

Sulla integrazione della equazione $\Delta^2 u = 0$.

(del prof. ULISSE DINI, a Pisa).

Molti distinti geometri si sono occupati della determinazione della funzione u di due variabili reali x e y che nei punti interni a un dato campo C è finita, continua e a un sol valore, essa e le sue derivate, e soddisfa alla equazione $\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, e avvicinandosi indefinitamente al contorno si mantiene sempre finita, e resta, almeno generalmente, anche continua, e sul contorno prende valori dati ad arbitrio. In questo lavoro invece io prendo dapprima a determinare la funzione u nel campo racchiuso da un cerchio o da due cerchi concentrici, quando si richiede che pei punti interni al campo che si considera essa soddisfi alle condizioni dette sopra, e avvicinandosi indefinitamente al contorno s e sul contorno stesso non superi mai un numero finito e resti, almeno generalmente, anche continua sì essa che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ rispetto alla normale p al contorno contata verso l'interno, e al contorno questa derivata prenda valori dati ad arbitrio in tutti i punti ove questi valori dati soddisfano alla legge di continuità; intendendo sempre però che questi valori siano finiti e abbiano soltanto un numero finito di discontinuità e soddisfino alla equazione $\int \frac{du}{dp} ds = 0$ che, come è noto, è conseguenza necessaria delle altre condizioni che si sono poste.

Passo quindi a trattare il problema analogo pel caso della sfera, e considero poi il caso in cui sul contorno, anzichè essere dati i valori di u o di $\frac{du}{dp}$, sono dati quelli di una funzione lineare di queste quantità, ciò che mi porta a risolvere completamente un problema della teoria del calore; e infine tratto i problemi analoghi pel caso della equazione $\Delta^2 u = f$, ove f è una funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutti i punti del campo che si considera.

1. Siano x e y le coordinate cartesiane, e ρ , θ le coordinate polari di un punto M di un campo C . Ricordando che la espressione $\Delta^2 u$ in coordinate polari è la seguente:

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho},$$

si vede subito che se nell'interno di C la funzione u soddisfa alla equazione $\Delta^2 u = 0$, ed è finita, continua e a un sol valore essa e le sue derivate, anche la funzione $U = \rho \frac{du}{d\rho}$ sarà finita e continua insieme alle sue derivate nell'interno di C , e soddisfarà essa pure alla equazione $\Delta^2 U = 0$, giacchè si avrà:

$$\Delta^2 U = \frac{d(\rho^2 \Delta^2 u)}{\rho d\rho}.$$

Ora supponendo che C sia il campo racchiuso da una circonferenza di raggio R col centro all'origine delle coordinate rettilinee e polari, al contorno si avrà $\frac{du}{d\rho} = -\frac{du}{dp}$, e quindi la esistenza di una funzione u , che è tale che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ al contorno prende i valori dati, e che soddisfa alle altre condizioni dette sopra, porta alla esistenza di una funzione $U = \rho \frac{du}{d\rho}$ che nell'interno soddisfa alle stesse condizioni, e avvicinandosi indefinitamente al contorno si mantiene sempre finita e resta generalmente anche continua e sul contorno prende i valori dati $-R \frac{du}{dp}$.

Ora per teoremi noti (v. per es.: SCHWARZ, Crelle Journ., v. 74, p. 218), il valore di questa funzione U nel punto (ρ', θ') interno a C è:

$$-\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta') + \rho'^2} d\theta;$$

quindi, se la funzione cercata u esiste, nel punto (ρ', θ') dovremo avere:

$$\frac{du'}{d\rho'} = -\frac{R}{2\pi\rho'} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta') + \rho'^2} d\theta,$$

ovvero:

$$\frac{du'}{d\rho'} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \frac{2\rho' - 2R \cos(\theta - \theta')}{R^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta') + \rho'^2} d\theta - \frac{R}{2\pi\rho'} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} d\theta, \quad (1)$$

o anche:

$$\frac{du'}{d\rho'} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \frac{d}{d\rho'} \{ \log [R^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta') + \rho'^2] \} d\theta, \quad (2)$$

giacchè si suppone che i valori dati di $\frac{du}{dp}$ soddisfino alla condizione:

$$\int_s \frac{du}{dp} ds = R \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} d\theta = 0.$$

Se dunque la funzione u' esiste, il valore di $\frac{du'}{d\rho'}$ nel punto $M(\rho', \theta')$ interno a C non può essere che il valore (2); quindi, integrando lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ dal centro al punto (ρ', θ') , e supponendo, ciò che evidentemente può farsi, che il valore di u nel centro sia zero, se la funzione u' esiste, si avrà:

$$u' = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \log \{ R^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta') + \rho'^2 \} d\theta, \quad (3)$$

giacchè, nelle ipotesi che noi abbiamo fatte sui valori dati di $\frac{du}{dp}$ al contorno, le integrazioni rispetto a ρ' e a θ' potevano invertirsi.

2. La funzione cercata adunque non può essere che quella che ci viene data dalla formola (3). Però, poichè non siamo ancora sicuri della esistenza di questa funzione, converrà cercare se la funzione u' data dalla (3) soddisfa o no a tutte le condizioni che abbiamo poste.

Si verifica senza difficoltà che pei punti (ρ', θ') interni a C le condizioni che abbiamo poste sono tutte soddisfatte dalla funzione (3). Per verificare poi che essa resta finita e continua anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso, basta procedere come segue.

Indichiamo con u'_ε il valore che prende il secondo membro della (3) per $\rho' = R$. Si avrà:

$$u'_\varepsilon = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \log 4 \sin^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta, \quad (4)$$

e questo valore evidentemente sarà finito e determinato.

Similmente indichiamo con u'_ε il valore che si ha per u' dalla (3) sul cerchio di raggio $\rho' = R - \varepsilon$. Si avrà:

$$u'_\varepsilon = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \log \left[\frac{\varepsilon^2}{R^2} + 4 \sin^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right) \right] d\theta,$$

e perciò sarà:

$$u'_\varepsilon - u'_s = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \left\{ \log \left[\frac{\varepsilon^2}{R^2} + 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right) \right] - \log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \right\} d\theta.$$

Indichiamo ora con δ una quantità differente da zero positiva e arbitrariamente piccola, che poi dovrà restar fissa, e osserviamo che quando i valori dell'elemento dell'integrale che comparisce in questa formola si riguardino come fissati nei punti del cerchio di raggio uno, cui si riferiscono i valori di θ corrispondenti, questo integrale potrà considerarsi come esteso al cerchio di raggio uno, e potrà sempre decomorsi in due, che indicheremo con $\int_{2\delta}^{\theta'}$ e $\int_{2\pi-2\delta}^{\theta'}$, dei quali il primo sia esteso all'arco circolare che va dal punto

$\theta = \theta' - \delta$ al punto $\theta = \theta' + \delta$, e il secondo sia esteso all'arco rimanente.

Indicando con g il massimo (o limite superiore) fra i valori assoluti dati di $\frac{du}{dp}$, e supponendo δ ed ε già così piccoli che le quantità:

$$4 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}, \text{ e } \frac{\varepsilon^2}{R^2} + 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right)$$

siano ambedue minori dell'unità, si vede subito che per tutti i valori di ε inferiori a un certo limite (che evidentemente può prendersi diverso da zero)

e per tutti i valori di θ' l'integrale $\int_{2\delta}^{\theta'}$ in valore assoluto sarà minore di:

$$g \int_{\theta' - \delta}^{\theta' + \delta} \left\{ -\log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right) - \log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \right\} d\theta,$$

ovvero di:

$$-2g \int_{\theta' - \delta}^{\theta' + \delta} \log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta - 2g\delta \log \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right);$$

e quindi, poichè prendendo δ sufficientemente piccolo l'integrale:

$$\int_{\theta' - \delta}^{\theta' + \delta} \log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta$$

può rendersi arbitrariamente piccolo, si conclude che si può trovare un valore di δ così piccolo, che per questo valore di δ (che ora lasceremo

fisso) e pei valori di ε inferiori a un certo limite finito e per tutti i valori di θ' l'integrale $\int_{2\delta}$ in valore assoluto sia sempre minore di quella quantità che più ci piace.

Consideriamo ora l'altro integrale $\int_{2\pi-2\delta}$, e scriviamo perciò il suo elemento sotto la forma:

$$\frac{du}{dp} \log \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon^2}{4R^2 \sin^2 \frac{\theta - \theta'}{2}} \right) d\theta = \frac{du}{dp} \log \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \frac{\varepsilon}{4R \sin^2 \frac{\theta - \theta'}{2}} \right) \right\} d\theta.$$

Osservando che il minimo valore di $\sin^2 \frac{\theta - \theta'}{2}$ durante l'integrazione è $\sin^2 \frac{\delta}{2}$, si vedrà subito che pei valori di ε inferiori a $4R \sin^2 \frac{\delta}{2}$ la quantità sotto il logaritmo è sempre minore dell'unità, e quindi in valore assoluto l'elemento dell'integrale non è mai maggiore di:

$$-g \log \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right) d\theta,$$

e l'integrale non è maggiore di $-2\pi g \log \left(1 - \frac{\varepsilon}{R} \right)$; e questo mostra chiaramente che pei valori di ε inferiori a un certo numero differente da zero ε_1 l'integrale $\int_{2\pi-2\delta}$ per tutti i valori di θ' sarà minore di una quantità piccola quanto si vuole data.

Da ciò risulta che si può trovare un numero positivo e differente da zero ε_1 , tale che per tutti i valori positivi di ε inferiori a ε_1 e per tutti i valori di θ' la differenza $u'_\varepsilon - u'_\varepsilon$ in valore assoluto sia sempre minore di una quantità data piccola quanto si vuole; e si conclude perciò intanto che avvicinandosi indefinitamente al contorno nel senso dei raggi la funzione u' si mantiene continua e tende verso i valori u'_ε dati dalla (4), e la continuità è uniforme su tutti i raggi.

Ora, per questo e perchè i valori u'_ε di u' lungo un cerchio qualunque di raggio $R - \varepsilon$ interno a C costituiscono una funzione continua, s'intende subito come possano sempre trovarsi due numeri positivi e differenti da zero ε_1 e ε_2 tali che, costruendo per ogni punto (R, θ') del contorno il qua-

drilatero curvilineo, di cui due lati sono porzioni uguali a $2R\varepsilon_2$ e $2(R-\varepsilon_1)\varepsilon_2$ del contorno e del cerchio di raggio $R-\varepsilon_1$ rispettivamente, e gli altri due sono le porzioni uguali ad ε_1 dei raggi corrispondenti agli angoli polari $\theta'+\varepsilon_2$ e $\theta'-\varepsilon_2$, le differenze fra $u'_s(\theta')$ e il valore di u' o di u'_s in un altro punto qualunque di quel quadrilatero siano minori in valore assoluto di una quantità positiva piccola quanto si vuole data ad arbitrio; e questo basta per potere concludere, come volevamo, che la funzione u' data dalla (3) si mantiene finita e continua anche avvicinandosi indefinitamente al contorno (in qualunque direzione) e sul contorno stesso, quando per valori al contorno si prendano i valori limiti u'_s dati dalla formola (4).

