen:

$$\begin{aligned}
 (6a) \quad (n, l, u) &= \begin{cases} u_1(-2(2)x_1^2 - 4(14)x_2^2 - (4)x_1x_3 - (3)x_1x_2) \\ + u_2(x_1^2 - (4)x_2x_3 + 2(2)x_1x_2) \\ + u_3(8(12)x_2^2 + (4)x_3^2 + (3)x_2x_3 + 2(2)x_1x_3 + 4(1)x_1x_2), \end{cases} \\
 (6b) \quad (l, m, u) &= \begin{cases} u_1((33) - 16(124))x_2^2 + 4(44)x_3^2 + 4(34)x_2x_3 + 8(24)x_1x_3 \\ + (2(23) - 2(14)x_1x_2) \\ + u_2((2(14) - 2(23))x_2^2 - 8(24)x_2x_3 - 4(4)x_1x_3 - (3)x_1x_2) \\ + u_3(2(1)x_1^2 + (32(122) - 2(13))x_2^2 + (2(23) - 2(14))x_2x_3 \\ + (3)x_1x_3 + 16(12)x_1x_2). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die resultirenden Werthe sind:

$$\begin{aligned}
 (7a) \quad & 0, \quad \frac{T}{12D} u_B, \quad 0, \quad \frac{T}{24D} u_I, \quad 0, \quad \frac{T}{24D} u_A; \\
 & 0, \quad 0, \quad \frac{T}{12D} u_I, \quad \frac{T}{24D} u_B, \quad \frac{T}{24D} u_A, \quad 0.
 \end{aligned}$$

Wir berechnen endlich vermöge der Formel

$$(lm u)(ln n_1)(mn n_1) = \frac{T}{12D} u_I$$

die in (7) und (7a) noch unbekannte Invariante T . Es ist:

$$n = -4(1)x_2^2 + 2x_1x_3,$$

also:

$$(nn u)^2 = -2u_2^2 + 16(1)u_2u_3,$$

und nach der 3. der Formeln (6):

$$\begin{aligned}
 & (lm u)(ln n_1)(mn n_1) \\
 &= u_1(-2((33) - 16(124)) + 64(124)) + u_2(-2(2(14) - 2(23)) - 32(14)) \\
 & \quad + u_3(-2(32(122) - 2(13)) + 8(13)) \\
 &= u_1(96(124) - 2(33)) + u_2(4(23) - 36(14)) \\
 & \quad + u_3(12(13) - 64(122)) = 2Du_I;
 \end{aligned}$$

somit:

$$\frac{T}{12D} u_I = 2Du_I,$$

oder:

$$(8) \quad T = 24D^2.$$

§ 6.

Die Determinante H .

Ich werde nun die Quadrate und Producte je zweier der Formen r, s, t , also die Ausdrücke

$$(I) \quad r^2, s^2, t^2, rs, rt, st$$

geradezu als lineare Functionen der Unterdeterminanten H_{ik} der Determinante

$$H = \begin{vmatrix} (\varrho \varrho x)^2 & (\varrho \sigma x)^2 & (\varrho \tau x)^2 \\ (\varrho \sigma x)^2 & (\sigma \sigma x)^2 & (\sigma \tau x)^2 \\ (\varrho \tau x)^2 & (\sigma \tau x)^2 & (\tau \tau x)^2 \end{vmatrix}$$

hinschreiben. Hierzu dienen uns die Formeln (7) des vorigen Paragraphen. Wir haben dem Früheren zufolge (vgl. § 4. Formel 6a): $(y_1 \varrho + y_2 \sigma + y_3 \tau, y_1 \varrho + y_2 \sigma + y_3 \tau, x)^2 = g_y^2 = r l_y^2 + s m_y^2 + t n_y^2$ und

$$2u_H^2 = (g g u)^2,$$

somit:

$$u_H^2 = \frac{1}{2} \{ r^2 (l l u)^2 + s^2 (m m u)^2 + t^2 (n n u)^2 + 2st(m n u)^2 + 2rt(n l u)^2 + 2rs(l m u)^2 \}.$$

Diese Formel combiniren wir nun durch zweimalige Ueberschiebung mit den im vorigen Paragraphen betrachteten in den x quadratischen Formen:

$$(m, n, u), (n, l, u), (l, m, u).$$

So kommt:

$$2m_H n_H (m n u) = 2Dr(r u_A + s u_B + t u_I),$$

$$2n_H l_H (n l u) = 2Ds(r u_A + s u_B + t u_I),$$

$$2l_H m_H (l m u) = 2Dt(r u_A + s u_B + t u_I).$$

Die gesuchten Formeln sind daher:

$$\begin{array}{l} r^2 = m_H n_H (m n \hat{B} \Gamma), \quad \left| \begin{array}{l} rs = n_H l_H (n l \hat{B} \Gamma), \\ rt = l_H m_H (l m \hat{B} \Gamma), \end{array} \right. \\ rs = m_H n_H (m n \hat{\Gamma} A), \quad \left| \begin{array}{l} s^2 = n_H l_H (n l \hat{\Gamma} A), \\ st = l_H m_H (l m \hat{\Gamma} A), \end{array} \right. \\ rt = m_H n_H (m n \hat{A} B), \quad \left| \begin{array}{l} st = n_H l_H (n l \hat{A} B), \\ t^2 = l_H m_H (l m \hat{A} B). \end{array} \right. \end{array}$$

Ich will dieselben der Rechnung noch zugänglicher machen, indem ich vermöge der Formeln

$$P_{i1} = m_H n_H (m n)_i, \quad P_{i2} = n_H l_H (n l)_i, \quad P_{i3} = l_H m_H (l m)_i$$

gewisse Hülfsgrößen P_{ik} einführe. Man hat dann aus Formel (6) des § 5. zur Berechnung der P_{ik} :

$$\begin{aligned}
P_{11} &= 2(1)H_{11} + 4(13)H_{22} + 16(14)H_{23} + (3)H_{13} + 16(12)H_{12}, \\
P_{21} &= 4(4)H_{33} + (3)H_{23} - 2(1)H_{13}, \\
P_{31} &= -8(11)H_{22} - (3)H_{33} - 16(12)H_{23} - 2(1)H_{12}, \\
P_{12} &= -2(2)H_{11} - 4(14)H_{22} - (4)H_{13} - (3)H_{12}, \\
P_{22} &= H_{11} - (4)H_{23} + 2(2)H_{12}, \\
P_{32} &= 8(12)H_{22} + (4)H_{33} + (3)H_{23} + 2(2)H_{13} + 4(1)H_{12}, \\
(1) \quad P_{13} &= ((33) - 16(124))H_{22} + 4(44)H_{33} + 4(34)H_{23} + 8(24)H_{13} \\
&\quad + (2(23) - 2(14))H_{12}, \\
P_{23} &= (2(14) - 2(23))H_{22} - 8(24)H_{23} - 4(4)H_{13} - (3)H_{12}, \\
P_{33} &= 2(1)H_{11} + (32(122) - 2(13))H_{22} + (2(23) - 2(14))H_{23} \\
&\quad + (3)H_{13} + 16(12)H_{12},
\end{aligned}$$

