SULLE CURVE ALGEBRICHE PIANE.

Nota di **G. B. Guccia**, in Palermo.

Adunanza del 12 gennajo 1902.

1. Lemma. — *Fissati ad arbitrio nel piano (quali elementi di riferimento) un punto P ed una retta R (non passante per P): la più generale curva algebrica, $C_n^{(k)}$, d'ordine n, con un punto (k)-plo in P $(0 \leqq k < n)$, può essere considerata come curva generica del sistema lineare ∞^{n-k}:*

$$[R^{n-k} G_k, \quad R^{n-k-1} G_{k+1}, \ldots R G_{n-1}, \quad G_n],$$

individuato dalle $n - k + 1$ curve d'ordine n, linearmente indipendenti,

$$R^{n-k} G_k, \quad R^{n-k-1} G_{k+1}, \ldots R G_{n-1}, \quad G_n;$$

essendo G_j un gruppo di j raggi uscenti da P, al quale compete l'una o l'altra delle due seguenti definizioni:

a) successivamente per $j = k, k + 1, \ldots n - 1, n$: gruppo delle j tangenti in P a quella curva, unica, $C_n^{(j)}$, del fascio

$$(R^{n-j+1} G_{j-1}, \quad C_n^{(j-1)}),$$

*che è dotata d'un punto (j)-plo in P *);*

b) successivamente per $j = n, n - 1, \ldots k + 1, k$: gruppo delle congiungenti il punto P con gli n punti in cui la retta R è incontrata da quella curva, unica, $C_j^{(k)}$, che, insieme alla retta R contata una volta, costituisce una curva del fascio

$$(C_{j+1}^{(k)}, \quad G_{j+1}) \text{ **}).$$

E reciprocamente.

---

*) Per $j = k$, G_k è il gruppo delle k tangenti in P alla curva data $C_n^{(k)}$. Per $j = n$ deve intendersi $C_n^{(n)} \equiv G_n$.

**) Per $j = n$, G_n è il gruppo delle congiungenti il punto P con gli n punti in cui la retta R è incontrata dalla curva data $C_n^{(k)}$. Per $j = k$ deve intendersi $C_k^{(k)} \equiv G_k$.

Per $k = 0$ il Lemma vale integralmente per la curva *generale* d'ordine n, $C_n^{(0)}$ *).

---

2. Gli $n - k + 1$ gruppi di raggi:

$$G_k, \quad G_{k+1}, \ldots G_{n-1}, \quad G_n,$$

che abbiamo definiti in doppio modo nel lemma precedente, dàn luogo a' seguenti enunciati (n[i] 3-6), in ciascuno dei quali è sottinteso che siano fissati ad arbitrio nel piano (quali elementi di riferimento) un punto P ed una retta R (non passante per P), ed è inoltre supposto che $C_n^{(k)}$ $(0 \leqq k < n)$ sia la più generale fra le curve d'ordine n dotate d'un punto (k)-plo in P; la quale ultima ipotesi include che nessuno dei detti gruppi G possa mancare.

3. *I gruppi di raggi* G_j $(j = k, k + 1, \ldots n - 1, n)$ *relativi alle singole curve d'un sistema lineare* $\infty^{\varkappa}$, *individuato da* $\varkappa + 1$ *curve* $C_n^{(k)}$ *linearmente indipendenti, costituiscono, alla lor volta,* $n - k + 1$ *involuzioni di grado* j *e specie* $\varkappa$, *projettive al primo* $(\varkappa \leqq k < n)$.

4. *Per una data curva* $C_n^{(k)}$ $(0 \leqq k < n)$, *gli* j *punti* $(k \leqq j < n)$ *in cui il relativo gruppo* G_j *incontra* R *coincidono con gli* j *punti in cui* R *è incontrata dalla* $(n - j)^{ma}$ *polare di* P *rispetto a* $C_n^{(k)}$.

5. *La* $(n - j)^{ma}$ *polare di un punto* P *rispetto ad una curva data* $C_n^{(k)}$ $(0 \leqq k \leqq j < n)$ *è il luogo degli* j *punti in cui una retta* R, *che*

---

*) Nòto, dalla geometria ad una dimensione, che il gruppo G_j $(j = k, k + 1, \ldots n)$ è determinato da j condizioni lineari, si trae subito che

$$n - k + \sum_k^n j\, j = \tfrac{1}{2}[n(n+3) - k(k+1)] \qquad [= \varphi(n, k)]$$

è il numero delle condizioni lineari cui può soddisfare la più generale curva d'ordine n con un punto (k)-plo in un punto dato del piano. Donde le note formole:

$$\varphi(n, 0) = \tfrac{1}{2} n(n+3) \qquad \text{e} \qquad \varphi(n, 0) - \varphi(n, k) = \tfrac{1}{2} k(k+1),$$

risp. pel numero delle condizioni lineari cui può soddisfare la curva generale d'ordine n e pel numero delle condizioni lineari cui equivale, per una curva algebrica, il possedere, in un punto dato del piano, un punto (k)-plo ordinario. — Si avrebbe così una dimostrazione rigorosa di due proposizioni fondamentali della geometria a due dimensioni, per la quale non è necessario valersi dell'equazione della curva.