E ora, poichè questi valori limiti u'_s sono quelli appunto che si hanno dalla formola (3) per $\rho'=R$, e bisogna necessariamente prenderli per valori della funzione u' al contorno se si vuole la continuità, si può dire che la formola (3) vale per tutto il campo C incluso il contorno.

3. Mi piace di osservare che, anche indipendentemente dalla considerazione dei valori di u' nell'interno di C , si può provare direttamente nel modo seguente che i valori limiti u'_s costituiscono una funzione continua di θ' .

Osserviamo per questo che avendosi dalla (4):

$$u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta,$$

$$u'_s(\theta' + \varepsilon) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta' - \varepsilon}{2} d\theta,$$

sarà:

$$u'_s(\theta' + \varepsilon) - u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \left\{ \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta' - \varepsilon}{2} - \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \right\} d\theta,$$

e poichè l'integrale che qui comparisce può al solito considerarsi come esteso al cerchio di raggio uno, indicando con δ una quantità positiva sufficientemente piccola potremo scrivere:

$$u'_s(\theta' + \varepsilon) - u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi} \int_{2\delta} + \frac{R}{2\pi} \int_{2\pi-2\delta},$$

ove gl'integrali $\int_{2\delta}$ e $\int_{2\pi-2\delta}$, rispetto al modo secondo cui sono estesi, hanno il significato del paragrafo precedente.

Ora siccome le quantità sotto i logaritmi non superano l'unità, in valore assoluto l'integrale $\int_{2\delta}$ non potrà superare la quantità:

$$-g \int_{\theta' - \delta}^{\theta' + \delta} \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta' - \varepsilon}{2} d\theta - g \int_{\theta' - \delta}^{\theta' + \delta} \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta,$$

la quale, se ε' è il valore assoluto di ε , è minore di:

$$-g \int_{\theta' - \delta - \varepsilon'}^{\theta' + \delta + \varepsilon'} \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta' - \varepsilon}{2} d\theta - g \int_{\theta' - \delta}^{\theta' + \delta} \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta;$$

quindi, poichè pei valori di δ e $\delta + \varepsilon'$ inferiori a un limite finito, abbastanza piccolo, gli integrali che qui compariscono sono sempre minori di quella quantità che più ci piace, si conclude intanto che si può trovare un valore di δ sufficientemente piccolo, tale che per tutti i valori di ε inferiori in valore assoluto a un certo numero finito, e per tutti i valori di θ' l'integrale $\int_{2\delta}$ in valore assoluto sia minore di quella quantità che più ci piace.

Consideriamo ora l'altro integrale $\int_{2\pi - 2\delta}$, e per escludere il caso che il punto $\theta = \theta' + \varepsilon$ cada nell'intervallo di integrazione, supponiamo subito che ε in valore assoluto non raggiunga δ , ma sia per es. $< \frac{1}{2}\delta$, essendo δ il numero (che ora deve restar fisso) che abbiamo determinato poc'anzi.

Osservando che l'elemento dell'integrale può scriversi:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dp} \log \left\{ \cos \frac{\varepsilon}{2} + \cot \frac{\theta - \theta'}{2} \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \right\}^2 d\theta &= 2 \frac{du}{dp} \log \cos \frac{\varepsilon}{2} d\theta + \\ &+ \frac{du}{dp} \log \left\{ 1 + \cot \frac{\theta - \theta'}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right\}^2 d\theta, \end{aligned}$$

e il massimo valore assoluto di $\cot \frac{\theta - \theta'}{2}$ durante l'integrazione è $\cot \frac{\delta}{2}$, si vede subito che le quantità sotto i logaritmi non saranno mai zero, e l'integrale $\int_{2\pi - 2\delta}$ in valore assoluto sarà minore di:

$$-4g\pi \log \cos \frac{\varepsilon}{2} - 2g\pi \log \left\{ 1 - \cot \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon'}{2} \right\}^2,$$

essendo ε' il valore assoluto di ε ; e quindi pei valori di ε minori in valore assoluto di un numero finito e positivo ε_1 (che è un numero inferiore a δ e che rende sufficientemente prossime a uno le quantità $\cos \frac{\varepsilon_1}{2}$, e $1 - \cot \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_1}{2}$) l'integrale stesso per tutti i valori di θ' sarà minore di quella quantità che più ci piace; e così resta nuovamente dimostrato che i valori di u' , dati dalla (4) costituiscono una funzione continua di θ' .

4. Passiamo ora a fare le verificazioni relative ai valori della derivata $\frac{du'}{dp'}$ rispetto alla normale interna p' , quando ci si avvicina indefinitamente al contorno e sul contorno stesso.

Supponiamo perciò che i valori dati di $\frac{du}{dp}$ costituiscano una funzione finita e continua o avente soltanto un numero finito di discontinuità, e osserviamo che il valore di $\frac{du'}{dp'}$ nel punto $M(\rho', \theta')$ interno al cerchio è $-\frac{du'}{d\rho'}$, e si ha subito dalla (3). Per un teorema di SCHWARZ (m. c.) potremo dire intanto che entro il cerchio questi valori di $\frac{du'}{dp'}$ sono sempre finiti e continui, e restano finiti anche quando ci si avvicina indefinitamente al contorno, e avvicinandosi indefinitamente a punti del contorno ove nei valori dati di $\frac{du}{dp}$ non si ha discontinuità, $\frac{du'}{dp'}$ tende con continuità verso i valori dati corrispondenti, mentre avvicinandosi indefinitamente a punti del contorno, nei quali i valori dati hanno una discontinuità, $\frac{du'}{dp'}$ tende con continuità verso valori finiti differenti dipendentemente dalla direzione secondo cui ci si muove; e in particolare quando ci si muove nel senso del raggio $\frac{du'}{dp'}$ tende verso il valore medio fra i due valori dati:

$$\frac{du}{dp}(\theta' + 0) \text{ e } \frac{du}{dp}(\theta' - 0) \quad (*).$$

Questo ci permette di dire che quando, restando sempre nell'interno del

(*) Notiamo che se vi sono discontinuità nella serie dei valori dati di $\frac{du}{dp}$ noi supponiamo sempre che siano di quelle per le quali le corrispondenti quantità $\frac{du}{dp}(\theta' + 0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta' - 0)$ hanno un significato determinato.

cerchio, ci si avvicina indefinitamente al contorno la funzione u' data dalla (3), anche per ciò che riguarda la sua derivata $\frac{du'}{dp'}$ soddisfa alle condizioni che si sono poste; e così resta soltanto a far vedere che i valori che si hanno effettivamente per $\frac{du'}{dp'}$ dalla (3) sul contorno nei punti ove i valori dati $\frac{du}{dp}$ non hanno discontinuità sono precisamente questi valori dati.

Consideriamo perciò $\frac{du'}{dp'}$ come una funzione di ρ' e θ' che nei punti interni a C è definita dalla (2), e nei punti del contorno ove si ha continuità nei valori dati di $\frac{du}{dp}$ è definita dalla formola:

$$\frac{du'}{dp'} = -\frac{du}{dp},$$

e nei punti di discontinuità di $\frac{du}{dp}$ resta finita.

L'integrale $\int_0^{\rho'} \frac{du'}{dp'} d\rho'$ preso lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ dal centro fino al punto $M(\rho', \theta')$ interno a C (cioè per $\rho' < R$) si accorderà col valore di u' in questo punto; e poichè quando M si avvicina indefinitamente al contorno muovendosi sul raggio $\theta' = \text{cost.}$ tanto l'integrale $\int_0^{\rho'} \frac{du'}{dp'} d\rho'$ quanto la funzione u' variano con continuità e i loro valori limiti sono $\int_0^R \frac{du'}{dp'} d\rho'$ e u'_s , si conclude che la formola:

$$u' = \int_0^{\rho'} \frac{du'}{dp'} d\rho',$$

ove $\frac{du'}{dp'}$ è definita come è stato detto sopra, e u' è data dalla (3) sussisterà anche per $\rho' = R$, e perciò sarà (seguendo le notazioni del paragrafo precedente):

$$u'_\epsilon - u'_s = - \int_{R-\epsilon}^R \frac{du'}{dp'} d\rho';$$

e poichè $\frac{du'}{dp'}$ lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ è continua, indicando con $\frac{du_0}{dp}$ il

valore dato $\frac{du}{dp}(\theta')$ pei punti di continuità di questi valori, e il valore medio fra i due $\frac{du}{dp}(\theta' + 0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta' - 0)$ pei punti di discontinuità degli stessi valori, e osservando che il limite di $\frac{du'}{dp'}$ per $p' = R$ è $-\frac{du_0}{dp}$, si potrà scrivere:

$$u'_\varepsilon - u'_s = \varepsilon \left(\frac{du_0}{dp} + \varepsilon_1 \right)$$

ove ε_1 tende a zero con ε , e perciò sarà:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{u'_\varepsilon - u'_s}{\varepsilon} = \frac{du_0}{dp},$$

ciò che mostra appunto che i valori che prende effettivamente $\frac{du'}{dp'}$ sul contorno sono i valori dati nei punti ove questi valori non hanno discontinuità, e sono i valori medii fra i due $\frac{du}{dp}(\theta' + 0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta' - 0)$ nei punti di discontinuità degli stessi valori dati.

5. La funzione u' data dalla (3) soddisfa dunque a tutte le condizioni che si sono poste; e si può dire in conseguenza che qualunque siano i valori dati per $\frac{du}{dp}$, purchè costituiscano una funzione finita e continua o avente soltanto un numero finito di discontinuità e soddisfino alla condizione $\int \frac{du}{dp} ds = 0$, esiste sempre una funzione u' che soddisfa a tutte le condizioni poste in principio, e all'infuori di una costante additiva essa è unica, ed è data dalla formola (3). Essa è inoltre totalmente continua anche sul contorno; e nei punti θ' del contorno ove i valori dati $\frac{du}{dp}$ hanno una discontinuità, la sua derivata rispetto alla normale interna prende il valore medio fra i due $\frac{du}{dp}(\theta' + 0)$ e $\frac{du}{dp}(\theta' - 0)$.

È poi da notare che quando la condizione $\int \frac{du}{dp} ds = 0$ non fosse soddisfatta, non esisterebbe più una funzione che soddisfa a tutte le condizioni che ponemmo in principio; e quando fra queste condizioni si tralasciasse quella di mantenersi sempre finita nell'interno insieme alle sue derivate, per ottenere una funzione che soddisfa a tutte le altre condizioni basterebbe

prendere [a causa della (2)] la funzione $u' - \frac{R}{2\pi} \log \rho' \int_0^{2\pi} \frac{du'}{dp'} d\theta$, ove u' è data dalla formola (3). Questa funzione diviene logaritmicamente infinita all'origine, e sul contorno è ancora continua.