und hieraus die gesuchten Werthe (vgl. § 3., Formel 4):

$$\begin{aligned}
Dr^2 &= 6(1)P_{11} + 16(12)P_{21} + (3)P_{31}; \\
Ds^2 &= 2(2)P_{12} + (3)P_{22} + 3(4)P_{32}; \\
Dt^2 &= (3)P_{13} + (2(23) + 6(14))P_{23} + 8(24)P_{33}; \\
(2) \quad Drs &= 2(2)P_{11} + (3)P_{21} + 3(4)P_{31} = 6(1)P_{12} + 16(12)P_{22} + (3)P_{32}; \\
Drt &= (3)P_{11} + (2(23) + 6(14))P_{21} + 8(24)P_{31} \\
&\quad = 6(1)P_{13} + 16(12)P_{23} + (3)P_{33}; \\
Dst &= (3)P_{12} + (2(23) + 6(14))P_{22} + 8(24)P_{32} \\
&\quad = 2(2)P_{13} + (3)P_{23} + 3(4)P_{33}.
\end{aligned}$$

Abschnitt II. Irrationale Typik.

§ 7.

Einleitung.

In den folgenden Paragraphen handelt es sich einmal um eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen der irrationalen Typik, sodann um eine Vervollständigung der Entwicklungen des ersten, hier vorangehenden Abschnitts. Einmal nämlich gebe ich explicite Formeln, um die hauptsächlichen Formen des Systems (S) durch die Ecken, bez. die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks auszudrücken. Sodann aber benutze ich die so gewonnenen Resultate, um die Quadrate der Functionaldeterminanten (r, s, t) und (ϱ, σ, τ), was oben noch nicht geschehen war, durch die geraden Formen des Systems auszudrücken.

Die Einführung des Polardreiecks geschehe in der Weise, dass man die Determinante

$$(r + \lambda s, r + \lambda s, r + \lambda s)^2$$

gleich Null setzt und die so entstehende cubische Gleichung

$$(1) \quad (4)\lambda^3 + (3)\lambda^2 + 16(12)\lambda + 16(11) = 0$$

auflöst. Ihre Wurzeln mögen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genannt werden.

Constatiren wir vor allen Dingen, dass die Discriminante:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 & \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 & \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 & \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 \end{vmatrix} \\ = \{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)\}^2$$

in den Coefficienten von (1) berechnet gleich $\frac{64(11)^3}{(1)^4} \cdot D$ wird. Hierin liegt der Beweis für die schon oben ausgesprochene Behauptung, dass D die Tactinvariante des Kegelschnittbüschels ist (vergl. Clebsch-Lindemann pag. 298).

§ 8.

Die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks.

Die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks, ξ, η, ζ , sind die Doppelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte $r + \lambda s$. Man hat daher als Definition von u_ξ, u_η, u_ζ die folgenden Formeln:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_\xi^2 &= 8(1)\varrho + 2\lambda_1\sigma + \lambda_1^2\tau, \\ u_\eta^2 &= 8(1)\varrho + 2\lambda_2\sigma + \lambda_2^2\tau, \\ u_\zeta^2 &= 8(1)\varrho + 2\lambda_3\sigma + \lambda_3^2\tau. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt durch directe Auflösung:

$$(2) \quad \begin{cases} 8(1)\Delta\varrho = (\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2)u_\xi^2 + (\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2)u_\eta^2 + (\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2)u_\zeta^2, \\ 2\Delta\sigma = (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)u_\xi^2 + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)u_\eta^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)u_\zeta^2, \\ \Delta\tau = (\lambda_3 - \lambda_2)u_\xi^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)u_\eta^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)u_\zeta^2, \end{cases}$$

sowie des Ferneren:

$$(3) \quad \begin{cases} 2\Delta(\sigma, \tau, x) = u_\eta u_\zeta(\eta\xi x) + u_\zeta u_\xi(\xi\xi x) + u_\xi u_\eta(\xi\eta x), \\ 8(1)\Delta(\tau, \varrho, x) = \lambda_1 u_\eta u_\zeta(\eta\xi x) + \lambda_2 u_\zeta u_\xi(\xi\xi x) + \lambda_3 u_\xi u_\eta(\xi\eta x), \\ 16(1)\Delta(\varrho, \sigma, x) = \lambda_1^2 u_\eta u_\zeta(\eta\xi x) + \lambda_2^2 u_\zeta u_\xi(\xi\xi x) + \lambda_3^2 u_\xi u_\eta(\xi\eta x). \end{cases}$$

Aus der dritten der Formeln (2) ergibt sich noch:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta^3(\tau\tau\tau)^2 &= 6\Delta(\xi\eta\xi)^2, \quad \text{also} \quad (\xi\eta\xi)^2 = \Delta^2 \cdot 12(44), \\ (\xi\eta\xi) &= \sqrt{12(4)}\Delta, \end{aligned}$$

sodann aus Formel (1):

$$u_{\xi} u_{\eta} u_{\tau} (\xi \eta \xi) = 16(1) \Delta(\varrho, \sigma, \tau),$$

also:

$$(5) \quad (\varrho, \sigma, \tau) = \frac{\sqrt{12}(4)}{16(1)} u_{\xi} u_{\eta} u_{\tau}.$$

§ 9.

Die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks.

Um die r, s, t durch die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks auszudrücken, führe ich drei neue Formen R, S, T mittelst der Gleichungen ein:

$$(1) \quad \begin{aligned} r &= r_{\varrho}^2 R + r_{\sigma}^2 S + r_{\tau}^2 T, \\ s &= s_{\varrho}^2 R + s_{\sigma}^2 S + s_{\tau}^2 T, \\ t &= t_{\varrho}^2 R + t_{\sigma}^2 S + t_{\tau}^2 T. \end{aligned}$$

Ihre zweiten Ueberschiebungen mit $\varrho, \sigma, \tau, u_{\xi}^2, u_{\eta}^2, u_{\tau}^2$ haben die Werthe:

$$(2) \quad \begin{aligned} R_{\varrho}^2 &= 1; R_{\sigma}^2 = 0; R_{\tau}^2 = 0; R_{\xi}^2 = 8(1); R_{\eta}^2 = 8(1); R_{\tau}^2 = 8(1); \\ S_{\varrho}^2 &= 0; S_{\sigma}^2 = 1; S_{\tau}^2 = 0; S_{\xi}^2 = 2\lambda_1; S_{\eta}^2 = 2\lambda_2; S_{\tau}^2 = 2\lambda_3; \\ T_{\varrho}^2 &= 0; T_{\sigma}^2 = 0; T_{\tau}^2 = 1; T_{\xi}^2 = \lambda_1^2; T_{\eta}^2 = \lambda_2^2; T_{\tau}^2 = \lambda_3^2. \end{aligned}$$

