

Ein neues Uebertragungsprincip für binäre Formen, deren Ordnungszahl eine nicht prime ist.

Von

FRANZ MEYER in Tübingen.

1. Das im Folgenden dargelegte Princip in seiner ganzen Allgemeinheit zu formuliren, begegnet einigen Schwierigkeiten, die namentlich sprachlicher Natur sind, und die nach Möglichkeit zu beseitigen, durch einige voraufgeschickte Erklärungen und Sätze versucht ist.

Trotzdem das Princip als solches *rein algebraisch* ist, so fehlt es doch seinem Ausspruch, in algebraischer Sprache abgefasst, an Uebersichtlichkeit, sodass ein mehr geometrischer Ausdruck desselben geradezu geboten zu sein scheint. Denn die Worte, deren sich dieser bedient, sind durchweg Analogiebildungen, sodass ihrem Verständniss durch bekannte Dinge schon wesentlich vorgearbeitet ist.

2. Bekanntlich lassen sich alle binären invariantiven*) Bildungen nach Cayley**) auf die bilineare Invariante zweier Formen gleicher Ordnung zurückführen.

Das gemeinte Princip zeigt nun, dass, wofern die Ordnung n zweier solcher binärer Formen nicht prim, also (mindestens) in zwei ganzzahlige Factoren μ, ν zerfällt (sodass $n = \mu \nu$)

„dass dann die bilineare Invariante der gegebenen beiden binären Formen immer zugleich die bilineare Invariante zweier ganz bestimmten $(\mu + 1)$ -nären Formen von ν^{ter} Ordnung, resp. Klasse ist.

Der reciproke Satz erfolgt durch Vertauschung von μ und ν . Ausserdem sind auch die beiden binären Formen vertauschbar, wodurch Ordnung und Klasse der beiden $(\mu + 1)$ -nären Formen in einander übergehen.“

*) Es möge dieser Sylvester'sche Ausdruck hier acceptirt werden, um die Begriffe In- und Covarianten durch einen Ausdruck zu ersetzen.

**) cf. seine bekannten memoirs upon quantics in den Philosophical Transactions (of London).

Daraus ist schon ersichtlich, dass auf diese Weise zunächst wenigstens ein Theil der *binären* Invariantentheorie einen besonderen Theil der folgenden (*ternären* etc.) bildet, oder was dasselbe ist, sich auf diese übertragen lässt.

Es zeigt sich, dass diese Uebertragung auf Grund einiger relativ einfacher *Apolaritätsverhältnisse* in diesen höheren Gebieten ermöglicht wird. Auf diese beziehen sich daher die nachfolgenden Erklärungen.

Erklärungen, Definitionen und Sätze.

3. α) Was die termini: „Apolarität, Tragen, Stützen, Ruhen“ betrifft, vergleiche die Arbeiten von Reye*) selbst resp. die Erklärungen meiner früheren Noten (in diesen Annalen Bd. XXI).

β) Die Ausdrücke „*Ordnung und Classe* einer Fläche, Curve etc. in einem Raume von d Dimensionen verstehen sich in dem üblichen Sinne, dass, um die eine aus der andern hervorgehen zu lassen, resp. um die Ordnungsgleichung eines Gebildes dieses Raumes in die Classengleichung überzuführen und umgekehrt nur die vorhandenen Variabeln in die ihnen contragredienten überzugehen brauchen.

Es ist im Folgenden nur von Gebilden $(d - 1)^{\text{ter}}$ und erster Ausdehnung die Rede. Diese heissen immer resp. Fläche, Curve.

γ) Daran schliessen sich zwei bekannte Hülfsätze:

γ_1) „In jedem Raume ist eine Fläche zweiter Ordnung ($a_x^2 = 0$) zugleich eine solche zweiter Classe ($u_x^2 = 0$)“.

γ_2) „In jedem Raume (von d Dimensionen) ist eine Curve d^{ter} Ordnung zugleich eine solche d^{ter} Classe.“

Ferner sind je zwei eigentliche Curven dieser Art in diesem Raume stets durch eine Collineation dieses Raumes in einander überführbar, oder was dasselbe ist, sie besitzen keine absoluten Invarianten“.**)

Wir nennen diese Curven die *Grundcurven* des bezüglichen Raumes, und bezeichnen sie mit R_d resp. P_d (im Weiteren auch mit φ).