6. Farò ora vedere che quando i valori dati di $\frac{du}{dp}$ al contorno costituiscono una funzione $F(\theta)$ di θ finita continua e periodica (*) che soddisfa alla solita condizione $\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 0$, e ammette una derivata che è sempre finita ed è inoltre continua o ha soltanto un numero finito di discontinuità, la funzione corrispondente (3) ammette anche una derivata finita e continua lungo il contorno nel senso dell'arco.

Osserviamo infatti che lungo il contorno si ha:

$$u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta,$$

o anche:

$$u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi} \int_{-\theta'}^{2\pi - \theta'} F(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt;$$

e perciò sarà:

$$u'_s(\theta' + \varepsilon) - u'_s(\theta') = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t)\} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt,$$

e l'integrale che qui comparisce potrà al solito considerarsi come esteso al cerchio di raggio uno.

Immaginiamo ora fissati su questo cerchio il punto $t=0$ o $t=2\pi$, e i punti che corrispondono ai valori di t pei quali $F'(\theta' + t)$ è discontinua, uno dei quali potrà anche essere il punto $t=0$ stesso. Siccome questi punti sono in numero finito, potremo racchiuderli in altrettanti intervalli sufficientemente piccoli di ampiezza 2δ , ciascuno dei quali contenga soltanto uno degli stessi punti che potremo supporre esser quello di mezzo; e allora, indicando con $\int_{2\delta}^{(r)}$ gli integrali estesi a questi intervalli, e con \int_{σ_n} quelli corrispondenti

(*) Riguardando i valori di $F(\theta)$ come fissati nei punti corrispondenti del contorno, la periodicità si ha sempre quando in ogni punto la funzione è a un sol valore.

agli altri intervalli nei quali $F'(\theta' + t)$ è continua, potremo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{u'_s(\theta' + \varepsilon) - u'_s(\theta')}{\varepsilon} &= \frac{R}{2\pi\varepsilon} \sum_{\sigma_n} \int \{F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t)\} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt + \\ &+ \frac{R}{2\pi\varepsilon} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{(r)} \{F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t)\} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Ora si ha evidentemente per le ipotesi fatte:

$$F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t) = \int_{\theta' + t}^{\theta' + t + \varepsilon} F'(\theta) d\theta;$$

quindi se fra $\theta' + t$ e $\theta' + t + \varepsilon$ non cadranno discontinuità di $F'(\theta)$ si avrà:

$$F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t) = \varepsilon F'(\theta' + t + \alpha\varepsilon) \quad (5)$$

con α positivo e minore di uno, e se fra $\theta' + t$ e $\theta' + t + \varepsilon$ cadranno delle discontinuità di $F'(\theta)$ si avrà semplicemente:

$$F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t) = \varepsilon \mu$$

essendo μ un numero finito compreso fra il limite superiore e il limite inferiore dei valori di $F'(\theta' + t)$ fra $\theta' + t$ e $\theta' + t + \varepsilon$.

Indicando dunque con μ' il massimo (o limite superiore) fra i valori assoluti di $F'(\theta)$, si avrà in valore assoluto:

$$\frac{R}{2\pi\varepsilon} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{(r)} \{F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t)\} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt < -\frac{R\mu'}{2\pi} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{(r)} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt$$

e perciò prendendo δ sufficientemente piccolo la stessa somma potrà rendersi minore di quella quantità che più ci piace.

Supponiamo ora che ε in valore assoluto non raggiunga δ e sia per es.: $< \frac{1}{2}\delta$ essendo δ il numero che ora abbiamo determinato. Allora per gli integrali sarà sempre soddisfatta la condizione per la quale si ha la (5); e perciò sarà:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2\pi\varepsilon} \sum_{\sigma_n} \int \{F(\theta' + t + \varepsilon) - F(\theta' + t)\} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt &= \\ &= \frac{R}{2\pi} \sum_{\sigma_n} \int F'(\theta' + t + \alpha_m \varepsilon) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt, \end{aligned}$$

ove α_m è positivo e minore di uno.

Ma siccome negli intervalli σ_m , e così anche negli intervalli che si ottengono estendendo questi di $\frac{1}{2}\delta$ dalle due parti, la funzione $F'(\theta' + t)$ è continua, si può trovare un numero finito e positivo ε_1 tale che per tutti i punti t di questi intervalli e per tutti i valori di ε minori in valore assoluto di ε_1 la differenza $F'(\theta' + t + \varepsilon) - F'(\theta' + t)$ in valore assoluto sia minore di quella quantità β che più ci piace; quindi per questi valori di ε si avrà in valore assoluto:

$$\sum_{\sigma_m} \int F'(\theta' + t + \alpha_m \varepsilon) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt - \sum_{\sigma_m} \int F'(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt < -\beta \sum_{\sigma_m} \int \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt,$$

e questo ci permette ora di dire che per i valori di ε inferiori in valore assoluto a una quantità finita convenientemente scelta ε_1 la differenza:

$$\frac{u'(\theta' + \varepsilon) - u'_s(\theta')}{\varepsilon} - \frac{R}{2\pi} \sum_{\sigma_m} \int F'(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt$$

si manterrà minore di quella quantità che più ci piace.

Ma la somma $\sum_{\sigma_m} \int F'(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt$ non differisce da

$$\int_0^{2\pi} F'(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt$$

che per una quantità minore in valore assoluto di $-\mu' \sum_{\frac{2\delta}{2}}^{(r)} \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt$,

e che quindi può suppersi arbitrariamente piccola; dunque si ha evidentemente:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u'_s(\theta' + \varepsilon) - u'_s(\theta')}{\varepsilon} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt,$$

ovvero:

$$\frac{du'_s(\theta')}{d\theta'} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(\theta' + t) \log \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} dt = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(\theta) \log \operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta$$

e questa mostra appunto, che, colle ipotesi che abbiamo fatte su $F(\theta)$, la derivata della nostra funzione u' al contorno presa nel senso dell'arco è

sempre finita e determinata, ed è inoltre continua, giacchè l'integrale che compare nel secondo membro ha la stessa forma di quello che compare nel valore di u' al contorno e che si dimostrò già essere una funzione continua di θ' .

Questa proprietà potrebbe anche facilmente generalizzarsi.

7. È inoltre da notare che per quanto precede questa derivata $\frac{du'_s}{d\theta'}$ al contorno si può anche riguardare come il valore al contorno della funzione u' , per la quale i valori dati della derivata rispetto alla normale interna al contorno stesso fossero quelli della funzione $F'(\theta)$; e questo porta subito a dire che alla funzione u' data dalla (3) al contorno può applicarsi due volte la derivazione rispetto all'arco, quando anche la derivata prima della funzione $F(\theta)$ che corrisponde ai valori dati di $\frac{du}{dp}$ è sempre finita, continua e periodica, e la derivata seconda è anch'essa finita ed è pure continua od ha soltanto un numero finito di discontinuità.

E in generale sarà:

$$\frac{d^m u'_s}{d\theta'^m} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^{(m)}(\theta) \log \sec^2 \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta,$$

quando la funzione $F(\theta)$ oltre a soddisfare alla condizione $\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 0$

è periodica, finita e continua, essa e le sue derivate fino alla $(m-1)^a$ inclusive, e la derivata m^a è finita ed è pure continua, o ha soltanto un numero finito di discontinuità.

Inoltre si vede facilmente che in queste ipotesi si ha sempre:

$$\lim_{\rho' \rightarrow R} \left(\frac{d^m u'}{d\theta'^m} \right) = \frac{d^m u'_s}{d\theta'^m}.$$

Farò osservare che questa formola potrebbe dimostrarsi facilmente anche per la funzione della quale sono dati arbitrariamente i valori al contorno, quando questi valori soddisfano a tutte le condizioni che abbiamo indicate per la $F(\theta)$, esclusa quella espressa dalla equazione $\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 0$. In questo

caso però bisogna intendere esclusi i punti θ' corrispondenti alle discontinuità della serie delle derivate m^e dei valori dati, poichè in essi il valore limite di $\frac{d^m u'}{d\theta'^m}$ per $\rho' = R$ è la media fra i due $\frac{d^m u}{d\theta^m}(\theta' + 0)$ e $\frac{d^m u}{d\theta^m}(\theta' - 0)$.

8. La formola (3) conduce subito anche al valore di u' in serie. Osservando infatti che per $\rho' < R$ si ha:

$$\log\{R^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta') + \rho'^2\} = 2\log R - 2\sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{nR^n} \cos n(\theta - \theta'),$$

e la serie del secondo membro, lungo ogni cerchio interno al cerchio dato, è convergente in ugual grado, si troverà subito:

$$u' = -\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho'^n}{nR^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \cos n(\theta - \theta') d\theta \quad (6)$$

per tutti i punti interni al nostro cerchio; e se i valori dati di $\frac{du}{dp}$ costituiranno una funzione, che oltre ad essere finita e continua o avere soltanto un numero finito di discontinuità, è sviluppabile in serie di FOURIER per tutti i valori di θ , questa formola varrà anche sul cerchio, giacchè allora essendo convergente la serie $-\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \cos n(\theta - \theta') d\theta$, per un teorema di ABEL lo sarà anche la serie $-\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R}{n} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \cos n(\theta - \theta') d\theta$, e la sua somma sarà il limite per $\rho' = R$ della somma u' della serie:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{\rho'^n}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \cos n(\theta - \theta') d\theta$$

(ove $\rho' < R$), cioè u'_* (*).

In questo caso poi la serie derivata rispetto a ρ' convergerà essa pure anche per $\rho' = R$, e, siccome $\int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} ds = 0$, salvo le solite singolarità pei

(*) È da notare che per questo e perchè u' è continua sul contorno (§ 3) qualunque siano i valori dati di $\frac{du}{dp}$ purchè finiti, si può dire che quando $f(\theta)$ è una funzione finita tale che la serie di FOURIER corrispondente è sempre convergente, la serie trigonometrica:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n(\theta - \theta') d\theta$$

rappresenta sempre una funzione finita e continua di θ' . Ciò risulta subito anche da un teorema che ho dato nel § 5 della mia Memoria sulla serie di FOURIER (Ann. delle Univ. Tosc., t. XIV), nel caso però soltanto che la funzione abbia un numero finito di massimi e minimi e di discontinuità, od avendone un numero infinito soddisfatti a certe condizioni.

punti di discontinuità dei valori dati $\frac{du}{dp}$ e pei punti estremi 0 e 2π , essa avrà per somma $-\frac{du}{dp}$; e se $\frac{du}{dp}$ sarà finita, continua, e periodica e ammetterà una derivata finita e sviluppabile in serie di FOURIER, allora la serie che si ottiene, applicando la derivazione termine a termine rispetto a θ' alla serie che rappresenta u , ci darà il valore di $\frac{du'}{d\theta'}$, non solo pei punti interni ma anche pei punti del contorno; giacchè questa serie derivata sul contorno è la seguente:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp} \operatorname{sen} n(\theta - \theta') d\theta;$$

e questa, ponendo $\frac{du}{dp} = F(\theta)$, e integrando per parti nei differenti termini si trasforma nell'altra:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} F'(\theta) \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

la quale essendo convergente ed essendo quella che corrisponde ai valori al contorno della funzione per la quale i valori dati di $\frac{du}{dp}$ sono quelli di $F'(\theta)$, rappresenta appunto (§ 6) la derivata rispetto a θ' dei valori che si hanno al contorno per la funzione u' .