Man hat daher unmittelbar:

$$(3) \quad \begin{cases} (\xi \eta \xi)^2 R = 8(1) \{ (\eta \xi x)^2 + (\xi \xi x)^2 + (\xi \eta x)^2 \}, \\ (\xi \eta \xi)^2 S = 2 \{ \lambda_1 (\eta \xi x)^2 + \lambda_2 (\xi \xi x)^2 + \lambda_3 (\xi \eta x)^2 \}, \\ (\xi \eta \xi)^2 T = \{ \lambda_1^2 (\eta \xi x)^2 + \lambda_2^2 (\xi \xi x)^2 + \lambda_3^2 (\xi \eta x)^2 \}. \end{cases}$$

Des Weiteren erhält man den Formeln (3) des vorigen Paragraphen entsprechend:

$$(4) \quad \begin{cases} (\xi \eta \xi)^3 (S, T, u) = 2 \{ (\lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_2^2) (\xi \xi x) (\xi \eta x) u_{\xi} \\ \quad + (\lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3^2) (\xi \eta x) (\eta \xi x) u_{\eta} + (\lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1^2) (\eta \xi x) (\xi \xi x) u_{\tau} \}, \\ (\xi \eta \xi)^3 (T, R, u) = 8(1) \{ (\lambda_2^2 - \lambda_3^2 (\xi \xi x)) (\xi \eta x) u_{\xi} + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) (\xi \eta x) (\eta \xi x) u_{\eta} \\ \quad + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\eta \xi x) (\xi \xi x) u_{\tau} \}, \\ (\xi \eta \xi)^3 (R, S, u) = 16(1) \{ (\lambda_3 - \lambda_2) (\xi \xi x) (\xi \eta x) u_{\xi} + (\lambda_1 - \lambda_3) (\xi \eta x) (\eta \xi x) u_{\eta} \\ \quad + (\lambda_2 - \lambda_1) (\eta \xi x) (\xi \xi x) u_{\tau} \}, \end{cases}$$

endlich für die Determinanten:

$$(5) \quad \begin{aligned} (\xi \eta \xi) (R, S, T) &= 16(1) \Delta \cdot (\eta \xi x) (\xi \xi x) (\xi \eta x), \\ (R, S, T) &= \frac{4(1)}{\Delta^3(4)} (\eta \xi x) (\xi \xi x) (\xi \eta x), \end{aligned}$$

und:

$$(rst) = D(RST) = \frac{1}{16(1) \Delta} \cdot (\eta \xi x) (\xi \xi x) (\xi \eta x).$$

§ 10.

Ueber die Quadrate der Functionaldeterminanten

$$(r, s, t), (\varrho, \sigma, \tau).$$

Um die Quadrate von (r, s, t) , bez. (ϱ, σ, τ) zu berechnen, beweise ich vermöge der nunmehr entwickelten Formeln deren Identität mit den am Schlusse des § 2. betrachteten Determinanten. In der That hat man:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} (rru)^2 & (rsu)^2 & (rtu)^2 \\ (rsu)^2 & (ssu)^2 & (stn)^2 \\ (rtu)^2 & (stn)^2 & (ttu)^2 \end{vmatrix} = D^2 \begin{vmatrix} (RRn)^2 & (RSn)^2 & (RTn)^2 \\ (RSn)^2 & (SSn)^2 & (STn)^2 \\ (RTn)^2 & (STn)^2 & (TTn)^2 \end{vmatrix} \\ & \frac{D^2 \cdot 256 \Delta^2 (11)}{(\xi \eta \xi)^{12}} \begin{vmatrix} (\widehat{\eta \xi} \widehat{\eta \xi} n)^2 & (\widehat{\eta \xi} \widehat{\xi \xi} n)^2 & (\widehat{\eta \xi} \widehat{\xi \eta} u)^2 \\ (\widehat{\eta \xi} \widehat{\xi \xi} n)^2 & (\widehat{\xi \xi} \widehat{\xi \xi} u)^2 & (\widehat{\xi \xi} \widehat{\xi \eta} u)^2 \\ (\widehat{\eta \xi} \widehat{\xi \eta} u)^2 & (\widehat{\xi \xi} \widehat{\xi \eta} u)^2 & (\widehat{\xi \eta} \widehat{\xi \eta} u)^2 \end{vmatrix} = D^2 \cdot 256 \Delta^2 (11) \begin{vmatrix} 0 & u \zeta^2 & u \eta^2 \\ u \zeta^2 & 0 & u \xi^2 \\ u \eta^2 & u \xi^2 & 0 \end{vmatrix} \\ & = \frac{512(11) D^2 \Delta^2}{(\xi \eta \xi)^6} u \zeta^2 u \eta^2 u \xi^2 = \frac{512(11) D^2 \Delta^2}{(\xi \eta \xi)^6} \frac{128(11)}{(44)} ((\varrho \sigma \tau))^2 \\ & = \frac{512 \cdot 128(1)^4 D^2 \Delta^2}{(4)^5 \cdot 8 \Delta^6} ((\varrho \sigma \tau))^2 = \frac{64 \cdot 128(1)^4}{(4)^5 \cdot \Delta^4} \cdot \frac{(4)^8}{64^2(1)^4} \Delta^4 ((\varrho \sigma \tau))^2 = 2((\varrho, \sigma, \tau))^2, \end{aligned}$$

und ganz ähnlich:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} (\varrho \varrho x)^2 & (\varrho \sigma x)^2 & (\varrho \tau x)^2 \\ (\varrho \sigma x)^2 & (\sigma \sigma x)^2 & (\sigma \tau x)^2 \\ (\varrho \tau x)^2 & (\sigma \tau x)^2 & (\tau \tau x)^2 \end{vmatrix} \cdot 256(11) \Delta^2 = \begin{vmatrix} (\xi \xi x)^2 & (\xi \eta x)^2 & (\xi \xi x)^2 \\ (\xi \eta x)^2 & (\eta \eta x)^2 & (\eta \xi x)^2 \\ (\xi \xi x)^2 & (\eta \xi x)^2 & (\xi \xi x)^2 \end{vmatrix} \\ & = 2(\eta \xi x)^2 (\xi \xi x)^2 (\xi \eta x)^2 = 512(11) \Delta^2 ((r, s, t))^2. \end{aligned}$$

Wir haben also unmittelbar nach § 2.:

$$\begin{aligned} 2((r, s, t))^2 &= \begin{cases} -(44)r^3 + (2(34) - 16(224))r^2s - ((33) - 32(124))rs^2 \\ \quad + (4(23) - 12(14))rst \\ -16(114)s^3 + 4(24)r^2t + 4(3)s^2t - (3)rt^2 - 16(12)st^2 \\ \quad + 4(1)t^3, \end{cases} \\ 2((\varrho, \sigma, \tau))^2 &= \begin{cases} -8(144)\varrho^3 + 2(34)\varrho\sigma^2 + 2(4)\sigma^3 - ((33) - 32(124))\varrho^2\tau \\ \quad + (4(23) - 12(14))\varrho\sigma\tau \\ \quad + (4(13) - 32(122))\varrho\tau^2 - (3)\sigma^2\tau + 8(12)\sigma\tau^2 - 4(11)\tau^3. \end{cases} \end{aligned}$$

Abschnitt III. Rationale Typik.