ruota attorno ad un punto fisso del piano, è incontrata dagli j raggi del gruppo G_j relativo ad R *). In particolare, per $j = k (> 0)$: *il gruppo G_k coincide con la $(n-k)^{ma}$ polare di P rispetto a $C_n^{(k)}$.*

6. *I gruppi di raggi:*

$$G_k, \quad G_{k+1}, \ \ldots \ G_{j-1}, \quad G_j,$$

relativi ad una curva data $C_n^{(k)} (0 \leqq k \leqq j < n)$, coincidono, ordinatamente, coi gruppi di raggi:

$$G_k^{(n-j)}, \quad G_{k+1}^{(n-j)}, \ \ldots \ G_{j-1}^{(n-j)}, \quad G_j^{(n-j)},$$

relativi alla $(n-j)^{ma}$ polare di P rispetto a $C_n^{(k)}$.

Etc.

---

7. Converremo di chiamare: 1^a, 2^a, ... $(n-k-1)^{ma}$, $(n-k)^{ma}$ *congiunta di 1^a specie* di una curva data $C_n^{(k)}$, d'ordine n, con un punto (k)-plo in P $(0 \leqq k < n)$, ordinatamente le $n-k$ curve (dello stesso ordine n):

$$C_n^{(k+1)}, \ C_n^{(k+2)}, \ \ldots \ C_n^{(n-1)}, \ C_n^{(n)} (\equiv G_n),$$

la cui definizione geometrica è contenuta nella parte a) del Lemma. Ed analogamente: 1^a, 2^a, ... $(n-k-1)^{ma}$, $(n-k)^{ma}$ *congiunta di 2^a specie* della curva medesima, ordinatamente le $n-k$ curve (degli ordini $n-1$, $n-2$, ... $k+1$, k):

$$C_{n-1}^{(k)}, \ C_{n-2}^{(k)}, \ \ldots \ C_{k+1}^{(k)}, \ C_k^{(k)} (\equiv G_k),$$

la cui definizione geometrica è contenuta nella parte b) del Lemma. Si hanno allora i seguenti enunciati (n[i] 8-15), in ciascuno dei quali è sottinteso che siano fissati ad arbitrio nel piano (quali elementi di riferimento) un punto P ed una retta R (non passante per P), ed è inoltre supposto che $C_n^{(k)}$ $(0 \leqq k < n)$ sia la più generale fra le curve d'ordine n dotate d'un punto (k)-plo in P; la quale ultima ipotesi include che nessuna delle $2(n-k)$ congiunte di 1^a e di 2^a specie possa mancare.

8. *Le $k + \delta$ tangenti in P alla $(\delta)^{ma}$ congiunta di 1^a specie coinci-*

---

*) Ad esempio: può costruirsi la retta polare di un punto P rispetto ad una curva data $C_n^{(0)}$ congiungendo fra loro i punti in cui due rette qualunque del piano, R_1, R_2, sono risp. incontrate dalle tangenti in P alle curve dei fasci $(R_1^n, C_n^{(0)})$, $(R_2^n, C_n^{(0)})$, le quali passano per P. Etc.

dono con le rette che uniscono P ai $k + \delta$ *punti in cui R è incontrata dalla* $(n - k - \delta)^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie* $(0 \leq k < n,\ 0 < \delta < n - k)$.

9. *Ogni curva* $C_n^{(k)}$ *può essere considerata come appartenente al fascio individuato dalle due curve seguenti: la* $(\delta)^{ma}$ *congiunta di* 1^a *specie e la curva composta della retta R, contata* $n - k - \delta + 1$ *volte, e della* $(n - k - \delta + 1)^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie; ossia al fascio:*

$$(C_n^{(k+\delta)},\ R^{n-k-\delta+1}\, C_{k+\delta-1}^{(k)})\ ^{*)} \quad (0 \leq k < n,\ 0 < \delta \leq n - k).$$

a) Per $\delta = 1$: *Ogni curva* $C_n^{(k)}$ *può essere considerata come appartenente al fascio:*

$$(C_n^{(k+1)},\ R^{n-k}\, C_k^{(k)}) \equiv (C_n^{(k+1)},\ R^{n-k}\, G_k)\ ^{**)}.$$

b) Per $\delta = n - k$: *Ogni curva* $C_n^{(k)}$ *può essere considerata come appartenente al fascio:*

$$(C_n^{(n)},\ R\, C_{n-1}^{(k)}) \equiv (G_n,\ R\, C_{n-1}^{(k)})\ ^{**)}.$$

10. Reciprocamente: *Due curve* $C_n^{(k+\delta)}$ *e* $C_{k+\delta-1}^{(k)}$ *possono sempre considerarsi come* $(\delta)^{ma}$ *congiunta di* 1^a *specie ed* $(n - k - \delta + 1)^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie di ognuna delle* ∞^1 *curve* $C_n^{(k)}$ *del fascio:*

$$(C_n^{(k+\delta)},\ R^{n-k-\delta+1}\, C_{k+\delta-1}^{(k)})\ ^{***)} \quad (0 \leq k < n,\ 0 < \delta \leq n - k).$$