9. Il metodo che abbiamo seguito pel caso di un cerchio si applica subito anche al caso di due cerchi concentrici s e s' .

Indichiamo infatti con R e R' i raggi di questi cerchi, e supponiamo che s sia il cerchio maggiore, e $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ siano i valori dati di $\frac{du}{dp}$ su s e su s' , e siano finiti e continui e periodici e soddisfino alle note condizioni che si richiedono per essere sviluppabili in serie di FOURIER, cioè abbiano un numero finito di massimi e minimi o avendone un numero infinito soddisfino alla condizione $\lim D \log \delta = 0$, essendo D l'oscillazione nell'intervallo δ . Osservando che ora questi valori di $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ devono soddisfare alla condizione $\int_s \frac{du}{dp_s} ds = - \int_{s'} \frac{du}{dp_{s'}} ds'$, e i valori della funzione $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$ sul cerchio s

verranno ora ad essere $-R \frac{du}{dp_s}$ e sul cerchio s' saranno $R' \frac{du}{dp_{s'}}$, si potrà dire senz'altro (v. mia Mem. *Sulle funz. di una variab. comp.* in questi Annali tom. IV: o SCHWARZ mem. cit.) che se la funzione cercata esiste, il valore della funzione $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$ nel punto (ρ', θ') interno al campo che si considera sarà dato dalla formola:

$$\rho' \frac{du'}{d\rho'} = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} d\theta - \frac{R}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{\rho'^n} \frac{\rho'^{2n} - R^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} \cos n(\theta - \theta') d\theta + \left. \begin{aligned} &+ \frac{R'}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R'^n}{\rho'^n} \frac{R^{2n} - \rho'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_{s'}} \cos n(\theta - \theta') d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ora se si osserva che i coefficienti $\frac{R^n}{\rho'^n} \frac{\rho'^{2n} - R^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}}$, $\frac{R'^n}{\rho'^n} \frac{R^{2n} - \rho'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}}$ possono scriversi rispettivamente:

$$\frac{\frac{\rho'^n}{R^n}}{1 - \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}} - \frac{\frac{R'^n R'^n}{R^n \rho'^n}}{1 - \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}}, \quad \frac{\frac{R'^n}{\rho'^n}}{1 - \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}} - \frac{\frac{R'^n \rho'^n}{R^n R^n}}{1 - \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}},$$

e le serie:

$$\sum_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} \cos n(\theta - \theta') d\theta, \quad \sum_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_{s'}} \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

per le ipotesi fatte sui valori dati di $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ sono convergenti in ugual grado (*), applicando il solito teorema di ABEL si vedrà subito che il valore precedente di $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$ risulta dall'aggregato di quattro serie che sono convergenti in ugual grado in tutto il campo (il contorno inclus.), e questo mentre ci mostra che il valore stesso di $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$ è sempre finito e continuo e sul

(*) La proprietà di cui qui si fa uso che le serie di FOURIER corrispondenti a funzioni come le $\frac{du}{dp_s}$ e $\frac{du}{dp_{s'}}$ sono convergenti in ugual grado fu data da HEINE pel caso in cui queste funzioni oltre essere finite e continue hanno un numero finito di massimi e minimi. Essa però si estende facilmente anche al caso delle funzioni finite e continue che hanno un numero infinito di massimi e minimi e soddisfano alla condizione $\lim D \log \delta = 0$, essendo D l'oscillazione della funzione nell'intervallo δ .

contorno s , s' prende rispettivamente i valori $-R \frac{du}{dp_s}$ e $R' \frac{du}{dp_{s'}}$, ci mostra altresì che si può dividere per ρ' la equazione (7) e poi applicare l'integrazione per serie lungo un raggio qualunque $\theta' = \text{cost.}$ da un punto qualunque di questo raggio fino al punto $\rho = \rho'$, purchè questi punti siano entrambi contenuti entro il campo dato e anche sul contorno.

Si avrà dunque, eseguendo questa integrazione

$$u' = -R \frac{\log \rho'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} d\theta - \frac{R}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R^n}{n \rho'^n} \frac{\rho'^{2n} + R'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} \cos n(\theta - \theta') d\theta + \\ - \frac{R'}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R'^n}{n \rho'^n} \frac{\rho'^{2n} + R'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_{s'}} \cos n(\theta - \theta') d\theta + F(\theta'),$$

e poichè u' deve soddisfare alla equazione $\Delta^2 u' = 0$ e essere a un sol valore, si dovrà avere $F(\theta') = \text{cost.}$; e perciò sarà all'infuori di una costante:

$$u' = -R \frac{\log \rho'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} d\theta - \frac{R}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R^n}{n \rho'^n} \frac{\rho'^{2n} + R'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_s} \cos n(\theta - \theta') d\theta - \\ - \frac{R'}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R'^n}{n \rho'^n} \frac{\rho'^{2n} + R'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dp_{s'}} \cos n(\theta - \theta') d\theta.$$

Ora facendo sulle serie che compariscono in questo valore di u' osservazioni simili a quelle che abbiamo fatte sopra per le serie che compariscono in $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$, si vede subito che la funzione u' così determinata è finita continua e ad un sol valore nell'interno di C , e si mantiene tale anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso. D'altra parte le sue derivate entro C soddisfano evidentemente alle condizioni che abbiamo poste, e dal modo con cui essa è stata trovata risulta anche che la sua derivata rispetto alla normale resta finita e continua anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno prende i valori dati; quindi essa è appunto la funzione cercata.

Per la derivata $\frac{du'}{d\theta'}$ si hanno ancora le stesse proprietà che nel caso precedente.

10. Lo stesso processo può seguirsi per la determinazione della funzione u che nell'interno di una sfera è finita continua e a un sol valore

essa e le sue derivate e soddisfa alla equazione $\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$, e avvicinandosi indefinitamente al contorno si mantiene sempre finita e resta, almeno generalmente, anche continua sì essa che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ rispetto alla normale p al contorno contata verso l'interno, e al contorno questa derivata prende valori finiti dati ad arbitrio e che hanno tutt'al più un numero finito di discontinuità, e soddisfano alla condizione:

$$\int_{\sigma} \frac{du}{dp} d\sigma = 0$$

ove l'integrale è esteso alla superficie σ della sfera.

Si osservi perciò che anche in questo caso se u soddisfa alla equazione $\Delta^2 u = 0$, la funzione $\rho \frac{du}{d\rho}$ vi soddisfarà pure, e quindi se R è il raggio della sfera, pel punto (ρ', θ', ϕ') interno ad essa, si avrà come è noto:

$$\rho' \frac{du'}{d\rho'} = \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right)_{\rho=R} \frac{(R^2 - \rho'^2) d\sigma}{(R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ove l'integrale è esteso alla superficie σ della sfera di raggio R , $d\sigma$ è l'elemento superficiale $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ di questa sfera nel punto (R, θ, ϕ) , e γ è l'angolo dei raggi vettori del punto (ρ', θ', ϕ') e del punto (R, θ, ϕ) , talchè si ha:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi').$$

Ora, osservando che $\left(\rho \frac{du}{d\rho} \right)_{\rho=R} = -R \frac{du}{dp}$, si ha di qui:

$$\begin{aligned} \frac{du'}{d\rho'} = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{du}{dp} \frac{d\sigma}{\rho' (R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{du}{dp} \frac{d}{d\rho'} \left\{ \frac{1}{(R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\sigma, \end{aligned}$$

quindi applicando l'integrazione rispetto a ρ' sotto il segno integrale, e osservando che:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho'}{\rho' (R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ -\frac{1}{R} \log \{ R - \rho' \cos \gamma + (R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{1}{2}} \} + \frac{\log \rho'}{R} + \text{cost}, \end{aligned}$$

e $\oint \frac{du}{dp} d\sigma = 0$, si troverà, all'infuori di una costante:

$$u' = \frac{1}{4\pi R} \oint \frac{du}{dp} \left\{ \log \left\{ R - \rho' \cos \gamma + (R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{2R}{(R^2 - 2R\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\sigma;$$

e, ora quando si facessero su questo valore di u' le opportune verificazioni, si troverebbe che esso soddisfa a tutte le condizioni che abbiamo poste ed è in conseguenza la funzione cercata.

11. Tralasciamo di fare queste verificazioni, e passeremo invece a cercare il valore di u' in serie di funzioni sferiche, limitandoci per semplicità al caso in cui i valori dati di $\frac{du}{dp}$ costituiscono una funzione che è finita e continua e che su ogni linea della sfera ha un numero finito di massimi e minimi, o avendone un numero infinito è tale che le sue oscillazioni in vicinanza dei punti ove si hanno questi infiniti massimi e minimi sono di ordine uguale o superiore al primo rispetto all'intervallo in cui si prendono.

Per questo osserviamo che se esiste la funzione u' che noi cerchiamo, per la funzione $\rho' \frac{du'}{d\rho'}$ nel punto (ρ', θ', ϕ') deve aversi, come è noto:

$$\rho' \frac{du'}{d\rho'} = \frac{1}{4\pi} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{\rho'^n}{R^{n+1}} \int_{\omega} \left(\frac{du}{d\rho} \right)_{\rho=R} P_n d\omega,$$

essendo $d\omega$ l'elemento superficiale $\sin \theta d\theta d\phi$ della sfera ω di raggio uno, e essendo P_n le note funzioni sferiche di LEGENDRE; e poichè si ha:

$$\left(\frac{du}{d\rho} \right)_{\rho=R} = -\frac{du}{dp}, \text{ e } \int_{\omega} \frac{du}{dp} d\omega = 0,$$

dovrà essere:

$$\frac{du'}{d\rho'} = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} (2n+1) \frac{\rho'^{n-1}}{R^{n-1}} \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega. \quad (8)$$

Ora se si osserva che, per quanto dimostro in una Memoria che pubblicherò quanto prima sulle serie di funzioni sferiche, la funzione data $\frac{du}{dp}$, soddi-

sfacendo alle condizioni dette sopra, è sempre sviluppabile in serie di funzioni sferiche, e la serie corrispondente:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} (2n+1) \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega$$

è convergente in ugual grado su tutta la superficie della sfera, si concluderà subito che la serie che comparisce nella formola precedente è convergente in egual grado in tutto lo spazio racchiuso dalla sfera e sulla sfera stessa; e questo oltre a mostrarci che, qualunque siano i valori dati di $\frac{du}{dp}$, purchè soddisfino alle condizioni dette sopra, il valore precedente di $\frac{du'}{d\rho'}$ è sempre finito e continuo in tutto il campo (il contorno inclus.) e sulla superficie prende i valori dati, ci mostra altresì che alla serie che comparisce in $\frac{du'}{d\rho'}$ può applicarsi termine a termine l'integrazione definita lungo un raggio qualunque della sfera da $\rho'=0$ a $\rho'=\rho$, essendo $\rho' \leq R$.