δ) Man kann das Coordinatenpolyeder stets so annehmen, dass eine solche Curve in der canonischen Gestalt dargestellt ist durch:

$$(1) \quad \varphi x_i = d_i \lambda^i \quad (i = 0, 1, \dots, d),$$

wo die d die zur Zahl d gehörigen Binomialcoefficienten sind, also:

$$d_n = 1, \quad d_{n-1} = d, \quad d_{n-2} = \frac{d(d-1)}{1 \cdot 2}, \dots, \quad d_1 = d, \quad d_0 = 1.$$

Dann ist die zu (1) *dualistische* Darstellung, wie man sich leicht überzeugt:

$$(2) \quad \sigma u_i = (-1)^i \lambda^{d-i}.$$

*) In den Bänden des Crelle'schen Journals 78, 79, 82.

**) Vgl. z. B. G. Veronese, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen mittelst des Principes des Projicirens und Schneidens. Diese Ann. XIX.

• In dieser canonischen Form heissen die Grundcurven *Normcurven* (des bezüglichen Raumes) und seien bezeichnet mit N_d resp. N_d .

ε) Es giebt eine $\delta = \frac{d(d-1)}{2}$ — 1-fach unendliche (∞^δ) lineare Schaar von Flächen zweiter Ordnung $F_2(a_x^2 = 0)$, die alle Punkte einer gegebenen Grundcurve enthalten oder: „der Curve R_d eingeschrieben sind“.

Desgleichen eine ebenso mächtige Schaar von Flächen zweiter Classe $\Phi_2(u_a^2 = 0)$ die sich zur Curve P_d dualistisch entsprechend verhalten oder: „der Curve P_d umgeschrieben sind“.

ξ) Trägt (stützt) eine Fläche zweiter Ordnung F_2 alle einer Curve P_d umschriebenen Flächen zweiter Classe, so heisse es: „ F_2 trägt (stützt) die Curve P_d “, (und im dualistischen Falle für eine Φ_2 : „ Φ_2 stützt sich (ruht) auf die (der) Curve R_d “.

η) Eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n stützt (ist apolar zu einer) eine Fläche κ^{ter} Classe Φ_κ , wenn sie mit jeder Fläche ($\kappa - n$)^{ter} Ordnung $F_{\kappa-n}$ zusammen eine die Φ_κ stützende F_κ bildet ($\kappa > n$), oder wenn die Φ_κ mit jeder Fläche ($n - \kappa$)^{ter} Classe $\Phi_{n-\kappa}$ zusammen eine auf der F_n ruhende Φ_n bildet ($n > \kappa$).

Daran schliesst sich mit Hülfe von (ε) (ξ):

α) „Eine F_n „stützt“ eine Grundcurve P_d , wenn sie alle, P_d umschriebenen Φ_2 stützt“: und dualistisch;

„Eine Φ_κ ruhe auf einer Grundcurve R_d , wenn sie auf allen, R_d eingeschriebenen F_2 ruht“.

λ) Auf irgend einer gegebenen $R_d(P_d)$ kann man sich, wie (δ) zeigt, eine Parametervertheilung ausgebreitet denken, sodass jedem Punkte der Curve nur ein Werth des Parameters (λ) zugehört und umgekehrt.

Dieser Werth gehört zugleich dem zum Punkte dualistischen Elemente der Curve zu, nämlich der Fläche erster Ordnung ($a_x = 0$), die in ihm mit der Curve P_d d consecutive Punkte gemein hat.

Irgend eine F_n hat mit der R_d nd Punkte gemein

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{nd},$$

die Wurzeln einer binären Form f_x^{nd} seien.

„Dann sagen wir, die F_n habe mit der R_d die (binäre) Form f_x^{nd} gemein; und im dualistischen Falle: Eine Φ_κ habe mit der P_d eine (binäre) Form $\varphi_x^{\kappa d}$ gemein“.

4. Diese Hilfsmittel werden genügen, um das angekündigte Princip deutlich auseinandersetzen zu können, was nunmehr geschehe:

Fundamentalprincip.

„Die bilineare Invariante (n^{te} Ueberschiebung) zweier binären Formen der Ordnung n , wo n nicht prim, also gleich $\mu\nu$ ist,

(3) a_λ^n, b_λ^n , oder auch $a_\lambda^{\mu\nu}, b_\lambda^{\mu\nu}$,
 sei, (wie gewöhnlich)

(4) $(ab)^n$.