§ 11.

Typische Darstellung von zwei Kegelschnitten und einer beliebigen geraden Linie.

Wir adjungiren nunmehr den beiden Kegelschnitten ϱ und s eine beliebige gerade Linie ω_x , und wollen diese drei Gebilde in der Weise typisch darstellen, dass wir als Ecken des Coordinatendreiecks die Pole von ω_x in Bezug auf ϱ , σ , τ wählen. Man hat dann:

$$(1) \quad \omega_\varrho u_\varrho = u_1, \quad \omega_\sigma u_\sigma = u_2, \quad \omega_\tau u_\tau = u_3$$

und es erscheinen hiernach die Coefficienten ω_1 , ω_2 , ω_3 der angenommenen Geraden unmittelbar als die Invarianten

$$(2) \quad \omega_1 = \omega_\varrho^2, \quad \omega_2 = \omega_\sigma^2, \quad \omega_3 = \omega_\tau^2.$$

Es handelt sich jetzt darum, die drei Kegelschnitte r , s , t in der Weise darzustellen, dass möglichst *niedere* simultane Bildungen von ϱ , s , ω bei der Darstellung benutzt werden. Zu dem Zwecke gehe ich von den Formeln (6) des § 2., bez. den Formeln (3) des § 5. aus. Es ist denselben zufolge:

$$(x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, y)^2 = l r_y^2 + m s_y^2 + n t_y^2,$$

also:

$$\begin{aligned} l(r u \omega)^2 + m(s u \omega)^2 + n(t u \omega)^2 &= (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau, \widehat{u \omega})^2 \\ &= 2(x_1 u_\varrho^2 + x_2 u_\sigma^2 + x_3 u_\tau^2)(x_1 \omega_\varrho^2 + x_2 \omega_\sigma^2 + x_3 \omega_\tau^2) \\ &\quad - 2(x_1 u_\varrho \omega_\varrho + x_2 u_\sigma \omega_\sigma + x_3 u_\tau \omega_\tau)^2 \\ &= 2(x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau) \omega_x - 2 u_x^2, \end{aligned}$$

oder:

$$(3) \quad u_x^2 = \omega_x (x_1 \varrho + x_2 \sigma + x_3 \tau) - \frac{1}{2} (l(r u \omega)^2 + m(s u \omega)^2 + n(t u \omega)^2).$$

Hier braucht man die u nun nur durch die Symbole von r , s , t zu ersetzen. So kommt:

$$\begin{aligned} r &= \omega_x (x_1 r_\varrho^2 + x_2 r_\sigma^2 + x_3 r_\tau^2) - \frac{1}{2} (l(r r \omega)^2 + m(r s \omega)^2 + n(r t \omega)^2), \\ s &= \omega_x (x_1 s_\varrho^2 + x_2 s_\sigma^2 + x_3 s_\tau^2) - \frac{1}{2} (l(r s \omega)^2 + m(s s \omega)^2 + n(s t \omega)^2), \\ t &= \omega_x (x_1 t_\varrho^2 + x_2 t_\sigma^2 + x_3 t_\tau^2) - \frac{1}{2} (l(r t \omega)^2 + m(s t \omega)^2 + n(t t \omega)^2) \end{aligned}$$

und hieraus nach den Formeln des § 1. das definitive Resultat:

$$\begin{aligned}
 r &= \omega_x (6(1)x_1 + 16(12)x_2 + (3)x_3) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(8(1)\omega_1 l + \omega_2 m + ((3)\omega_1 + 2(1)\omega_3)n \right), \\
 s &= \omega_x (2(2)x_1 + (3)x_2 + 3(4)x_3) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\omega_2 l + \omega_3 m + ((4)\omega_1 + 2(2)\omega_2)n \right), \\
 t &= \omega_x ((3)x_1 + (2(23) + 6(14))x_2 + 8(24)x_3) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(((3)\omega_1 + 2(1)\omega_3)l + ((4)\omega_1 + 2(2)\omega_2)m \right. \\
 &\quad \left. + (8(24)\omega_1 - 2(4)\omega_2 + (3)\omega_3)n \right).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Ersetzt man in Formel (3) die u durch die Symbole a eines beliebigen weiteren Kegelschnittes a_r^2 , so erhält man die Formel

$$\begin{aligned}
 (4a) \quad a_x^2 &= \omega_x (x_1 a_\sigma^2 + x_2 a_\sigma^2 + x_3 a_\tau^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (l(a r \omega)^2 + m(a s \omega)^2 + n(a t \omega)^2).
 \end{aligned}$$

Hier treten rechter Hand im Ganzen 13 Invarianten auf:

$$(5) \quad (1), (2), (3), (4), \omega_1, \omega_2, \omega_3, a_\sigma^2, a_\sigma^2, a_\tau^2, (a r \omega)^2, (a s \omega)^2, (a t \omega)^2.$$

Es ist dies genau die richtige Zahl. Denn drei beliebige Kegelschnitte bringen $3 \cdot 6 = 18$ Constante mit sich, denen sich sodann noch die 3 Constante der geraden Linie ω zugesellen, während 8 Constante wegen der linearen Transformationen der Ebene in Abzug zu bringen sind. Die 13 Invarianten (5) sind daher von einander unabhängig.

§ 12.

Typische Darstellung einer Curve vierter Ordnung durch Kegelschnittbüschel und gerade Linie.

