25.

Démonstration de la solution du problème de Malfatti, donnée par Mr. Steiner p. 178. du tome I. cah. 2.

(Par Mr. *Zornow*, professeur au Collège de Kneiphof, à Königsberg.)

On trouve dans le tome I. de ce Journal une construction très remarquable du problème suivant, connu sous le nom du problème de Malfatti: „A un triangle donné quelconque, inscrire trois cercles de manière, que chacun d'eux touche extérieurement les deux autres et deux côtés du triangle." Cette construction également distinguée par sa simplicité et son élégance, n'a pas été démontrée par son auteur, et à ce que je sais, nulle démonstration en a été publiée depuis ce tems là. C'est ce qui me fournit l'occasion de communiquer aux Géométres la demonstration suivante, qui me parait assez simple pour mériter leur indulgence.

Commençons par quelques considérations connues.

1. Soient (Taf. V. Fig. 1.) a et b deux cercles *), qui se touchent extérieurement; par leur point de contact z menons une tangente commune zw''. Soit $u''v''$ une autre tangente, qui rencontre la première au point w'', on aura:

$$w''u'' = w''v'' = w''z = \sqrt{(ab)}.$$

2. Étant mené par u'' et v'' un troisième cercle quelconque c_1 **), qui coupe a et b dans deux autres points y et x, la droite c_1w'' sera perpendiculaire à la droite $u''v''$. En même tems la droite $u''y$ sera perpendiculaire à la droite ac_1, qui joint les centres des deux cercles a, c_1.

3. Les cercles a et b peuvent être touchés dans les points y et x par un même cercle c.

4. Soit A' le point de rencontre des deux droites ac_1 et $u''v''$ prolongées convenablement, la droite $A'y$ touchera le cercle a au point y, et par suite aussi le cercle c dans le même point.

5. Soit décrit du centre c_1 un second cercle, qui touche $u''v''$ au point w'' ***). Le point A' sera le point de similitude extérieur des deux cercles a et c_1, donc la droite $A'y$ touchera aussi le cercle c_1.

*) Nous désignerons, pour abréger, le cercle, son centre, et son rayon par la même lettre de l'alphabet.

**) Ce cercle n'est pas construit dans la figure, pour ne pas la rendre trop compliquée.

***) C'est ce cercle et son rayon c_1w'', que nous désignerons désormais par c_1.

6. Réciproquement la tangente yt commune aux cercles a et c, menée par leur point de contact y, touche le cercle c_1. De la même manière on prouve, que la tangente xs, commune aux cercles b et c, menée par leur point de contact x, touche le cercle c_1.

7. Les droites zw'', xs, yt se coupent dans un point unique P, que l'on peut regarder comme le centre du cercle inscrit au triangle abc. D'où suit:

$$zP = xP = yP = \sqrt{\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)}.$$

8. Le point P étant le point de similitude intérieur des deux cercles c_1 et c, les trois points c_1, P, c sont sur une même droite, et par suite les deux triangles cPx et c_1Ps sont semblables. On tire de là:

9. $Px:sx = c:c_1+c$; ou $\sqrt{\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)}:\sqrt{(ab)} = c:c_1+c$; d'où vient $c_1+c = \sqrt{(c(a+b+c))}$, ou bien $c_1^2 = c(a+b-2c_1)$.

10. Soit as' la tangente menée du point a au cercle c_1, on a:

$$(as')^2 = (ac_1)^2 - c_1^2 = (a-c_1)^2 + ab - c_1^2 = a(a+b-2c_1) = \frac{a}{c}.c_1^2.$$

11. Soit $u'v'$ une tangente extérieure commune aux cercles a et c, et qui ne rencontre pas le troisième b, si elle coupe la droite Py au point w', on a, comme ci dessus 1.:

$$w'u' = w'v' = w'y = \sqrt{(ac)},$$

et par conséquence:

$$\frac{c_1s'}{as'} = \frac{u'w'}{u'a} = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

On voit par là, que les deux triangles rectangles c_1as' et $w'au'$ sont semblables, d'où suit:

$$\angle c_1as' = \angle w'au'.$$

12. Soit A le point de rencontre des deux droites $u'v'$, $u''v''$; le cercle a étant inscrit au triangle $AA'w'$, on a toujours:

$$\angle w'au' + \angle AaA' = 2R.$$

On aura donc aussi:

$$\angle A'as' + \angle AaA' = 2R.$$

On voit par là, que les droites Aa et as' se confondent en une droite unique, c'est à dire: la droite Aa, qui divise en deux parties égales l'angle A formé par les deux droites $u'v'$ et $u''v''$, touche en même tems le cercle c_1.

13. Soit de plus uv tangente commune extérieure aux cercles b et c, et qui ne rencontre pas le troisième cercle a; soient B et C ses points de rencontre avec les droites $u''v''$ et $u'v'$, on prouve de la même ma-

nière, que la droite BC touche le cercle c_1. Donc un triangle ABC étant circonscrit aux trois cercles a, b, c de manière, que chacun de ses côtés touche extérieurement deux de ces cercles, si l'on partage les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO, le cercle c_1 sera inscrit au triangle ABO.

14. Réciproquement le cercle c_1 inscrit au triangle ABO, est touché de deux des trois tangentes xP, yP, zP, menées aux cercles a, b, c par leurs points de contact communs x, y, z, et touche en même tems le côté AB au même point w'', auquel il est rencontré par la troisième tangente Pz.

15. Soient de plus a_1 et b_1 les cercles inscrits aux deux autres triangles BCO et CAO, on prouve de la même manière, qu'ils sont touchés respectivement des droites yP, zP, et des droites zP, xP. Donc du point w'', auquel le cercle c_1 touche le côté AB, on peut mener une tangente Pz commune aux quatre cercles a, b, a_1, b_1, et qui touche en même tems les deux premiers à leur point de contact commun.

16. Étant donné le triangle ABC, si l'on cherche les trois cercles a, b, c, déterminés de manière, que chacun d'eux touche les deux autres et en même tems deux des côtés du triangle ABC, on partagera en premier lieu les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO; après cela étant inscrits aux triangles BCO, CAO, ABO les cercles a_1, b_1, c_1, dont le dernier touche AB au point w'', si l'on mène du point w'' une tangente au cercle a_1 tellement choisie, qu'elle touche en même tems le cercle b_1, ce qui est toujours possible, elle touchera aussi deux des cercles cherchés a et b, qui sont par là entièrement déterminés. Par une construction semblable on trouve le troisième cercle c.

La construction précédente du problème de Malfatti est précisément celle, qui a été donnée par Mr. Steiner à l'endroit cité.

Königsberg, le 30. Oct. 1832.