Diese ist dann identisch mit der bilinearen Invariante einer Fläche μ^{ter} Ordnung F_μ und einer Fläche μ^{ter} Classe Φ_μ , beide in einem Raume von ν Dimensionen gelegen.

Und zwar stehen beide Flächen in der Beziehung zu einander und zu einer (sonst beliebigen) Grundcurve $R_\nu (= P_\nu)$, dass

$\left\{ \begin{array}{l} \text{die Fläche } F_\mu \text{ die Curve } P_\nu \text{ trägt und mit ihr, als } R_\nu, \\ \text{die Form } a_\lambda^{\mu\nu} \\ \text{die Fläche } \Phi_\mu \text{ auf der Curve } R_\nu \text{ ruht und mit ihr, als } P_\nu, \\ \text{die Form } b_\lambda^{\mu\nu} \end{array} \right\} \text{ gemein hat}^{\text{a}}.$

„Sind daher die beiden binären Formen apolar zu einander (d. h. ist $(ab)^n = 0$) so auch die beiden Flächen, und umgekehrt“.

Es möge vor der Hand genügen, den Beweis für einige (einfachste) Fälle zu erbringen, nämlich:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{I.} & n = 2 \cdot 2, \\ \text{II}^{\text{a}}. & n = 2 \cdot 3, \\ \text{II}^{\text{b}}. & n = 3 \cdot 2. \end{array} \right.$$

Erster Fall. $n = 2 \cdot 2 = 4$.

5. Die Formen sind:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_\lambda^4 \equiv a_4 \lambda^4 + 4a_3 \lambda^3 + 6a_2 \lambda^2 + 4a_1 \lambda + a_0, \\ b_\lambda^4 \equiv b_4 \lambda^4 + 4b_3 \lambda^3 + 6b_2 \lambda^2 + 4b_1 \lambda + b_0 \end{array} \right.$$

und ihre bilineare Invariante

$$(7) \quad (ab)^4 \equiv a_4 b_0 - 4a_3 b_1 + 6a_2 b_2 - 4a_1 b_3 + a_0 b_4.$$

Der „Normkegelschnitt“ der Ebene (cf. 3 (δ)) ist dargestellt durch*):

$$(8) \quad \varrho x_2^{**}) = \lambda^2, \quad \varrho x_1 = 2\lambda, \quad \varrho x_0 = 1, \quad \text{oder} \quad 4x_0 x_2 - x_1^2 = 0, \quad (N_2)$$

und dualistisch durch:

$$(9) \quad \sigma u_2 = 1, \quad \sigma u_1 = -\lambda, \quad \sigma u_0 = \lambda^2 \quad \text{oder} \quad u_0 u_2 - u_1^2 = 0. \quad (N_2)$$

Mithin trägt ein Kegelschnitt

$$(10) \quad a_x^2 \equiv \sum \sum a_{i\kappa} x_i x_\kappa = 0, \quad (i, \kappa = 0, 1, 2)$$

*) Weshalb gerade diese canonische Form bevorzugt ist, geht aus Nr. 9 hervor.

**) Die $\varrho, \sigma, \tau, r, s$ etc. bedeuten immer, wie evident, nur Proportionalitätsfactoren, was hier für alle Fälle bemerkt sei.

den Normkegelschnitt N_2 unter der Bedingung:

$$(11) \quad a_{02} = a_{11}$$

und desgleichen ruht ein Kegelschnitt

$$(12) \quad u_{\beta}^2 \equiv \sum \sum u_{i\kappa} \beta_i \beta_{\kappa}, \quad (i, \kappa = 0, 1, 2)$$

auf dem Normkegelschnitt N_2 unter der Bedingung:

$$(13) \quad 4\beta_{02} = \beta_{11}.$$

Diese Bedingungen (11), (13) bringen wir in eine andere Form.

In der That ist die erste ersetzbar durch das System von Beziehungen:

$$(14) \quad a_{i\kappa} = a_{i+\kappa}, \quad (i + \kappa = 0, 1, \dots, 4)$$

und (10) geht über in:

$$(15) \quad a'_x{}^2 \equiv a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 (2x_0 x_2 + x_1^2) + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2 = 0.$$

Lässt man nun die Coefficienten a mit denen der ersten Form von (6) identisch sein, so erkennt man sofort, dass der Kegelschnitt (15) den Normkegelschnitt N_2 in dem Punktquadrupel a_i^4 trifft. Dann heisse (15) der der Form a_i^4 „entsprechende“ Kegelschnitt.