Wir wollen nunmehr eine beliebige Curve vierter Ordnung a_r^4 auf das Coordinatensystem des vorigen Paragraphen beziehen. Aus der Formel (3) daselbst ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}
 a_x^2 a_\sigma^2 &= \omega_x (x_1 a_\sigma^2 a_\sigma^2 + x_2 a_\sigma^2 a_\sigma^2 + x_3 a_\sigma^2 a_\tau^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (l a_\sigma^2 (a r \omega)^2 + m a_\sigma^2 (a s \omega)^2 + n a_\sigma^2 (a t \omega)^2), \\
 a_x^2 a_\sigma^2 &= \omega_x (x_1 a_\sigma^2 a_\sigma^2 + x_2 a_\sigma^2 a_\sigma^2 + x_3 a_\sigma^2 a_\tau^2) \\
 (1) \quad &\quad - \frac{1}{2} (l a_\sigma^2 (a r \omega)^2 + m a_\sigma^2 (a s \omega)^2 + n a_\sigma^2 (a t \omega)^2), \\
 a_x^2 a_\tau^2 &= \omega_x (x_1 a_\sigma^2 a_\tau^2 + x_2 a_\sigma^2 a_\tau^2 + x_3 a_\tau^2 a_\tau^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (l a_\tau^2 (a r \omega)^2 + m a_\tau^2 (a s \omega)^2 + n a_\tau^2 (a t \omega)^2),
 \end{aligned}$$

sowie

$$(1a) \quad a_x^4 = \begin{cases} \omega_x^2(x_1 a_\rho^2 + x_2 a_\sigma^2 + x_3 a_\tau^2)(x_1 a_{\rho_1}^2 + x_2 a_{\sigma_1}^2 + x_3 a_{\tau_1}^2) \\ - \omega_x(x_1 a_\rho^2 + x_2 a_\sigma^2 + x_3 a_\tau^2)(l(a\omega r)^2 + m(a\omega s)^2 + n(a\omega t)^2) \\ + \frac{1}{4}(l(a\omega r)^2 + m(a\omega s)^2 + n(a\omega t)^2) \\ \cdot (l(a\omega r_1)^2 + m(a\omega s_1)^2 + n(a\omega t_1)^2). \end{cases}$$

Die $3 \cdot 6 + 15 = 33$ Coefficienten

$$(I) \quad a_\rho^2 a_i a_k; \quad a_\sigma^2 a_i a_k; \quad a_\tau^2 a_i a_k; \\ a_1^4, \quad a_1^3 a_2, \quad \dots, \quad a_3^4$$

erscheinen also ohne Weiteres durch folgende 28 Invarianten ausgedrückt:

$$(IIa) \quad (1), (2), (3), (4), \omega_1, \omega_2, \omega_3,$$

$$(IIb) \quad a_\rho^2 a_{\rho_1}^2, \quad a_\rho^2 a_\sigma^2, \quad a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2, \quad a_\rho^2 a_\tau^2, \quad a_\sigma^2 a_\tau^2, \quad a_\tau^2 a_{\tau_1}^2,$$

$$(IIc) \quad a_\rho^2 (a\omega r)^2, \quad a_\rho^2 (a\omega s)^2; \quad a_\rho^2 (a\omega t)^2; \quad a_\sigma^2 (a\omega r)^2; \quad a_\sigma^2 (a\omega s)^2; \\ a_\sigma^2 (a\omega t)^2; \quad a_\tau^2 (a\omega r)^2; \quad a_\tau^2 (a\omega s)^2; \quad a_\tau^2 (a\omega t)^2;$$

$$(II d) \quad (a\omega r)^2 (a\omega r_1)^2; \quad (a\omega r)^2 (a\omega s)^2; \quad (a\omega r)^2 (a\omega t)^2; \\ (a\omega s)^2 (a\omega s_1)^2; \quad (a\omega s)^2 (a\omega t)^2; \quad (a\omega t)^2 (a\omega t_1)^2.$$

Aber nur 22 dieser Invarianten können von einander unabhängig sein. Denn die Curve vierter Ordnung zusammen mit den beiden Kegelschnitten des Büschels und der geraden Linie ω liefern $15 + 2 \cdot 6 + 3 = 30$ Constante, von denen wegen der linearen Transformationen der Ebene noch 8 in Abzug zu bringen sind. *In der That gelingt es nun, die sechs Invarianten (II d) als Functionen der 22 anderen darzustellen.* Hierzu dienen die Entwicklungen des § 6. Ersetzen wir in der dort gegebenen Determinante H die willkürlichen x durch $\hat{a}\omega$, so erhalten wir die Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} 2a_\rho^2 \omega_1 - 2a_1^2 & a_\rho^2 \omega_2 + a_\sigma^2 \omega_1 - 2a_1 a_2 & a_\rho^2 \omega_3 + a_\tau^2 \omega_1 - 2a_1 a_3 \\ a_\rho^2 \omega_2 + a_\sigma^2 \omega_1 - 2a_1 a_2 & 2a_\sigma^2 \omega_2 - 2a_2^2 & a_\sigma^2 \omega_3 + a_\tau^2 \omega_2 - 2a_2 a_3 \\ a_\rho^2 \omega_3 + a_\tau^2 \omega_1 - 2a_1 a_3 & a_\sigma^2 \omega_3 + a_\tau^2 \omega_2 - 2a_2 a_3 & 2a_\tau^2 \omega_3 - 2a_3^2 \end{vmatrix},$$

deren Unterdeterminanten (die wieder H_{ik} genannt sein sollen) die folgenden Werthe haben:

$$(2) \quad \begin{aligned} H_{11} &= -(a_\sigma^2 \omega_3 - a_\tau^2 \omega_3)^2 - 4a_2^2 a_\tau^2 \omega_3 - 4a_3^2 a_\sigma^2 \omega_2 + 4a_2 a_3 a_\sigma^2 \omega_3 \\ &\quad + 4a_2 a_3 a_\tau^2 \omega_2, \\ H_{22} &= -(a_\tau^2 \omega_1 - a_\rho^2 \omega_3)^2 - 4a_3^2 a_\rho^2 \omega_1 - 4a_1^2 a_\tau^2 \omega_3 + 4a_3 a_1 a_\tau^2 \omega_1 \\ &\quad + 3a_3 a_1 a_\rho^2 \omega_3, \\ H_{33} &= -(a_\rho^2 \omega_2 - a_\sigma^2 \omega_1)^2 - 4a_1^2 a_\sigma^2 \omega_2 - 4a_2^2 a_\rho^2 \omega_1 + 4a_1 a_2 a_\rho^2 \omega_2 \\ &\quad + 4a_1 a_2 a_\sigma^2 \omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{23} &= -(a_\varrho^2 \omega_3 - a_\tau^2 \omega_1)(a_\sigma^2 \omega_1 - a_\varrho^2 \omega_2) - 2a_1 a_2 a_\varrho^2 \omega_3 - 2a_1 a_2 a_\tau^2 \omega_1 \\
 &\quad - 2a_1 a_3 a_\varrho^2 \omega_2 - 2a_1 a_3 a_\sigma^2 \omega_1 + 4a_2 a_3 a_\varrho^2 \omega_1 \\
 &\quad + 2a_1^2 a_\sigma^2 \omega_3 + 2a_1^2 a_\tau^2 \omega_2, \\
 H_{31} &= -(a_\sigma^2 \omega_1 - a_\varrho^2 \omega_2)(a_\tau^2 \omega_2 - a_\sigma^2 \omega_3) - 2a_2 a_3 a_\sigma^2 \omega_1 - 2a_2 a_3 a_\varrho^2 \omega_2 \\
 (2) \quad &\quad - 2a_2 a_1 a_\sigma^2 \omega_3 - 2a_1 a_2 a_\tau^2 \omega_2 + 4a_3 a_1 a_\sigma^2 \omega_2 \\
 &\quad + 2a_2^2 a_\tau^2 \omega_1 + 2a_2^2 a_\varrho^2 \omega_3, \\
 H_{12} &= -(a_\tau^2 \omega_2 - a_\tau^2 \omega_3)(a_\varrho^2 \omega_3 - a_\tau^2 \omega_1) - 2a_1 a_3 a_\tau^2 \omega_2 - 2a_3 a_1 a_\sigma^2 \omega_3 \\
 &\quad - 2a_2 a_3 a_\tau^2 \omega_1 - 2a_2 a_3 a_\varrho^2 \omega_3 + 4a_1 a_2 a_\tau^2 \omega_3 \\
 &\quad + 2a_3^2 a_\varrho^2 \omega_2 + 2a_3^2 a_\sigma^2 \omega_1,
 \end{aligned}$$