---

*) Il luogo, Φ_P, dei punti in cui rette condotte da P sono tangenti a curve di questo fascio si scinde [cfr. le mie *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche*, etc., Memoria II, n° 40, caso *a*), e n[i] 46, 71 (questi Rendiconti, t. IX)] nella retta R contata $n - k - \delta$ volte ed in una curva residuale, Φ'_P, d'ordine $n + k + \delta - 1$, la quale ha in P un punto $(2k + \delta)$-plo, le cui tangenti sono quelle delle curve $C_n^{(k+\delta)}$ e $C_{k+\delta-1}^{(k)}$, e passa inoltre con un ramo: per ciascuno degli n e dei $k + \delta - 1$ punti in cui R è incontrata, risp., da $C_n^{(k+\delta)}$ e $C_{k+\delta-1}^{(k)}$, e per ciascuno degli $n(k + \delta - 1) - k(k + \delta)$ punti d'intersezione, oltre P, delle curve medesime. Pertanto (n° 11), le $n(n + k + \delta - 1) - k(2k + \delta) - k - n - [n(k + \delta - 1) - k(k + \delta)] = n(n - 1) - k(k + 1)$ intersezioni di Φ'_P con $C_n^{(k)}$ (diverse da P e dai punti che si trovano su R o su $C_{k+\delta-1}^{(k)}$) sono, com'è noto, i punti di contatto delle tangenti condotte da P alla curva $C_n^{(k)}$.

**) Ad esempio (per $k = n - 1$): Se una curva d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo, P, ha in un altro punto, semplice, Q, un contatto d'ordine $n - 1$ con una retta, R, la curva medesima può essere considerata come curva generica del fascio individuato dalle due seguenti curve d'ordine n: la retta PQ, contata n volte, e la curva composta della retta R e delle $n - 1$ tangenti in P alla curva data.

***) Talchè, facendo variare in tutt'i modi possibili le curve $C_n^{(k+\delta)}$ e $C_{k+\delta-1}^{(k)}$, le

11. *La* $(n-k-\delta+1)^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie di una curva* $C_n^{(k)}$ *ha in* P, *con ciascuno dei* k *rami della curva data, un contatto d'ordine* δ $(0 < k < n,\ 0 < \delta \leqq n-k)$.

12. *In ciascuno degli* n *punti in cui è incontrata dalla retta* R, *la curva* $C_n^{(k)}$ *ha con la sua* $(\delta)^{ma}$ *congiunta di* 1^a *specie un contatto d'ordine* $n-k-\delta$ $(0 \leqq k < n,\ 0 < \delta < n-k)$.

13. *La* $(\delta)^{ma}$ *congiunta di* 1^a *specie e la* $(n-k-\delta+1)^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie s'incontrano, oltre* P, *in altri* $n(k+\delta-1)-k(k+\delta)$ *punti, i quali si trovano, tutti, sulla curva data* $C_n^{(k)}$ $(0 \leqq k < n,$ $0 < \delta \leqq n-k)$.

14. *La* $(\delta)^{ma}$ *congiunta di* 1^a *specie,* $C_n^{(k+\delta)}$, *di una curva data,* $C_n^{(k)}$, *appartiene al fascio individuato dalle due curve seguenti: la* $(\delta+\delta'+1)^{ma}$ *congiunta di* 1^a *specie di* $C_n^{(k)}$ *e la curva composta della retta* R, *contata* $n-k-\delta-\delta'$ *volte, e della* $(n-k-\delta-\delta')^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie di* $C_n^{(k+\delta)}$ $(0 \leqq k < n,\ 0 < \delta \leqq n-k,\ 0 < \delta' \leqq n-k-\delta-1)$.

15. *Se due curve* $C_m^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ *hanno la stessa* $(n-k-\delta+1)^{ma}$ *congiunta di* 2^a *specie, esse sono tali che:*

1^o *in* P *ciascun ramo dell'una ha un contatto d'ordine* δ *con un ramo dell'altra;*

2^o *il fascio*

$$(C_m^{(k)},\quad R^{m-n}C_n^{(k)})$$

contiene una curva dotata in P *d'un punto* $(k+\delta)$*-plo* $(0 < k < n \leqq m,$ $\delta \leqq n-k)$.

Palermo, 12 gennajo 1902.

(Continua).

G. B. Guccia.

---

curve del fascio $(C_n^{(k+\delta)},\ R^{n-k-\delta+1}\,C_{k+\delta-1}^{(k)})$ esauriranno le curve $C_n^{(k)}$ del piano. Si ha quindi (nota terza del n° 1) l'eguaglianza:

$$\varphi(n,\ k+\delta)+\varphi(k+\delta-1,\ k)+1=\varphi(n,\ k).$$