Um ein Geringes schwieriger ist die Aufstellung des zweiten, der Form b_i^4 (aber in dualistischer Weise) entsprechenden Kegelschnitts.

Ersetzt man in (12) gemäss der Bedingung (13) β_{11} durch $4\beta_{02}$, so kann man dann wieder, wie oben, die neuen Grössen β_r ($r=0, 1, \dots, 4$) einführen mittelst der Relationen:

$$(16) \quad \beta_{i\kappa} = \beta_{i+\kappa}, \quad (i + \kappa = 0, 1, \dots, 4).$$

Dann geht (12) über in:

$$(17) \quad u_{\beta}^2 \equiv u_0^2 \beta_0 + 2u_0 u_1 \beta_1 + 2\beta_2 (u_0 u_2 + 2u_1^2) + 2u_1 u_2 \beta_3 + u_2^2 \beta_4 = 0.$$

Soll nun das Tangentenquadrupel β_i^4 , das dieser Kegelschnitt mit dem Normkegelschnitt N_2 gemein hat, wie wir wollen, mit der zweiten Form von (6) b_i^4 identisch sein, so finden folgende Beziehungen statt:

$$(18) \quad \tau \beta_0 = b_4, \quad \tau \beta_1 = -2b_3, \quad \tau \beta_2 = b_2, \quad \tau \beta_3 = -2b_1, \quad \tau \beta_4 = b_0,$$

mittelst deren (17) die Gestalt annimmt:

$$(19) \quad u_{\beta}^2 \equiv u_0^2 b_4 - 4u_0 u_1 b_3 + 2b_2 (u_0 u_2 + 2u_1^2) - 4u_1 u_2 b_1 + u_2^2 b_0 = 0.$$

Die bilineare Invariante der Kegelschnitte (15) (19) ist aber keine andere, als $(ab)^4$, oder, in der üblichen Schreibweise: es ist

$$(20) \quad (ab)^4 = (a'b')^2.$$

Für den Normkegelschnitt kann man aber evidenten Weise jeden andern (R_2) substituieren, der dasselbe leistet, d. h. einen solchen, der auf (15) ruht, (19) trägt, und mit ihnen die Formen (cf. (6)) a_i^4 resp. b_i^4 gemein hat.

Selbstverständlich braucht die Gleichheit dieser Formen mit denen in (6) nur eine invariante zu sein, da sie ja von der Parameterver-

theilung auf R_2 d. h. von einer linearen Transformation von λ ganz unabhängig ist.

Damit ist das allgemeine Princip für diesen Fall erhärtet.

Zweiter Fall. *Erste Behandlung: im quarternären Gebiet* ($n=2 \cdot 3=6$).

6. Die Formen sind jetzt

$$(21) \quad \begin{cases} a\lambda^6 \equiv a_6\lambda^6 + 6a_5\lambda^5 + 15a_4\lambda^4 + 20a_3\lambda^3 + 15a_2\lambda^2 + 6a_1\lambda + a_0, \\ b\lambda^6 \equiv b_6\lambda^6 + 6b_5\lambda^5 + 15b_4\lambda^4 + 20b_3\lambda^3 + 15b_2\lambda^2 + 6b_1\lambda + b_0 \end{cases}$$

und

$$(22) \quad (ab)^6 \equiv a_6b_0 - 6a_5b_1 + 15a_4b_2 - 20a_3b_3 + 15a_2b_4 - 6a_1b_5 + a_0b_6.$$

Die Gleichungen der Normcurve*) N_3 resp. N_3 sind jetzt:

$$(23) \quad \varrho x_3 = \lambda^3, \quad \varrho x_2 = 3\lambda^2, \quad \varrho x_1 = 3\lambda, \quad \varrho x_0 = 1, \quad (N_3)$$

$$(24) \quad \sigma u_3 = 1, \quad \sigma u_2 = -\lambda, \quad \sigma u_1 = \lambda^2, \quad \sigma u_0 = -\lambda^3, \quad (N_3)$$

und die Schaar der ihr ein- resp. umbeschriebenen Flächen zweiter Ordnung resp. Classe setzt sich linear zusammen aus den folgenden:

$$(25) \quad 3x_0x_2 - x_1^2 = 0, \quad 9x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \quad 3x_1x_3 - x_2^2 = 0, \quad (N_3),$$

$$(26) \quad u_0u_2 - u_1^2 = 0, \quad u_0u_3 - u_1u_2 = 0, \quad u_1u_3 - u_2^2 = 0, \quad (N_3).$$