sich also aus den 22 ersten Invarianten (II) zusammensetzen. Aus diesen H_{ik} bilde man sodann dem § 6. zufolge Grössen P_{ik} . Dann geben die Schlussformeln des § 6. gerade das hier gewünschte Resultat. Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned}
 D(ar\omega)^2 (ar_1\omega)^2 &= 6(1) P_{11} + 16(12) P_{21} + (3) P_{31}, \\
 D(as\omega)^2 (as_1\omega)^2 &= 2(2) P_{12} + (3) P_{22} + 3(4) P_{32}, \\
 D(at\omega)^2 (at_1\omega)^2 &= (3) P_{13} + (2(23) + 6(14)) P_{23} + 8(24) P_{33}, \\
 D(as\omega)^2 (at\omega)^2 &= (3) P_{12} + (2(23) + 6(14)) P_{22} + 8(24) P_{32} \\
 (3) \quad &\quad = 2(2) P_{13} + (3) P_{23} + 3(4) P_{33}, \\
 D(at\omega)^2 (as\omega)^2 &= 6(1) P_{13} + 16(12) P_{23} + (3) P_{33} \\
 &\quad = (3) P_{11} + (2(23) + 6(14)) P_{21} + 8(24) P_{31}, \\
 D(ar\omega)^2 (as\omega)^2 &= 2(2) P_{11} + (3) P_{21} + 3(4) P_{31} \\
 &\quad = 6(1) P_{12} + 16(12) P_{22} + (3) P_{32}.
 \end{aligned}$$

Ich erwähne noch den speciellen Fall, in welchem s die Polare von ϱ in Bezug auf a_x^4 ist, also

$$s = a_\varrho^2 a_x^2$$

statthatt. Es wird dann:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad a_\varrho^2 a_{\varrho_1}^2 &= 2(2); \quad a_\varrho^2 a_\sigma^2 = (3); \quad a_\varrho^2 a_\tau^2 = 3(4); \quad a_\varrho^2 (a\omega r)^2 = \omega_2; \\
 a_\varrho^2 (a\omega s)^2 &= \omega_3; \quad a_\varrho^2 (a\omega t)^2 = (4) \omega_1 + 2(2) \omega_3;
 \end{aligned}$$

es bleiben also von den 22 Invarianten (IIa), (IIb), (IIc) nur die folgenden 16 übrig:

$$(IIIa) \quad (1); (2); (3); (4); \omega_1; \omega_2; \omega_3;$$

$$(IIIb) \quad a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2; \quad a_\sigma^2 a_\tau^2; \quad a_\tau^2 a_{\tau_1}^2;$$

$$(IIIc) \quad a_\sigma^2 (a\omega r)^2; \quad a_\sigma^2 (a\omega s)^2; \quad a_\sigma^2 (a\omega t)^2;$$

$$a_\tau^2 (a\omega r)^2; \quad a_\tau^2 (a\omega s)^2; \quad a_\tau^2 (a\omega t)^2.$$

Dieselben sind wieder von einander unabhängig. Denn von den 22 im Allgemeinen vorhandenen unabhängigen Invarianten sind hier, wo s nicht mehr willkürlich ist, die früher für s mitgezählten 6 willkürlichen Constanten in Abzug zu bringen.

§ 13.

Typische Darstellung von drei Kegelschnitten.

Es möge jetzt ausser den beiden Kegelschnitten q und s noch ein dritter $p = p_x^2$ gegeben sein. Drei Kegelschnitte geben in mannigfachster Weise zu linearen Covarianten Anlass. Indem ich eine derselben auswähle und an Stelle der in § 11. eingeführten geraden Linie ω treten lasse, ermöglicht sich eine typische Darstellung, bei welcher nur die Invarianten und simultanen Invarianten der drei Kegelschnitte benutzt werden.

Ich setze insbesondere

$$(1) \quad \omega_x = p_q p_\tau (q \tau x).$$

Dann folgt aus den Formeln (4) des § 11., die ich hier noch einmal hersetze:

$$\begin{aligned} r &= \omega_x (6(1) x_1 + 16(12) x_2 + (3) x_3) \\ &\quad - \frac{1}{2} (8(1) \omega_1 l + \omega_2 m + ((3) \omega_1 + 2(1) \omega_3) n), \\ (2) \quad s &= \omega_x (2(2) x_1 + (3) x_2 + 3(4) x_3) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\omega_2 l + \omega_3 m + ((4) \omega_1 + 2(2) \omega_2) n), \\ p &= \omega_x (x_1 p_q^2 + x_2 p_\sigma^2 + x_3 p_\tau^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} (l(p\omega r)^2 + m(p\omega s)^2 + n(p\omega t)^2), \end{aligned}$$

dass sich die typischen Coefficienten der Formen r , s , p unmittelbar durch folgende 13 Invarianten darstellen:

$$\begin{aligned} (IIa) \quad & (1); (2); (3); (4); \\ (IIb) \quad & p_q^2; p_\sigma^2; p_\tau^2; \\ (IIc) \quad & \omega_1 = \omega_q^2; \quad \omega_2 = \omega_\sigma^2; \quad \omega_3 = \omega_\tau^2; \\ (IIId) \quad & (p\omega r)^2; (p\omega s)^2; (p\omega t)^2. \end{aligned}$$

