Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Von V. v. Dantscher. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908. VI und 80 S. Preis geh. M 2.80.

Von den drei wesentlich verschiedenen arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen, die in den Siebzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts von Cantor, Dedekind und Weierstraß ausgebildet wurden, ist die letztere am wenigsten bekannt geworden; der Grund für ihre geringe Verbreitung ist derselbe, der auch der Verbreitung anderer Theorien von Weierstraß hindernd im Wege stand: das Fehlen einer authentischen Darstellung. Nach Veröffentlichung des vorliegenden Buches wird das nun hoffentlich anders werden. Dem Buche liegt eine von Weierstraß im Jahre 1872 gehaltene Vorlesung zu Grunde, die der Verfasser selbst gehört hat, sowie eine Ausarbeitung einer späteren Vorlesung aus dem Jahre 1884. Wir wollen zunächst andeutungsweise den Gedankengang wiedergeben: Nach einer kurzen historischen Einleitung und dem Hinweise auf die Unmöglichkeit, im Gebiete der rationalen Zahlen aus einer natürlichen Zahl, die nicht k^{te} Potenz einer natürlichen Zahl ist, die k^{te} Wurzel auszuziehen, wird der Begriff des „additiven Aggregates rationaler Zahlen" eingeführt; so wird eine endliche oder unendliche Menge positiver rationaler Zahlen bezeichnet, wenn aus jeder endlichen Menge darin enthaltener Zahlen die Summe zu bilden ist. Nennt man jede positive rationale Zahl, die kleiner ist als die positive rationale Zahl a, einen „Bestandteil von a"; die Summe aus einer endlichen Anzahl von Bestandteilen der in unserem Aggregat enthaltenen Zahlen einen „Bestandteil des Aggregates", so lautet Weierstraß' Definition für die Gleichheit zweier Aggregate: Zwei Aggregate heißen gleich, wenn jeder Bestandteil des einen auch Bestandteil des anderen ist. Es erweist sich nun sofort als notwendig, den Begriff des additiven Aggregates einzuschränken; es geschieht durch Unterscheidung der Aggregate in divergente und konvergente, von denen nur die letzteren weiter verwendet werden; die Definition lautet: Ein Aggregat konvergiert, wenn es eine positive Zahl gibt, die größer ist als jeder Bestandteil des Aggregates. Es läßt sich nun leicht definieren, wann ein konvergentes Aggregat größer, beziehungsweise kleiner heißt als ein anderes. Dann folgt ein Paragraph „Darstellung eines konvergenten additiven Aggregates durch einen systematischen Bruch", in dem die Aufgabe behandelt ist, zu bestimmen, wie oft der genaue Teil $\frac{1}{n^k}$ der Einheit in einem vorgelegten Aggregat enthalten ist. Sodann wird gezeigt, daß die Aggregate Summencharakter haben, insofern sie von der Anordnung und der Gruppierung ihrer Glieder unabhängig sind; es wird nun auch das Aggregat als Summe seiner Glieder bezeichnet und es wird zur Verbindung dieser Glieder das $+$-Zeichen verwendet. Sodann werden Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division für unsere Aggregate definiert und nachdem gezeigt ist, daß diese Operationen denselben Regeln wie bei rationalen Zahlen genügen, werden die Aggregate selbst als Zahlen bezeichnet. Es folgen Abschnitte über additive Aggregate aus unendlich vielen, teils positiven, teils negativen ganzen Zahlen und über additive Aggregate aus unendlich vielen komplexen Zahlen der Form $a+bi$, in denen das Wesentliche aus der Theorie der absolut konvergenten Reihen entwickelt wird. Den Abschluß bildet ein Abschnitt über die multiplikativen Aggregate aus unendlich vielen Zahlen, in dem die Lehre von den absolut konvergenten unendlichen Produkten durch Zurückführung auf die von den unendlichen Reihen (additiven Aggregaten) erledigt wird.

Dies in Kürze der Inhalt des Buches. Die Darstellung ist ausführlich und äußerst klar und läßt den logischen Aufbau deutlich zu Tage treten. Nur mit einigen wenigen Stellen ist Referent nicht ganz einverstanden, und zwar sind dies: der Nachweis, daß die Weierstraßsche Gleichheitserklärung die einzig mögliche ist (S. 22). (Ich möchte zur Ansicht hinneigen, daß ein solcher Beweis, der sich nur auf die vom Verfasser l. c. gestellten Forderungen stützt, gar nicht geführt werden kann); in § 10 wäre, wie leicht hervorzuheben, daß, wenn die Summe $A+B$ zweier Aggregate erklärt ist, es zur Einführung der Summe $A'+A''+\cdots+A^{(n)}$ einer endlichen Anzahl von Aggregaten keiner neuen Definition bedarf, während die Einführung einer Summe von unendlich vielen Aggregaten (sofern sie nicht gleich rationalen Zahlen sind) auf einer neuen Definition beruht. Das angeführte Beispiel $A+A^2+\cdots$, wo $A=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ kann, wie mir scheint, an dieser Stelle noch nicht verwendet werden, da $A=\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$, also irrational ist und eine Multiplikation irrationaler Zahlen erst im folgenden Paragraphen eingeführt wird. Endlich scheint mir der in § 16 eingeführte Begriff der „vollkommen bestimmten Irrationalzahl“ bedenklich; doch wäre es zu lange, die Gründe hiefür an dieser Stelle darzulegen. Selbstverständlich betreffen die hier angeführten Bedenken nur nebensächliche Details, so daß das Buch als Ganzes dadurch in kleiner Weise beeinträchtigt wird. — Als ein besonderer Vorteil der in diesem Buche vorgetragenen Irrationalzahltheorie, der auch ihre Verwendung in Vorlesungen empfehlen dürfte, erscheint es mir, daß sie die Einführung der Irrationalzahlen und die Theorie der absolut konvergenten Reihen mit einem Schlage erledigt, was bei der Cantorschen und Dedekindschen Theorie nicht der Fall ist; auch die wichtigste Darstellungsform der reellen Zahlen, die durch systematische Brüche, ergibt sich hier von selbst. — Ich glaube, daß der Verfasser sich durch Herausgabe dieser Vorlesungen ein hervorragendes Verdienst in dreifacher Hinsicht erworben hat: in rein mathematischer, in historischer und in pädagogischer. Es wird nun wohl die Weierstraßsche Irrationalzahltheorie ebenso Gemeingut aller Mathematiker werden, wie es die Theorien von Cantor und Dedekind heute schon sind. Auch den Studierenden kann dieses Buch nicht warm genug empfohlen werden; es dürfte kein zweites geben, das sich besser zur Aneignung der abstrakten Gedankengänge eignen würde, die zur Erfassung des Begriffes der reellen Zahl erforderlich sind.

Hans Hahn.

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Von J. Lange. Dritte Auflage, besorgt von P. Zühlke. 68 Seiten mit 55 Figuren im Texte. Verlag von W. Müller, Berlin 1908. Preis geb. M. 1.50.

Das von einem tüchtigen Schulmanne verfaßte Büchlein erscheint hier durch einen seiner einstigen Schüler in dritter Auflage. Es enthält in ge-