Demnach trägt eine Fläche zweiter Ordnung

$$(27) \quad a_x^2 \equiv \sum \sum a_{i\kappa} x_i x_\kappa = 0 \quad (i, \kappa = 0, 1, 2, 3)$$

die Curve N_3 unter den Bedingungen**):

$$(28) \quad a_{02} = a_{11}, \quad a_{03} = a_{12}, \quad a_{13} = a_{22}$$

und eine Fläche zweiter Classe:

$$(29) \quad u_\beta^2 \equiv \sum \sum u_{i\kappa} \beta_i \beta_\kappa \quad (i, \kappa = 0, 1, 2, 3) = 0$$

ruht auf der Curve N_3 , wenn:

$$(30) \quad \beta_{11} = 3\beta_{02}, \quad \beta_{12} = 9\beta_{03}, \quad \beta_{22} = 3\beta_{13}.$$

Die Bedingungen (28) sind unmittelbar ersetzbar durch die andern:

$$(31) \quad a_{i\kappa} = u_{i+\kappa}, \quad (i + \kappa = 0, 1, \dots, 6),$$

wodurch aus (27) wird:

$$(32) \quad a_x'^2 \equiv a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2(2x_0x_2 + x_1^2) + 2a_3(x_0x_3 + x_1x_2) \\ + a_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 = 0.$$

Deren Schnitt mit der Curve N_3 (23) ist durch das Sextupel geliefert:

$$(33) \quad a_\lambda^6 = 0.$$

*) Ueber die Wahl gerade dieser Form cf. Nr. 13.

**) cf. meine Note, diese Annalen XXI, pag. 445.

Was die zweite Fläche (29) betrifft, die auf N_3 ruhen soll, so ersetze man zunächst gemäss (30) $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$ durch resp. $3\beta_{02}, 9\beta_{03}, 3\beta_{03}$ in (29) und führe nunmehr die zu (31) analogen Relationen ein:

$$(34) \quad \beta_{i\kappa} = \beta_{i+\kappa}, \quad (i + \kappa = 0, 1, \dots, 6).$$

Dann wird (29) zu:

$$(35) \quad u_\beta^3 \equiv u_0^2 \beta_0 + 2u_0 u_1 \beta_1 + \beta_2 (2u_0 u_2 + 3u_1^2) + 2\beta_3 (u_0 u_3 + 9u_1 u_2) \\ + \beta_4 (2u_1 u_3 + 3u_2^2) + 2u_2 u_3 \beta_5 + u_3^2 \beta_6 = 0,$$

hat also mit der Curve N_3 die Ebenen gemein*):

$$(36) \quad \beta_0 \lambda^6 - 2\beta_1 \lambda^5 + 5\beta_2 \lambda^4 - 20\beta_3 \lambda^3 + 5\beta_4 \lambda^2 - 2\beta_5 \lambda + \beta_6 = 0.$$

Soll dieses Sextupel mit der zweiten Form in (21) b_2^6 identisch sein, so resultiren die Beziehungen:

$$(37) \quad r\beta_0 = b_6, \quad r\beta_1 = -3b_5, \quad r\beta_2 = 3b_4, \quad r\beta_3 = -b_3, \quad r\beta_4 = 3b_2, \\ r\beta_5 = -3b_1, \quad r\beta_6 = b_0,$$

und (35) geht über in:

$$(38) \quad u_\beta^3 \equiv u_0^2 b_6 - 6u_0 u_1 b_5 + 3b_4 (2u_0 u_2 + 3u_1^2) - 2b_3 (u_0 u_3 + 9u_1 u_2) \\ + 3b_2 (2u_1 u_3 + 3u_2^2) - 6u_2 u_3 b_1 + u_3^2 b_0 = 0.$$

Die bilineare Invariante der linken Seite von (32) (38) ist aber $(ab)^6$, d. h. wir haben:

$$(39) \quad (ab)^6 = (a'b')^2, \quad \text{q. e. d.}$$

Im Uebrigen gilt die entsprechende Bemerkung, wie am Schluss des ersten Falles.

Zweiter Fall. Zweite Behandlung: im ternären Gebiet ($n=3 \cdot 2=6$).