Applicando questa integrazione si trova:

$$u' = -\frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{\rho'^n}{R^{n+1}} \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega;$$

e ora basta fare le opportune verificazioni per concludere che questa formola, all'infuori di una costante, determina la funzione cercata u' per tutti i punti interni alla sfera e sulla sfera stessa.

Per questo si osservi che siccome la serie:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} (2n+1) \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega$$

converge in ugual grado su tutta la superficie della sfera, altrettanto accadrà dell'altra:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n} \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega,$$

e quindi si può dire intanto che la funzione u' , oltre ad essere finita e continua nell'interno della sfera si mantiene tale anche avvicinandosi indefinitamente alla superficie stessa. Inoltre poichè la funzione $\rho'^n P_n$ come funzione di ρ' , θ' , ϕ' soddisfa alle condizioni che si richiedono per u' nell'in-

terno della sfera, altrettanto accadrà di u' ; e poichè pel modo con cui u' è stata dedotta dal valore (8) di $\frac{du'}{d\phi'}$ si vede subito che anche alla superficie sono soddisfatte le condizioni cui deve soddisfare la derivata rispetto alla normale interna, si conclude che u' soddisfa a tutte le condizioni che si sono poste ed è in conseguenza la funzione cercata.

Inoltre è da notare che, se $\frac{du}{dp}$ è una funzione di θ e ϕ , $F(\theta, \phi)$, che rispetto a ϕ ammette una derivata $\frac{dF}{d\phi}$ che soddisfa alle condizioni stesse che si sono poste per $\frac{du}{dp}$, la funzione u' ammetterà anche alla superficie una derivata rispetto a ϕ' che sarà finita e continua e il cui valore si otterrà applicando la derivazione termine a termine rispetto a ϕ' alla serie corrispondente:

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n} \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega.$$

Se si osserva infatti che questa serie derivata rispetto a ϕ' è la seguente:

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n} \int_{\omega} \frac{du}{dp} \frac{dP_n}{d\phi'} d\omega,$$

si vedrà subito che, applicando ai varii termini di essa la integrazione per parti rispetto a ϕ , coll'osservare che dalle note espressioni di P_n si ha:

$$\frac{dP_n}{d\phi'} = -\frac{dP_n}{d\phi},$$

essa si trasforma nell'altra:

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n} \int_{\omega} \frac{dF}{d\phi} P_n d\omega,$$

che è convergente in ugual grado; e quindi per teoremi noti sulle serie derivate si concluderà subito che la sua somma è finita e continua ed è appunto la derivata della somma della serie:

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n} \int_{\omega} \frac{du}{dp} P_n d\omega,$$

come volevamo dimostrare.

12. Mi piace ora d'indicare un metodo generale che spesso può servire per la determinazione di una funzione u di due variabili reali x e y che nell'interno di un campo connesso C soddisfa alle solite condizioni, e al contorno è tale che la sua derivata $\frac{du}{dp}$ rispetto alla normale interna prende dati valori che soddisfano alla condizione $\int \frac{du}{dp} ds = 0$.

Per questo consideriamo insieme alla funzione u la funzione v che nell'interno di C soddisfa alle due condizioni:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}.$$

Questa funzione v pei punti interni di C sarà data dalla equazione:

$$v = c + \int_{\sigma} \left(\frac{du}{dx} dy - \frac{du}{dy} dx \right),$$

ove c è una costante arbitraria e σ è una curva qualunque entro C che da un punto determinato (x_0, y_0) va al punto (x, y) ; quindi la funzione v che entro C corrisponde ad una data funzione u sarà unica e sarà finita e continua essa e le sue derivate e soddisfarà alla equazione $\Delta^2 v = 0$, e le sue derivate saranno sempre anche a un sol valore. Inoltre la stessa v sarà essa pure a un sol valore se il campo C è semplicemente connesso, e sarà tale anche quando C non sia semplicemente connesso se la funzione u soddisfarà a certe condizioni speciali; e la stessa v si manterrà finita e continua insieme alle sue derivate prime, anche avvicinandosi indefinitamente al contorno di C e sul contorno stesso quando ciò avvenga per u e per le sue derivate prime.

Viceversa quando sia data v , la funzione corrispondente u si avrà dalla formola:

$$u = c + \int_{\sigma} \left(\frac{dv}{dy} dx - \frac{dv}{dx} dy \right).$$

Ora, venendo ad essere $u + iv$ una funzione w monodroma finita e continua della variabile complessa $z = x + iy$, se si immaginano x e y e quindi u e v espresse per l'arco s di una delle curve del contorno di C (o di una curva qualunque entro C) e per la normale p a questa curva contata verso l'interno, si ha, come è noto:

$$\frac{dw}{dp} + i \frac{dw}{ds} = 0,$$

ovvero:

$$\frac{du}{dp} = \frac{dv}{ds}, \quad \frac{du}{ds} = -\frac{dv}{dp},$$

per tutti i punti interni a C e anche al contorno se allora $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ si mantengono finite e continue; quindi se rapporto a u si conoscono i valori di $\frac{du}{dp}$ al contorno, e questi sono tali che le derivate $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ risultino finite e continue anche al contorno, rapporto a v al contorno si conosceranno quelli di $\frac{dv}{ds}$ e quindi anche quelli di v all'infuori di una costante c , che può essere differente sui differenti pezzi s del contorno; e questi valori di v soddisfaranno alla condizione $\int \frac{dv}{ds} ds = 0$.

Ora s'immagini determinata la funzione v_1 che nell'interno di C soddisfa alle solite condizioni e sul contorno prende i valori $c_s + \int_0^s \frac{du}{dp} ds$. Questa

funzione v_1 , per ogni sistema di valori delle costanti c_s , sarà unica e a un sol valore; e quindi se la funzione cercata u esisterà e, oltre ad avere le derivate prime finite e continue anche al contorno, sarà tale che la funzione v che le corrisponde sia essa pure a un sol valore, questa funzione v sarà una delle funzioni v_1 che si otterrà particolarizzando convenientemente le costanti c_s , e perciò si avrà allora per la funzione cercata u :

$$u = c + \int_{\sigma} \left(\frac{dv_1}{dy} dx - \frac{dv_1}{dx} dy \right), \quad (9)$$

ove c è una costante e l'integrale è esteso a una curva qualunque σ che mantenendosi sempre nell'interno di C va dal punto determinato (x_0, y_0) al punto variabile (x, y) . Se poi la funzione cercata u non esistesse, o se la funzione v corrispondente non potesse essere a un sol valore, allora v_1 , essendo a un sol valore, non potrebbe essere questa funzione v , e il valore di u dato dalla (9) non sarebbe quello cercato, e esso perciò non risulterebbe monodromo, o la funzione v , non avrebbe le derivate prime finite e continue al contorno; quindi si può dire che determinata in ogni caso una funzione v_1 colla condizione che al contorno prenda i valori $c_s + \int_0^s \frac{du}{dp} ds$

ove le quantità c_s sono costanti che possono essere differenti sui differenti pezzi del contorno, se questa funzione al contorno avrà anche le derivate prime finite e continue, e se le costanti c_s potranno determinarsi in modo che la funzione u data dalla (9) risulti a un sol valore, questa funzione u sarà appunto la funzione cercata (*).

È da notare che quando le derivate di v_1 al contorno risultassero infinite, potrebbe però avvenire che la funzione u data dalla (9) fosse ancora la funzione cercata, e per decidere la questione basterebbe fare le opportune verificazioni.

Inoltre è da notare che nel caso che il campo C sia semplicemente connesso, la condizione di monodromia della funzione (9) è sempre soddisfatta.

Applicando il metodo che risulta dalle considerazioni esposte alla ricerca della funzione u nel caso del cerchio si trovano le formole dei §§ 1 e 8, e applicandole al caso di due cerchi, si ritrova ancora la formola del § 9 tutte le volte che sia soddisfatta la condizione $\int \frac{du}{dp_s} ds = 0$, che è quella della monodromia tanto per la funzione u data dalla (9) quanto per la funzione che abbiamo indicato con v .

Il prof. BETTI aveva in sostanza già usato questo metodo per determinare la distribuzione delle correnti elettriche in una lastra rettangolare. (Nuovo Cimento, ser. II, vol. III). Aggiungo che, se ben mi ricordo, il sig. PRYM mi diè cenno di questo metodo in una recente conversazione che ebbi il piacere di tenere con lui intorno ai risultati che io aveva allora ottenuti.

13. Passiamo ora a mostrare come il metodo che abbiamo seguito per determinare, nel caso del cerchio, di due cerchi o della sfera, la funzione u che soddisfa alle solite condizioni quando sono dati i valori di $\frac{du}{dp}$ al contorno, serve anche per la determinazione della funzione u per gli stessi campi

(*) Che la funzione u sia unica quando essa e la derivata $\frac{du}{dp}$ devono essere sempre finite anche avvicinandosi indefinitamente al contorno, e devono restare continue per tutto tranne nei punti di discontinuità dei valori dati (che supponiamo in numero finito), risulta subito dalla formola nota:

$$\int u \frac{du}{dp} d\sigma = - \int \int \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right\} dx dy,$$

ove l'integrale del primo membro è esteso a una curva vicina quanto si vuole al contorno, e quello del secondo è esteso al campo racchiusa da questa curva.

quando si richiede che nell'interno siano soddisfatte le solite condizioni, e avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso la funzione e la sua derivata $\frac{du}{dp}$ si mantengano finite e generalmente anche continue, e sul contorno una data funzione lineare $\alpha u - \beta \frac{du}{dp}$ di u e di $\frac{du}{dp}$ prenda valori ξ dati ad arbitrio.

Studiamo più specialmente il caso del cerchio, e supponiamo che i valori dati ξ costituiscano una funzione finita e continua o avente soltanto un numero finito di discontinuità e sviluppabile in serie di FOURIER.

Considerando la funzione $U = \alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{du}{dp}$, si vede subito che nell'interno del cerchio dovrà essere finita e continua e a un sol valore essa e le sue derivate e dovrà soddisfare alla equazione $\Delta^2 U = 0$; quindi (servendosi dello sviluppo in serie che è più comodo) dovrà essere:

$$\alpha u' + \frac{\beta}{R} \frac{du'}{dp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{du}{dp} \right)_{p=R} d\theta + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} \left(\alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{du}{dp} \right)_{p=R} \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

e poichè sul contorno deve aversi:

$$\alpha u + \frac{\beta}{R} \frac{du}{dp} = \alpha u - \beta \frac{du}{dp} = \xi,$$

sarà:

$$\alpha u' + \frac{\beta}{R} \frac{du'}{dp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

ovvero, supponendo β diverso da zero:

$$\frac{R\alpha}{\beta} u' + \frac{du'}{dp} = \frac{R}{2\beta\pi} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\beta\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta;$$

e, per le ipotesi fatte su ξ , la serie del secondo membro sarà convergente in tutto il campo incluso il contorno, e lungo ogni raggio dal centro al contorno inclusive sarà anche convergente in ugual grado, e separati con piccoli spazii superficiali i punti di discontinuità di ξ , nello spazio restante essa sarà anche continua e sul contorno prenderà i valori dati ξ .