Hier sind die Formen (IIa) und (IIb) hinreichend einfach. Dagegen werde ich versuchen, die Formen (IIc) und (IIId) noch auf niedrigere Bildungen zurückzuführen. Ich setze dabei zur Abkürzung

$$(p p' u)^2 = u_\pi^2.$$

Uebrigens benutze ich die Formeln des § 8. Man hat denselben zufolge:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \omega_x^2 &= (p_\varrho p_\tau (\varrho \tau x))^2 \\ &= \begin{aligned} &(4)r_\pi^2 s + (4)s_\pi^2 r + lp_\varrho^2 p_\tau^2 - \frac{1}{2} t t_\pi^2 - (4)p_\varrho^2 (ps \widehat{\varrho} x)^2 \\ &- \frac{1}{2} p_\tau^2 (pr \widehat{\tau} x)^2 + (4)p_\sigma^2 \varrho + 2(24)(\pi \varrho x)^2 - \frac{3}{2} (4)(\pi \sigma x)^2 \\ &+ \frac{1}{4} (3)(\pi \tau x)^2, \end{aligned} \end{aligned} \right.$$

also:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= - (4)p_\varrho^2 p_\sigma^2 + \frac{1}{2} (3)p_\varrho^2 p_\tau^2 - (1)p_\tau^2 p_\tau^2 + (24)r_\pi^2 + 3(14)s_\pi^2 - \frac{1}{4} (3)t_\pi^2, \\ \omega_2 &= - 4(24)p_\varrho^2 p_\sigma^2 + 2((23) - (14))p_\varrho^2 p_\tau^2 + (4)p_\sigma^2 p_\sigma^2 - \frac{1}{2} (3)p_\sigma^2 p_\tau^2 \\ &\quad + (4(224) - \frac{1}{4} (34))r_\pi^2 + (\frac{1}{4} (33) - 4(124))s_\pi^2 \\ &\quad + (3(14) - (23))t_\pi^2, \\ \omega_3 &= - 2(44)p_\varrho^2 p_\varrho^2 + 4(24)p_\varrho^2 p_\tau^2 - (4)p_\sigma^2 p_\tau^2 + \frac{3}{2} (44)r_\pi^2 + \frac{1}{2} (34)s_\pi^2 \\ &\quad - 2(24)t_\pi^2, \end{aligned} \right.$$

und

$$(5a) \quad (p \omega r)^2 = \left\{ \begin{aligned} &- 2(4)p_\varrho^2 p_\varrho^2 p_\sigma^2 + (3)p_\varrho^2 p_\varrho^2 p_\tau^2 - 2(1)p_\varrho^2 p_\tau^2 p_\tau^2 + \frac{(4)}{2} r_\pi^2 p_\sigma^2 \\ &- \frac{(3)}{4} r_\pi^2 p_\tau^2 + 4(14)s_\pi^2 p_\varrho^2 + (1)t_\pi^2 p_\tau^2 - \frac{1}{2} (3)t_\pi^2 p_\varrho^2 \\ &+ (\frac{1}{12} (33) - (4)(124))p_\pi^2, \end{aligned} \right.$$

$$(5b) \quad (p \omega s)^2 = \left\{ \begin{aligned} &- (4)p_\varrho^2 p_\varrho^2 p_\tau^2 + 2(2)p_\varrho^2 p_\tau^2 p_\tau^2 - \frac{1}{2} p_\sigma^2 p_\tau^2 p_\tau^2 + \frac{1}{2} (4)r_\pi^2 p_\tau^2 \\ &+ \frac{1}{2} (4)s_\pi^2 p_\sigma^2 + \frac{1}{2} (4)t_\pi^2 p_\varrho^2 + \frac{1}{4} (3)s_\pi^2 p_\tau^2 - (2)t_\pi^2 p_\tau^2 \\ &- 2(24)s_\pi^2 p_\varrho^2 + (\frac{4}{3}(224) - \frac{1}{4}(34))p_\pi^2, \end{aligned} \right.$$

$$(5c) \quad (p \omega t)^2 = \left\{ \begin{aligned} &- 2(44)p_\varrho^2 p_\varrho^2 p_\varrho^2 + 4(24)p_\varrho^2 p_\varrho^2 p_\tau^2 - 2(4)p_\varrho^2 p_\tau^2 p_\tau^2 \\ &+ \frac{1}{2} (3)p_\varrho^2 p_\tau^2 p_\tau^2 - (1)p_\tau^2 p_\tau^2 p_\tau^2 + 2(44)p_\varrho^2 r_\pi^2 + 4(14)p_\tau^2 s_\pi^2 \\ &+ \frac{2}{3} (24)p_\varrho^2 t_\pi^2 + \frac{1}{2} (4)p_\sigma^2 t_\pi^2 - \frac{1}{4} (3)p_\tau^2 t_\pi^2 \\ &\quad + p_\pi^2 (\frac{1}{3} (234) - 3(144)) \end{aligned} \right.$$

Es lassen sich also die Invarianten (II) auf die (IIa), (IIb) und übrigen die Invarianten p_{π}^2 , r_{π}^2 , s_{π}^2 , t_{π}^2 zurückführen, überhaupt also die typischen Coefficienten von r , s , p durch folgende 11 Invarianten ausdrücken:

$$(III) \quad (1), (2), (3), (4), p_{\sigma}^2, p_{\sigma}^2, p_{\tau}^2, p_{\pi}^2, r_{\pi}^2, s_{\pi}^2, t_{\pi}^2.$$

Die Kegelschnitte enthalten $3 \cdot 6 = 18$ Constante. Bringt man hier von wegen der linearen Transformationen der Ebene 8 Einheiten in Abzug, so bleiben noch 10 Willkürlichkeiten. Die 11 Invarianten (III) sind also nicht von einander unabhängig, sondern es besteht zwischen ihnen eine Relation, die aufzustellen bleibt.

Derselbe Umstand stellt sich im erhöhten Maasse ein, wenn wir noch einen vierten Kegelschnitt q_x^2 hinzunehmen und diesen auf unsere typische Darstellung beziehen. Wir haben nach § 11. Formel (4a):

$$(6) \quad q_x^2 = \omega_x(x_1 q_{\sigma}^2 + x_2 q_{\sigma}^2 + x_3 q_{\tau}^2) \\ - \frac{1}{2}(l(q\omega r)^2 + m(q\omega s)^2 + (q\omega t)^2)$$

und finden für die hier rechter Hand auftretenden Invarianten:

$$(q\omega r)^2, (q\omega s)^2, (q\omega t)^2$$

die folgenden Werthe:

$$(7a) \quad (q\omega r)^2 = \left\{ \begin{array}{l} -2(4)p_{\sigma}^2 q_{\sigma}^2 p_{\sigma}^2 + (3)p_{\sigma}^2 q_{\sigma}^2 p_{\tau}^2 - 2(1)q_{\sigma}^2 p_{\tau}^2 p_{\tau}^2 \\ + (4)(pqr)^2 p_{\sigma}^2 + 2(24)r_{\pi}^2 q_{\sigma}^2 - \frac{1}{2}(4)r_{\pi}^2 q_{\sigma}^2 \\ - \frac{1}{2}(3)(pqr)^2 p_{\tau}^2 + 2(14)s_{\pi}^2 q_{\sigma}^2 - 4(14)(pqs)^2 p_{\sigma}^2 \\ - (1)t_{\pi}^2 q_{\sigma}^2 + 2(1)(pqt)^2 q_{\tau}^2 + q_{\pi}^2 \left(\frac{1}{4}(33) - 8(124) \right) \\ + 6(14)(s_q \hat{\varphi} \pi)^2 - \frac{1}{2}(3)(t_q \hat{\varphi} \pi)^2, \end{array} \right.$$

$$(7b) \quad (q\omega s)^2 = \left\{ \begin{array}{l} - (4)p_{\sigma}^2 p_{\sigma}^2 q_{\tau}^2 + 2(2)p_{\sigma}^2 p_{\tau}^2 q_{\tau}^2 - \frac{1}{2}p_{\sigma}^2 p_{\tau}^2 q_{\tau}^2 + (4)r_{\pi}^2 q_{\tau}^2 \\ - \frac{1}{2}(4)(pqr)^2 p_{\tau}^2 + (4)(pqs)^2 p_{\sigma}^2 - \frac{1}{2}(4)s_{\pi}^2 q_{\tau}^2 + (4)t_{\pi}^2 q_{\sigma}^2 \\ + (4)(pqt)^2 p_{\sigma}^2 + \frac{1}{4}(3)s_{\pi}^2 q_{\tau}^2 - (2)t_{\pi}^2 q_{\sigma}^2 - 4(24)(pqs)^2 p_{\sigma}^2 \\ + \frac{1}{4}(34)q_{\pi}^2 + 2(24)(s_q \hat{\varphi} \pi)^2 - \frac{3}{2}(4)(t_q \hat{\varphi} \pi)^2, \end{array} \right.$$

$$(7c) \quad (q\omega t)^2 = \begin{cases} -2(44)p_q^2 p_q^2 q_q^2 + 4(24)p_q^2 p_r^2 q_q^2 - (4)p_q^2 p_\sigma^2 q_r^2 \\ + \frac{1}{2}(3)p_q^2 p_r^2 q_r^2 - (4)p_r^2 p_r^2 q_r^2 - (4)p_\sigma^2 p_r^2 q_q^2 + (44)r_\pi^2 q_q^2 \\ + (44)(pqr)^2 p_q^2 - (34)(pqs)^2 p_q^2 + 2(24)r_\pi^2 q_r^2 \\ - 2(24)(pqr)^2 p_r^2 + 2(14)s_\pi^2 q_r^2 + 2(14)(pqs)^2 p_r^2 \\ - \frac{1}{2}(4)t_\pi^2 q_\sigma^2 + (4)(pqt)^2 p_\sigma^2 - \frac{1}{4}(3)t_\pi^2 q_r^2 \\ + q_\pi^2((234) - 3(144)) + (34)(sq\hat{q}\pi)^2 - 4(24)(tq\hat{q}\pi)^2. \end{cases}$$

Die typischen Coefficienten von r , s , p , q drücken sich also durch folgende 20 Invarianten aus:

$$(IV) \quad (1), (2), (3), (4), p_q^2, p_\sigma^2, p_r^2, p_\pi^2, r_\pi^2, s_\pi^2, t_\pi^2, \\ (pqr)^2, (pqs)^2, (pqt)^2, q_\pi^2, q_q^2, q_\sigma^2, q_r^2, (sq\hat{q}\pi)^2, (tq\hat{q}\pi)^2.$$

Nun haben 4 Kegelschnitte 24 Constante und es sind also unter den vorstehenden Invarianten nur $24 - 8 = 16$ unabhängige. Anders ausgedrückt: Zwischen den 20 Invarianten (IV) bestehen 4 Relationen

§ 14.

Typische Darstellung von Curve vierter Ordnung und Kegelschnitt.

Es sei nun endlich eine Curve vierter Ordnung a_x^4 und ein einzelner Kegelschnitt q vorgelegt. Wir bilden uns

$$(1a) \quad a_x^2 a_q^2 = s_x^2,$$

sodann das System von q und s , setzen ferner:

$$(1b) \quad a_x^2 a_r^2 = p_x^2, \quad a_x^2 a_\sigma^2 = q_x^2,$$

berechnen:

$$(1c) \quad p_q p_r (qrx) = \omega_x$$

und verwenden nunmehr die typische Darstellung des vorigen Paragraphen. Dann folgt (vgl. § 12., Formel (IIIa), (IIIb), (IIIc)), dass sich die typischen Coefficienten von a_x^4 und q durch folgende Invarianten ausdrücken lassen:

$$(I) \quad (1), (2), (3), (4), \omega_1, \omega_2, \omega_3, \\ p_r^2, p_\sigma^2 = q_r^2, q_\sigma^2, \\ (p\omega r)^2, (p\omega s)^2, (p\omega t)^2, (q\omega r)^2, (q\omega s)^2, (q\omega t)^2.$$

Diese selbst reduciren sich aber nach § 13., Formel (4), (5), (6), (8) auf folgende:

$$(1), (2), (3), (4), p_\varrho^2, p_\sigma^2, p_\tau^2, p_\pi^2, r_\pi^2, s_\pi^2, t_\pi^2, (pqr)^2, (pqs)^2, \\ (pqt)^2, q_\pi^2, q_\varrho^2, q_\sigma^2, q_\tau^2, (sq \hat{\varrho} \pi)^2, (tq \hat{\varrho} \pi)^2,$$

die ihrerseits wieder nach Formel (1) auf folgende zurückkommen:

$$(1); (2); (3); (4); a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2; a_\sigma^2 a_\tau^2; a_\tau^2 a_{\tau_1}^2; \\ a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abr)^2; a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abs)^2; a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abt)^2; a_\sigma^2 b_\tau^2 (abr)^2; \\ (II) a_\sigma^2 b_\tau^2 (abs)^2; a_\sigma^2 b_\tau^2 (abt)^2; (abc)^2 a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2; (abc)^2 a_\tau^2 b_\sigma^2 c_{\tau_1}^2; \\ a_\sigma^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 (\hat{sc} \hat{\varrho} \hat{ab}); a_\sigma^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 (\hat{tc} \hat{\varrho} \hat{ab}).$$

Diess sind 17 Invarianten. Die Curve vierter Ordnung hat 15, der Kegelschnitt ϱ 6 Constante; von den 17 Invarianten (II) sind daher nur 13 unabhängig.

Erlangen, im Januar 1882.