7. Die binären Formen sind die obigen (21) mit ihrer Invariante (22). Für die Fläche zweiter Ordnung und Classe in der vorigen Nummer werden aber hier eine Curve dritter Ordnung resp. Classe substituiert, die den Normkegelschnitt trägt resp. auf ihm ruht und die Formen a_2^6 resp. b_2^6 mit ihm gemein hat.

Eine Curve dritter Ordnung C_3 :

$$(40) \quad a_x^3 \equiv \sum \sum \sum a_{ixl} x_i x_x x_l = 0, \quad (i, x, l = 0, 1, 2)$$

trägt den Normkegelschnitt N_2 unter den Bedingungen:

$$(41) \quad a_{s02} = a_{s11}, \quad (s = 0, 1, 2)$$

und eine Curve dritter Classe K_3

$$(41) \quad u_\beta^3 \equiv \sum \sum \sum \beta_{ixl} u_i u_x u_l = 0$$

*) cf. diese Annalen XXI, p. 443.

ruht auf dem Normkegelschnitt N_2 , wenn:

$$(42) \quad 4\beta_{s02} = \beta_{s11}, \quad (s = 0, 1, 2).$$

Die Bedingungen (41) für die C_3 sind wieder unmittelbar ersetzbar durch:

$$(43) \quad a_{i\kappa l} = a_{i+\kappa+l}, \quad (i + \kappa + l = 0, 1, \dots, 6)$$

und (40) wird demnach:

$$(44) \quad a_x'^3 \equiv a_0 x_0^3 + 3a_1 x_0^2 x_1 + 3a_2 (x_0^2 x_2 + x_1^2 x_0) + a_3 (6x_0 x_1 x_2 + x_1^3) \\ + 3a_4 (x_2^2 x_0 + x_1^2 x_2) + 3a_5 x_2^2 x_1 + a_0 x_2^3 = 0,$$

und das Sextupel

$$(45) \quad a\lambda^6 = 0$$

stellt somit die C_3 mit N_2 gemeinsamen Punkte dar.

Gehen wir zur Classencurve K_3 (41) mit den Bedingungen (42) über, so ersetzen wir wieder zuerst die β_{s11} mittelst der $4\beta_{s02}$ nach (42) und unterwerfen die nunmehr noch übrigen β den Bezeichnungen:

$$(46) \quad \beta_{i\kappa l} = \beta_{i+\kappa+l}, \quad (i + \kappa + l = 0, 1, \dots, 6).$$

Dann wird aus (41):

$$(47) \quad u_i^3 \equiv u_0^3 \beta_0 + 3u_0^2 u_1 \beta_1 + 3\beta_2 (u_0^2 u_2 + 4u_0 u_1^2) + 2\beta_3 (3u_0 u_1 u_2 + 2u_1^3) \\ + 3\beta_4 (u_2^2 u_0 + 4u_1^2 u_2) + 3u_2^2 u_1 \beta_5 + u_2^3 \beta_6 = 0.$$

Diese Curve hat mit N_2 folgende sechs Tangenten gemein:

$$(48) \quad \lambda^6 \beta_0 - 3\lambda^5 \beta_1 + 15\beta_2 \lambda^4 - 10\beta_3 \lambda^3 + 15\beta_4 \lambda^2 - 3\lambda \beta_5 + \beta_6 = 0,$$

eine Form, die mit $b\lambda^6$ (21) identisch wird, wenn:

$$(49) \quad t\beta_0 = b_6, \quad t\beta_1 = -2b_5, \quad t\beta_2 = +b_4, \quad t\beta_3 = -2b_3, \\ t\beta_4 = +b_2, \quad t\beta_5 = -2b_1, \quad t\beta_6 = b_0.$$

Damit geht (43) über in:

$$(50) \quad u_i^3 \equiv u_0^3 b_6 - 6u_0^2 u_1 b_5 + 3b_4 (u_0^2 u_2 + 4u_0 u_1^2) - 4b_3 (3u_0 u_1 u_2 + 2u_1^3) \\ + 3b_2 (u_2^2 u_0 + 4u_1^2 u_2) - 6u_2^2 u_1 b_1 + u_2^3 b_0 = 0.$$

Endlich ergibt sich wieder, dass die bilineare Invariante der linken Seiten von (44), (50) nichts Anderes ist, als $(ab)^6$; oder man hat:

$$(51) \quad (ab)^6 = (a'b')^3. \quad \text{q. e. d.}$$

Natürlich gilt desgleichen die Schlussbemerkung von Nummer 5.