Consideriamo ora separatamente i due casi di $\frac{\alpha}{\beta}$ positivo e $\frac{\alpha}{\beta}$ negativo, trascurando il caso di $\frac{\alpha}{\beta} = 0$ che già è stato qui considerato.

Osserviamo che, se si pone $R \frac{\alpha}{\beta} = k$, e si moltiplica per ρ'^{k-1} , si ha dalla precedente:

$$\frac{d}{d\rho'}(\rho'^k u') = \frac{R \rho'^{k-1}}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^{n+k-1}}{R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta; \quad (10)$$

si vedrà subito che quando $\frac{\alpha}{\beta}$ o k è positivo, integrando lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ dal punto $\rho' = 0$ fino al punto $\rho' = \rho'$, essendo $\rho' \leq R$, e osservando che la costante d'integrazione deve prendersi uguale a zero, si ha:

$$\rho'^k u' = \frac{R \rho'^k}{2\pi\beta k} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^{n+k}}{(n+k)R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

e quindi infine:

$$u' = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{\left(n + R \frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta, \quad (11)$$

pel valore di u' in un punto qualunque (ρ', θ') interno a C o sul contorno, quando $\frac{\alpha}{\beta}$ sia positivo; e poichè colle solite osservazioni e con quelle fatte nella nota al § 8, si trova che questo valore di u' è finito e continuo in tutto il campo C incluso il contorno e soddisfa a tutte le altre condizioni che si sono poste, si conclude che esso è appunto il valore cercato di u' nel caso che ora consideriamo di α e β dello stesso segno.

Consideriamo ora il caso in cui α e β sono di segno contrario, e supponiamo dapprima che il rapporto $R \frac{\alpha}{\beta}$ non sia un numero intero negativo.

Allora integrando al solito la equazione (10) lungo il raggio $\theta' = \text{cost.}$ dal punto $\rho' = \rho_0$ al punto $\rho' = \rho'$, ove ρ_0 non è zero e $\rho' \leq R$, si trova:

$$u' = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{\left(n + R \frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta + \frac{F(\theta')}{\rho'^k},$$

essendo $F(\theta')$ una funzione di θ' che oltre ad essere finita continua e a un

sol valore insieme alle sue derivate per tutti i valori di θ' e avere il periodo 2π , deve essere tale che la funzione $\frac{F(\theta')}{\rho'^k}$ soddisfi alla equazione $\Delta^2 = 0$.

Ma ciò non può ottenersi (perchè k non è intero) a meno che non sia $F(\theta') = 0$; quindi anche in questo caso si ha la (11) che soddisfa ancora a tutte le condizioni poste.

Se poi k è un numero intero negativo $-m$, allora si avrà dalla (10):

$$u' = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\rho'^n}{\left(n + R \frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta +$$

$$+ \frac{\rho'^m \log \rho'}{\pi\beta R^{m-1}} \int_0^{2\pi} \xi \cos m(\theta - \theta') d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\left(n + R \frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta +$$

$$+ F(\theta') \rho'^m,$$

essendo $F(\theta')$ una funzione di θ' che, oltre ad essere finita, continua e a sol valore essa e le sue derivate per tutti i valori di θ' e avere il periodo 2π , deve esser tale che la funzione:

$$U = \frac{\rho'^m \log \rho'}{\pi\beta R^{m-1}} \int_0^{2\pi} \xi \cos m(\theta - \theta') d\theta + F(\theta') \rho'^m$$

soddisfi alla equazione $\Delta^2 U = 0$.

Ma per queste condizioni si può porre:

$$\int_0^{2\pi} \xi \cos m(\theta - \theta') d\theta = \lambda_m \cos m\theta' + \mu_m \sin m\theta'$$

$$F(\theta') = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta' + b_n \sin n\theta')$$

e alla serie di FOURIER, che qui abbiamo presa per rappresentare $F(\theta')$, può applicarsi la derivazione quante volte si vuole; quindi si vede subito che tutte le condizioni precedenti non possono soddisfarsi a meno che λ_m e μ_m non siano nulli e $F(\theta')$ non si riduca alla forma:

$$a_m \cos m\theta' + b_m \sin m\theta';$$

e poichè quando queste condizioni siano soddisfatte il valore precedente di u' prende la forma:

$$u' = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} \xi d\theta + \frac{R}{\pi\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\left(n + R \frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_0^{2\pi} \xi \cos n(\theta - \theta') d\theta +$$

$$+ \rho'^m (a_m \cos m\theta' + b_m \sin m\theta'). \quad (12)$$

ove nella serie $\sum_{n=1}^{\infty} (m)$ deve lasciarsi il termine corrispondente a $n = -R \frac{\alpha}{\beta} = m$, e questo valore soddisfa a tutte le condizioni che si sono poste, si conclude che in questo caso la funzione u' data dalla formola precedente (12) è appunto quella richiesta.

Si può dire adunque che nel caso in cui $R \frac{\alpha}{\beta}$ non è un intero negativo la funzione richiesta u' esiste, ed è pienamente determinata qualunque siano i valori dati ξ di $\alpha u - \beta \frac{du}{dp}$ al contorno, purchè questi valori siano sviluppabili in serie di FOURIER, e la sua espressione analitica si ha dalla (11); e quando $R \frac{\alpha}{\beta}$ sia un intero negativo $-m$, i valori ξ non potranno essere dati arbitrariamente ma dovranno soddisfare alle due condizioni:

$$\int_0^{2\pi} \xi \cos m\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \xi \sin m\theta d\theta = 0;$$

e quando queste condizioni siano soddisfatte, la funzione u' esisterà ancora e sarà data dalla (12) ove a_m e b_m sono costanti arbitrarie, e quindi essa non sarà del tutto determinata, e per renderla tale potremo dare per es. arbitrariamente il valore della funzione in due punti diversi dal centro del cerchio.

È poi da notare che anche nel caso attuale i valori di u' al contorno costituiscono una funzione continua di θ' ; e se i valori dati di ξ apparterranno ad una funzione di θ finita, continua e periodica che ammette una derivata ξ' , sviluppabile essa pure in serie di FOURIER, agli stessi valori di u' al contorno potrà applicarsi la derivazione anche rispetto a θ' , e questa derivata sarà finita e continua, e corrisponderà ai valori al contorno della funzione u' , per la quale i valori dati di $\alpha u - \beta \frac{du}{dp}$ sono quelli della funzione ξ' .

In modo simile si tratta il caso di due cerchi concentrici e quello della sfera.

Nel caso della sfera, quando i valori ξ costituiscono una funzione finita e continua in tutti i punti e che, se su qualche linea ha un numero infinito di massimi e minimi, le sue oscillazioni in vicinanza dei punti corrispondenti sono di ordine uguale o superiore al primo rispetto all'intervallo in

cui si prendono, il valore della funzione u' viene dato dalla formola:

$$u' = \frac{R}{4\pi\beta} \sum_0^\infty \frac{\rho'^n}{\left(n + R\frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_\omega \xi P_n d\omega, \quad (13)$$

quando $R\frac{\alpha}{\beta}$ non è un numero intero negativo; e se $R\frac{\alpha}{\beta}$ è un numero intero negativo $-m$, allora bisogna che si abbia:

$$\int_\omega \xi P_m d\omega = 0,$$

e il valore u' prende allora la forma:

$$u' = \frac{R}{4\pi\beta} \sum_0^\infty \frac{\rho'^n}{\left(n + R\frac{\alpha}{\beta}\right) R^n} \int_\omega \xi P_n d\omega + \rho'^m Y'_m,$$

ove Y'_m è la funzione sferica generale dell'ordine m , e nella serie \sum_0^∞ deve lasciarsi il termine corrispondente a $n = -R\frac{\alpha}{\beta} = m$.

È da notare che quando $R\frac{\alpha}{\beta}$ è positivo, le formole precedenti risolvono il problema della determinazione delle temperature stazionarie in un disco circolare di grossezza trascurabile, quando non si disperde calore perpendicolarmente al disco, o nel cilindro circolare pieno di lunghezza indefinito quando la temperatura è la stessa in tutti i punti della stessa parallela all'asse, e nella sfera, quando il contorno del disco o la superficie del cilindro e della sfera sono all'aria libera che ha una data temperatura $\frac{\xi}{\alpha}$. Esse poi conducono alla soluzione dello stesso problema anche pel caso che in un punto del disco o della sfera o lungo una retta parallela all'asse nel cilindro vi sia una sorgente calorifica costante, giacchè per i valori di u' corrispondenti a questi casi basta, trattandosi del disco o del cilindro, aggiungere al secondo membro della formola (11) il termine $A \log \delta$ e cambiarvi ξ in $\xi - A \left(\alpha \log \delta + \frac{\beta}{\delta} \frac{d\delta}{d\rho'} \right)_{\rho'=R}$, e trattandosi della sfera aggiungere al secondo membro della (13) il termine $\frac{A}{\delta}$ e cambiarvi ξ in:

$$\xi - A \left(\frac{\alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta^2} \frac{d\delta}{d\rho'} \right)_{\rho'=R},$$

essendo A una costante e δ la distanza dal punto del disco o della sfera o di ciascuna sezione orizzontale del cilindro ove esiste la sorgente calorifica al punto variabile di coordinate (ρ', θ') o (ρ', θ', ϕ') situato esso pure sul disco o sulla sfera o sulla stessa sezione del cilindro; giacchè u' in vicinanza della sorgente calorifica sul disco o sulla sezione orizzontale del cilindro si riduce alla forma $A \log \delta + \text{funz. cont.}$ e nella sfera si riduce invece alla forma $\frac{A}{\delta} + \text{funz. cont.}$

14. Mi piace ora di mostrare che il metodo seguito nella trattazione dei problemi precedenti, come può evidentemente servire per campi diversi da quelli che qui ho considerato, può anche servire per altri problemi, e in particolare per la determinazione della funzione u' , per la quale al contorno non sono dati i valori di essa o della sua derivata prima rispetto alla normale interna, ma sono dati invece quelli della sua derivata seconda rispetto alla stessa normale o quelli della derivata terza, ecc.

Supponiamo infatti che siano dati i valori della derivata m -esima $\frac{d^m u}{dp^m}$. Limitandoci al caso del cerchio si osserva che siccome la funzione $U = \rho^m \frac{d^m u}{dp^m}$ dovrà essa pure soddisfare alla condizione $\Delta^2 U = 0$, ecc., si avrà, servendosi dello sviluppo in serie:

$$\frac{d^m u'}{ds^m} = (-1)^m \frac{R^n}{2\pi \rho'^m} \int_0^{2\pi} \frac{d^n u}{dp^n} d\theta + \frac{(-1)^m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho'^{n-m}}{R^{n-m}} \int_0^{2\pi} \frac{d^m u}{dp^m} \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

e perciò si concluderà intanto che onde u sia sempre finita insieme alle sue derivate nell'interno del cerchio, i valori dati di $\frac{d^m u}{dp^m}$ dovranno soddisfare alle condizioni:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^n u}{dp^n} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d^n u}{dp^n} \cos s\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d^n u}{dp^n} \sin s\theta d\theta = 0,$$

per $s = 1, 2, 3, \dots, m-1$; e quando queste condizioni siano soddisfatte sarà:

$$u' = \sum_0^{m-1} \rho'^s f_s(\theta') + \frac{(-1)^m}{\pi} \sum_m^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{n-m} n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)} \int_0^{2\pi} \frac{d^m u}{dp^m} \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

ove le $f_s(\theta')$ devono essere funzioni di θ' finite, continue e a un sol valore

e col periodo 2π esse e le loro derivate e devono essere tali che la funzione $\sum_0^{m-1} \rho'^s f_s(\theta')$ soddisfi alla equazione $\Delta^2 = 0$.

Questo porta subito che si abbia:

$$f_s(\theta') = a_s \cos s\theta' + b_s \sin s\theta',$$

con a_s e b_s costanti arbitrarie; quindi dovremo avere:

$$u' = \sum_0^{m-1} \rho'^s (a_s \cos s\theta' + b_s \sin s\theta') + \\ + \frac{(-1)^n}{\pi} \sum_m^\infty \frac{\rho'^n}{R^{n-m} n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)} \int_0^{2\pi} \frac{d^n u}{d p^n} \cos n(\theta - \theta') d\theta,$$

e ora si verificherebbe facilmente che questo valore di u' soddisfa a tutte le condizioni che si richiedono, e quindi esso è appunto quello cercato.

15. In ultimo credo utile di mostrare che i risultati precedenti, almeno pei campi qui considerati, possono estendersi anche al caso più generale in cui la funzione da determinarsi U , al contorno o alla superficie limite deve soddisfare alle condizioni poste in questa memoria o a quelle ricordate in principio, e nell'interno deve essere finita continua e a un sol valore insieme alle sue derivate prime e alle derivate seconde $\frac{d^2 U}{dx^2}$, $\frac{d^2 U}{dy^2}$, o $\frac{d^2 U}{dx^2}$, $\frac{d^2 U}{dy^2}$, $\frac{d^2 U}{dz^2}$, e deve soddisfare alla equazione $\Delta^2 U = f$, ove f è una funzione conosciuta dei punti dello stesso campo che insieme alle derivate prime e alle derivate seconde $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dy^2}$, o $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dy^2}$, $\frac{d^2 f}{dz^2}$, è finita continua e a un sol valore in tutto il campo (il contorno o la superficie limite inclus.)

Sia perciò U la funzione da determinarsi in un campo connesso C a due o a tre dimensioni (*), e per essa siano dati i valori di U o quelli di $\frac{dU}{dp}$ al contorno s o sulla superficie limite σ ; e nel caso che siano dati questi ultimi

(*) Diciamo esplicitamente che, onde esser sicuri delle formole che qui si usano, noi ammettiamo sempre che pel campo C possano tracciarsi nel suo interno delle curve o delle superficie i cui punti corrispondano uno ad uno a quelli del contorno o della superficie limite e per modo che questo contorno o questa superficie e le loro normali possano riguardarsi come limiti di quelle curve e di quelle superficie stesse e delle loro normali.

supponiamo che oltre a soddisfare alle solite condizioni, essi soddisfino anche all'altra:

$$\int_s \frac{du}{dp} ds = - \int_C \int f dx dy, \text{ o: } \int_\sigma \frac{du}{dp} d\sigma = - \int_C \int \int f dx dy dz, \quad (14)$$

secondochè il campo C è a due o a tre dimensioni, la quale come è noto è conseguenza necessaria delle altre condizioni cui ora si deve soddisfare.

Ponendo: $U = u_1 + u_2$, si vede subito che se riusciremo a determinare una funzione u_1 che nell'interno del campo C soddisfi alla equazione $\Delta^2 u_1 = f$, e alle altre condizioni che si sono poste per u , e al contorno s o sulla superficie limite σ soddisfi semplicemente alla condizione di essere ancora finita e continua essa soltanto, o essa e le sue derivate prime, nel qual caso si avrà anche necessariamente:

$$\int_s \frac{du_1}{dp} ds = - \int_C \int f dx dy, \text{ o: } \int_\sigma \frac{du_1}{dp} d\sigma = - \int_C \int \int f dx dy dz,$$

la questione potrà dirsi risolta, poichè essa si ridurrà allora a determinare nel campo C una funzione u_2 che nell'interno soddisfi alla equazione $\Delta^2 u_2 = 0$ e alle altre condizioni solite, e al contorno s o sulla superficie limite σ essa o la sua derivata $\frac{du_2}{dp}$ prendono rispettivamente i valori noti $U - u_1$, o $\frac{dU}{dp} - \frac{du_1}{dp}$, gli ultimi dei quali, per le ipotesi fatte, soddisfaranno evidentemente all'una o all'altra delle due condizioni:

$$\int_s \left(\frac{dU}{dp} - \frac{du_1}{dp} \right) ds = 0, \quad \int_\sigma \left(\frac{dU}{dp} - \frac{du_1}{dp} \right) d\sigma = 0,$$

secondochè il campo C è a due o a tre dimensioni.

Ora questa funzione u_1 è subito conosciuta, perchè se r indica la distanza di un punto di coordinate (x, y) o (x, y, z) da un altro punto M' di coordinate (x', y') o (x', y', z') situato nel campo C (il contorno o la superficie incl.), per un teorema noto e del resto facilmente dimostrabile, si ha che l'integrale $\frac{1}{2\pi} \int_C \int \log r dx dy$ nel caso del campo a due dimensioni, e l'altro $-\frac{1}{4\pi} \int_C \int \int \frac{f dx dy dz}{r}$ nel caso del campo a tre dimensioni, soddisfano nel campo C a tutte le condizioni che si richiedono per u_1 , e al contorno o alla

superficie hanno sempre anche le derivate prime finite e continue; quindi si può prendere senz'altro per il valore u'_1 di u_1 nel punto M' :

$$u'_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_C f \log r \, dx \, dy,$$

nel caso del campo a due dimensioni, e:

$$u'_1 = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C \frac{f \, dx \, dy \, dz}{r},$$

nel caso del campo a tre dimensioni; e così la questione che ci eravamo proposti viene sempre ridotta alla questione analoga pel caso della equazione $\Delta^2 = 0$, e ammette perciò sempre una soluzione quando quest'ultima l'ammette.

E così in particolare si può dire che nel caso del cerchio di raggio R , secondochè sono dati i valori di U o di $\frac{dU}{dp}$ al contorno, anche se questi valori hanno un numero finito di discontinuità, il valore U' della funzione cercata U nel punto interno $M'(\rho', \theta')$ è dato rispettivamente dalle formole:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')] \rho \, d\rho \, d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U - u_1)_s \frac{(R^2 - \rho'^2) d\theta}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')},$$

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')] \rho \, d\rho \, d\theta + \\ + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{dp} + \frac{du'_1}{d\rho} \right)_s \log[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')] \, d\theta,$$

essendo:

$$u'_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')] \rho \, d\rho \, d\theta;$$

e per la sfera di raggio R il valore U' di U nel punto $M'(\rho', \theta', \phi')$ è dato invece dalle formole:

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{f \, dS}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi R} \int_S (U - u'_1)_\sigma \frac{(R^2 - \rho'^2) d\sigma}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{f dS}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{dU}{dp} + \frac{du'_1}{d\rho'} \right) \left\{ \log [R - \rho' \cos \gamma + (R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}] - \right.$$

$$\left. - \frac{2R}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\sigma,$$

ove:

$$u'_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{f dS}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}},$$

σ e S sono la superficie e il volume della sfera, e γ è l'angolo che il raggio vettore del punto $M'(\rho', \theta', \phi')$ fa con quello del punto $M(\rho, \theta, \phi)$, o $M(R, \theta, \phi)$ cui si riferiscono gli elementi corrispondenti degli integrali, e pel quale si ha in conseguenza:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi').$$

S'intende però che, mentre quando sono dati i valori di U al contorno o sulla superficie la funzione è pienamente determinata, quando sono dati invece i valori di $\frac{dU}{dp}$ la funzione è determinata soltanto all'infuori di una costante; e perciò in questo caso ai valori precedenti di U' potrebbe aggiungersi una costante arbitraria.

16. È poi da osservare che siccome per la funzione ausiliaria u_1 che qui comparisce, in tutti i punti (x', y') interni a un campo C di due dimensioni si ha, da formole note:

$$u'_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_C f \log r dx dy + \frac{1}{2\pi} \int_s \left\{ \log r \frac{du_1}{dp} - u_1 \frac{d \log r}{dp} \right\} ds,$$

e per il campo a tre dimensioni si ha invece:

$$u'_1 = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C \frac{f dx dy dz}{r} - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{r} \frac{du_1}{dp} - u_1 \frac{d \frac{1}{r}}{dp} \right\} d\sigma,$$

si può dire evidentemente che per ogni punto interno al campo C la stessa funzione u_1 , nel caso che il campo sia a due dimensioni, soddisfa alla equazione:

$$\int_s \left\{ \log r \frac{du_1}{dp} - u_1 \frac{d \log r}{dp} \right\} ds = 0,$$

e nel caso che il campo sia a tre dimensioni soddisfa invece all'altra:

$$\int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{r} \frac{du_1}{dp} - u_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dp} \right\} d\sigma = 0.$$

17. Supponiamo ora che U sia una funzione qualunque che nell'interno del campo C soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = f$, e alle altre condizioni solite, e al contorno o alla superficie è finita e continua insieme alle sue derivate prime. Indicando con ϕ un'altra funzione che al contorno o alla superficie soddisfa ancora a queste condizioni, e nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 \phi = 0$, e alle altre condizioni solite, si deduce subito da formole note che il valore U' di U nel punto M' di coordinate (x', y') o (x', y', z') interno a C , nel caso del campo a due dimensioni, è dato dalla formola:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \iint_C f(\log r + \phi) dx dy + \frac{1}{2\pi} \int_s \left\{ (\log r + \phi) \frac{dU}{dp} - U \frac{d(\log r + \phi)}{dp} \right\} ds$$

e nel caso del campo a tre dimensioni è dato invece dall'altra:

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C f \left(\frac{1}{r} + \phi \right) dx dy dz - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left\{ \left(\frac{1}{r} + \phi \right) \frac{dU}{dp} - U \frac{d\left(\frac{1}{r} + \phi \right)}{dp} \right\} d\sigma;$$

e quindi se il campo C sarà tale che per ogni suo punto (x', y') o (x', y', z') esista una funzione di GREEN corrispondente, prendendo per ϕ questa funzione si avrà:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \iint_C f(\log r + \phi) dx dy - \frac{1}{2\pi} \int_s U \frac{d(\log r + \phi)}{dp} ds, \quad (15)$$

pel campo a due dimensioni; e

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \iiint_C f \left(\frac{1}{r} + \phi \right) dx dy dz + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} U \frac{d\left(\frac{1}{r} + \phi \right)}{dp} d\sigma \quad (16)$$

pel campo a tre dimensioni.