Mit leicht verständlicher Erweiterung der Bezeichnungen (20), (39), (51) können wir somit den Sinn unseres allgemeinen Principis (Nr. 4) in den Gleichungen zusammenfassen:

$$(52) \quad (ab)^{\mu\nu} = (a'b')^\mu = (a''b'')^\nu.$$

8. Es mögen jetzt noch einige Consequenzen aus dem Obigen gezogen werden, namentlich insofern sie die Theorie der conjugirten Gruppen binärer (ternärer, etc.) Formen angehen: auch sollen einige wenige Haupteigenschaften*) der den binären Formen „entsprechenden“ Flächen, nur soweit sie unser Princip in ein helleres Licht stellen, kurz erörtert werden.

Es wird dabei wieder angemessen sein, die behandelten einfachen Fälle zum Mittelpunkt der Betrachtungen zu machen. Die Formulirung für den allgemeinsten Fall wird dadurch überflüssig.

Erster Fall $n = 4$.

9. Der Normkegelschnitt (8), (9) ist gerade so gewählt, dass, wie man sich leicht überzeugt, die homogenen Coordinaten ρx_i eines Punktes der Ebene *zusammenfallen* mit den homogenen**) symmetrischen Functionen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ der beiden Argumente der vom Punkte an N_2 gehenden Tangenten.

Dies einfache Hülfsprincip dient dazu, eine Reihe von Formen, wie sie im Folgenden auftreten, leicht in einander überzuführen.

Wir nehmen jetzt an, die Invariante $(ab)^4$ (7) verschwinde d. h. die beiden Formen (6) a_1^4, b_1^4 seien apolar; ferner sei a_1^4 fest, b_1^4 beweglich. Sind dann die elementar-symmetrischen Functionen von vier Elementen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ bezeichnet mit $\frac{s_r}{s_0}$ ($r = 1, \dots, 4$), so sind diese vier Elemente immer dann die Wurzeln einer zu a_1^4 apolaren Form b_1^4 , wenn:

$$(53) \quad a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 \equiv a_4 = 0.$$

Denn die linke Seite dieser Relation ist ja, abgesehen von einem unwesentlichen Factor, $(ab)^4$ selbst.

Oder, nach Rosanes, („Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen“, Crelle Bd. 76):

„Die Gleichung (53) stellt die ganze zu a_1^4 conjugirte Gruppe dar“.

*) Vgl. die Bemerkung am Schlusse dieser Mittheilung.

**) Unter den „homogenen symmetrischen“ Functionen von n Elementen $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n$ (oder auch $\rho s_1, \rho s_2, \dots, \rho s_n$) verstehe ich die, deren Verhältnisse $\frac{s_x}{s_0}$ ($x = 1, 2, \dots, n$) mit den gewöhnlichen elementaren symmetrischen Functionen identisch sind.

***) Andererseits erkennt man leicht, dass alle Formen dieser Gruppe, wenn $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ die Wurzeln von $a_1^4 = 0$ sind, in der Schaar:

$$\sum v_i (\alpha - \lambda_i)^4, \quad (i = 1, \dots, 4)$$

enthalten sind (cf. Stephanos, Comptes Rendus 1881).

Im Uebrigen vergleiche bezüglich der verschiedenen Umformungen der Form a_1 die Anmerkung meiner Note (diese Annalen XXI, pag. 442).

Führt man des Weiteren noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(54) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}; \quad \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \lambda_3 \lambda_4 = \frac{\tau_2}{\tau_0},$$

so kann man der Gleichung (53) auch folgende Gestalt geben:

$$(55) \quad \sigma_0(a_0\tau_0 + a_1\tau_1 + a_2\tau_2) + \sigma_1(a_1\tau_0 + a_2\tau_1 + a_3\tau_2) \\ + \sigma_2(a_2\tau_0 + a_3\tau_1 + a_4\tau_2) = 0.$$

Mit Rücksicht auf unser Hilfsprincip ergibt sich sofort, dass diese Gleichung aussagt, die Punkte $(\sigma_i)(\tau_i)$ sind in Bezug auf den Kegelschnitt (15) ($a'_x{}^2 = 0$) conjugirt, oder da man die vier Werthe $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ auf drei Weisen in zwei Gruppen zu je zweien theilen kann:

„Die Gleichung (53) $a_x = 0$ (wenn man jedes Element λ als Argument einer Tangente von N_2 auffasst) stellt die (dreifach) unendliche Zahl von N_2 umschriebenen Polvierseiten des Kegelschnitts $a'_x{}^2 = 0$ dar (wo dieser N_2 trägt und aus ihm, als N_2 — das Punktquadrupel $a'_x{}^4$ ausschneidet).“

Jetzt lassen wir unser Hauptprincip in Kraft treten, und erhalten:

„Ein (sonst) beliebiger Kegelschnitt A trage einen (sonst) beliebigen Kegelschnitt φ . Dann giebt es eine (dreifach) unendliche Zahl von φ umschriebenen Polvierseiten von A .