18. Considerando ora il caso di un campo C a due dimensioni, supponiamo che esso sia tale che possano sempre tracciarsi nel suo interno una serie di curve s_i che vadano avvicinandosi indefinitamente ad s come loro limite, e che formino dei campi C_i tali che per ogni punto (x', y') interno ad essi esista sempre una corrispondente funzione di GREEN ϕ_i

dotata della proprietà che il suo valore in ogni punto (x, y) dello stesso campo (il contorno s_1 inclus.), coll'avvicinarsi di s_1 ad s , tenda verso il valore di ϕ nello stesso punto, e vi tenda con uguale rapidità in tutti i punti (x, y) (*), e la stessa proprietà sussista ancora pei valori di $\frac{d\phi_1}{dp_1}$ e $\frac{d\phi}{dp}$ nei punti corrispondenti dei contorni s_1 ed s ; e dimostriamo che allora la formola precedente (15) varrà anche nel caso in cui al contorno per le sue derivate prime non si pone nessuna condizione, e per la funzione U si richiede soltanto che essa resti inferiore a un numero finito anche avvicinandosi indefinitamente al contorno e sul contorno stesso, e, tolti tutt'al più su esso un numero finito di punti, in tutti gli altri si mantenga ancora continua.

Si osservi per questo che una tale funzione U nel campo C_1 soddisfarà sempre alle condizioni per le quali si ha la (15), e perciò sarà:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \iint_{C_1} f(\log r + \phi_1) dx dy - \frac{1}{2\pi} \int_{s_1} U_1 \frac{d(\log r + \phi_1)}{dp_1} ds_1;$$

e poichè, supponendo che $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ siano i punti di discontinuità di U al contorno s di C , e escludendoli con intervalli arbitrariamente piccoli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, il secondo membro della (15) può scriversi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{C_1} f(\log r + \phi) dx dy + \frac{1}{2\pi} \iint_{C-C_1} f(\log r + \phi) dx dy - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{s-\Sigma\delta_n} U \frac{d(\log r + \phi)}{dp} ds - \sum \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_n} U \frac{d(\log r + \phi)}{dp} ds, \end{aligned}$$

per le ipotesi fatte, si concluderà subito che esisterà una curva s' tutta interna a C e tale che per tutti i contorni s_1 compresi fra s' ed s il secondo membro della formola precedente differisca da quello della (15) meno di quella quantità che più ci piace; e questo basta evidentemente per poter dire che la (15) sussiste anche nel caso che qui consideriamo.

(*) Intendiamo dire con ciò che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ deve esistere una curva s' tutta interna a C , e tale che per tutte le curve s_1 comprese fra s' ed s si abbia numericamente $\phi - \phi_1 < \sigma$ per tutti i punti (x, y) del campo C_1 (il contorno s_1 inclus.)

Similmente si vede che quando il campo C sia a tre dimensioni e soddisfi a condizioni analoghe, la formola (16) varrà anche per ogni funzione U per la quale si richiede soltanto che nell'interno di C soddisfi ancora alle solite condizioni, e avvicinandosi indefinitamente alla superficie e sulla superficie stessa resti sempre numericamente inferiore a un numero finito, e tolti tutt'al più su questa superficie un numero finito di punti o un numero finito di linee, in tutti i punti restanti sia ancora continua.

19. Le formole precedenti (15) e (16) suppongono che sia nota a priori l'esistenza della funzione U che nell'interno di C soddisfa alle solite condizioni, e al contorno o sulla superficie prende i valori che compariscono negli ultimi integrali delle stesse formole. Ma, per quanto si è detto nel § 15, qualunque siano questi valori al contorno o alla superficie, se il campo C è tale che per esso esista una funzione U_2 che al contorno o alla superficie prende valori dati arbitrariamente e nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U_2 = 0$, e alle altre condizioni solite (*), esiste pure una e una sola funzione U che al contorno o sulla superficie prende i valori dati, e nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = f$; quindi in questo caso si può dire evidentemente che se il campo C è tale che per esso la funzione di GREEN corrispondente soddisfi alle condizioni dette sopra, la funzione U che al contorno o alla superficie prende i valori dati esisterà pure, e sarà quella data dalle formole (15) o (16) secondochè il campo è a due o a tre dimensioni.

E su queste formole si può notare che il secondo termine è la funzione U_2 che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U_2 = 0$, e al contorno prende i valori dati, e il primo termine:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_C f(\log r + \phi) dx dy, \text{ o: } -\frac{1}{4\pi} \iiint_C f\left(\frac{1}{r} + \phi\right) dx dy dz,$$

è la funzione che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 = f$, e al contorno o alla superficie prende il valore zero.

20. In particolare si osservi che pel cerchio di raggio R il valore nel punto $M(\rho, \theta)$ della funzione di GREEN relativa al punto $M'(\rho', \theta')$ è il seguente:

$$\phi = \log R - \frac{1}{2} \log [\rho^2 \rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho'R^2 \cos(\theta - \theta')],$$

(*) È noto che questo avviene in un caso molto generale. (V. SCHWARZ, Monatsb. der Königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin. Januar 1872.)

e la funzione analoga per la sfera di raggio R è invece:

$$\phi = - \frac{R}{(\rho^2 \rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho'R^2 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}},$$

e se O è il centro del cerchio o della sfera e M'' è il punto che corrisponde a M' nella trasformazione per raggi vettori reciproci per la quale si ha $OM' \cdot OM'' = R^2$, nel caso del cerchio sarà anche $\phi = -\log MM'' - \log \frac{\rho'}{R}$,

e nel caso della sfera sarà $\phi = -\frac{R}{\rho'} \frac{1}{MM''}$. Nell'un caso e nell'altro prendendo per curve s_1 o per superficie σ_1 una serie di circonferenze o di sfere concentriche a quella data, da queste espressioni di ϕ (e più semplicemente dalle ultime) si vede subito che pel cerchio e per la sfera sono soddisfatte relativamente a ϕ le condizioni del § 18; e si conclude perciò che nel caso del cerchio, se i valori dati U_s al contorno sono finiti e hanno soltanto un numero finito di discontinuità, la funzione U che nell'interno soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = f$, e al contorno prende questi valori dati, è la seguente:

$$U' = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \log \left(1 - \frac{(R^2 - \rho^2)(R^2 - \rho'^2)}{\rho^2 \rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho'R^2 \cos(\theta - \theta')} \right) \rho d\rho d\theta + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s \frac{(R^2 - \rho'^2) d\theta}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

e nel caso della sfera quando i valori dati U_σ alla superficie sono finiti e hanno soltanto un numero finito di discontinuità in punti separati o lungo linee separate, la funzione corrispondente U è l'altra:

$$U' = - \frac{1}{4\pi} \int_S f \left\{ - \frac{R}{(\rho^2 \rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho'R^2 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} \right\} dS + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{4\pi R} \int_\sigma \frac{U_\sigma (R^2 - \rho'^2) d\sigma}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

21. Se poi al contorno del cerchio o sulla superficie della sfera saranno dati invece i valori di $\frac{dU}{d\rho}$, e questi saranno finiti e con un numero finito di discontinuità e soddisfaranno alle condizioni (14) del § 15, allora si osserverà prima che la funzione corrispondente U e quindi anche l'altra $\rho \frac{dU}{d\rho}$

devono esistere (§ 15); e poi osservando, che nel caso del piano o dello spazio si ha sempre:

$$\Delta^2 \left(\rho \frac{dU}{d\rho} \right) = \frac{d(\rho^2 \Delta^2 U)}{\rho d\rho},$$

si determinerà subito la funzione $\rho \frac{dU}{d\rho}$, pel caso del cerchio e della sfera, sostituendo nelle (17) e (18) per U' , f , U_s e U_σ le quantità $\rho' \frac{dU'}{d\rho'}$, $\frac{d(\rho^2 f)}{\rho d\rho}$, $-R \left(\frac{dU}{dp} \right)_s$ e $-R \left(\frac{dU}{dp} \right)_\sigma$; e basterà poi integrare rispetto a ρ' fra 0 e ρ' le equazioni ottenute per ricavarne subito i valori cercati U' di U nei punti (ρ', θ') , o (ρ', θ', ϕ') del cerchio o della sfera. Si troverà così, avendo riguardo anche alle equazioni (14) del § 15, che nel caso del cerchio, all'infuori di una costante, si ha la formola seguente:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho'} \frac{d\rho'}{\rho'} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d(\rho^2 f)}{d\rho} (\log r + \phi) + \rho f \right\} d\rho d\theta + \\ + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{dp} \right)_s \log [R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')] d\theta,$$

e questa, eseguendo prima una integrazione per parti rispetto a ρ nel termine che contiene $\frac{d(\rho^2 f)}{d\rho}$, e poi dopo facili riduzioni eseguendo l'integrazione rispetto a ρ' , e trascurando una costante si trasforma nell'altra:

$$U' = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho f \log \left[\{ \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta') \} \{ \rho^2 \rho'^2 + R^4 - \right. \\ \left. - 2\rho\rho' R^2 \cos(\theta - \theta') \} \right] d\rho d\theta + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{dp} \right)_s \log [R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')] d\theta,$$

ovvero, all'infuori sempre di una costante:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho f (\log r - \phi) d\rho d\theta + \\ + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dU}{dp} \right)_s \log [R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')] d\theta.$$

Similmente nel caso della sfera si trova:

$$U' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{R}{(\rho^2 \rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \log [R^2 - \rho\rho' \cos \gamma + (\rho^2 \rho'^2 + R^4 - 2\rho\rho' R^2 \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}] \right\} dS + \\ + \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \left(\frac{dU}{dp} \right)_{\sigma} \left\{ \log [R - \rho' \cos \gamma + (R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}] - \frac{2R}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\sigma,$$

e si può osservare che, siccome in queste formole il secondo termine è una funzione la cui derivata rispetto alla normale interna sul cerchio o sulla sfera è:

$$\frac{dU}{dp} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dU}{dp} d\theta, \quad \text{o:} \quad \frac{dU}{dp} - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} \frac{dU}{dp} d\sigma,$$

il primo termine delle stesse formole sarà la funzione che nell'interno del campo corrispondente soddisfa alla equazione $\Delta^2 = f$ e alle altre condizioni solite, e sul cerchio o sulla sfera ha la derivata rispetto alla normale interna costante, e uguale rispettivamente a:

$$-\frac{1}{2\pi R} \int_0^R \int_0^{2\pi} f \rho d\rho d\theta, \quad \text{o:} \quad -\frac{1}{4\pi R^2} \int_S f dS.$$

Notiamo che questi risultati potrebbero estendersi anche al caso di due cerchi concentrici o di due sfere pure concentriche; e, più generalmente, anche al caso di due cerchi o di due sfere che non si tagliano e non si toccano, e al caso di due ellissi omofocali.

E notiamo inoltre che anche nel caso della equazione $\Delta^2 U = f$ si potrebbero dare le formole per le questioni analoghe a quelle trattate nei §§ 13 e 14 pel caso della equazione $\Delta^2 = 0$. Però pei problemi analoghi a quelli del § 14 converrebbe porre delle condizioni anche rispetto alle derivate di ordine superiore al secondo della funzione f .