Jedem dieser Polvierseite ist ein einziger Kegelschnitt B einbeschrieben, der zugleich auf φ (resp. A) ruht.

Dann ruht B auch auf A (resp. φ).

Somit giebt es eine dreifach unendliche lineare Schaar von Kegelschnitten B , die den angegebenen Polvierseiten von A einbeschrieben sind und auf φ und A ruhen.

Oder, mit Rücksicht auf das letzte:

„Gegeben seien zwei apolare Kegelschnitte φ und A (so dass A φ trägt).

Dann construiren man die dreifach unendliche lineare Schaar von (Klassen)-Kegelschnitten B , die auf φ und A ruhen.

Die mit φ gemeinsamen Tangentenvierseite der Schaar B sind Polvierseite*) von A (und zwar alle φ umschriebenen).

*) Man kann drei Seiten eines solchen Polvierseits, wie aus (53) folgt, (als Tangenten von φ) beliebig annehmen. Dann giebt es einen einzigen Kegelschnitt B , der diese drei Seiten berührt und auf φ und A ruht. Die vierte Tangente, die B mit φ gemein hat, liefert die vierte Seite des durch die drei ersten bestimmten Polvierseits. Eine ähnliche Bestimmung gilt für die Poldreiseite.

Von diesen kann man eine Seite (als Tangente von φ) stets beliebig annehmen: dann existirt zunächst ein Gewebe von (Klassen)-Kegelschnitten, die diese Seite berühren und auf φ und A ruhen.

Dieses Gewebe enthält stets eine Schaar, die mit φ noch zwei weitere feste Tangenten gemein hat. Diese beiden Tangenten bilden dann mit der ersten ein Poldreiseit von A , das φ umschrieben ist.

Dualistisch construiren man die dreifach unendliche lineare Schaar von (Ordnungs)-Kegelschnitten B , die φ und A tragen.

Die mit A gemeinsamen Punktvier-ecke der Schaar B sind Polvier-ecke von φ (und zwar alle A einbeschriebenen).“

10. Ein Polvierseit eines Kegelschnitts A wird zum Poldreiseit, wenn die vierte Seite des ersteren unbestimmt wird.

Bezeichnet man daher die symmetrischen Funktionen von $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ mit $\frac{S_x}{S_0}$ ($x = 1, 2, 3$), so kann man (53) auch in der andern Form schreiben:

$$(56) (a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3) + \lambda_4 (a_1 S_0 + a_2 S_1 + a_3 S_2 + a_4 S_3) \\ \equiv A_1 + \lambda_4 A_2 = 0;$$

dann stellen die Gleichungen:

$$(57) \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0$$

die einfach unendlich vielen Hesse'schen $N_2 (= \varphi)$ umschriebenen Polvierseite*) von A dar.

Daraus folgt als specieller Fall des letzten Satzes:

„Wenn ein Kegelschnitt A einen andern φ trägt, so kann man jedem der φ umschriebenen (einfach unendlich vielen) Poldreiseite von A (einfach) unendlich viele Kegelschnitte B einbeschreiben, die zugleich auf φ und A ruhen.“

11. Wir gehen jetzt von zwei festen Formen aus:

$$(58) \quad a_2^4 \equiv f, \quad a_{12}^4 \equiv f_1$$

und betrachten die zu f, f_1 conjugirte Gruppe und den dieser entsprechenden Kegelschnitt B .

Die Wurzeln irgend einer zu den Formen (58) apolaren (conjugirten) Form b_2^4 müssen nach Obigem den beiden Gleichungen genügen

$$(59) \quad a_s = 0, \quad a_{1s} = 0:$$

„(59) stellt die ganze zu (58) conjugirte Gruppe dar.“

Bedienen wir uns noch des abkürzenden Ausdrucks: Ein Büschel (Netz, etc.) von Kegelschnitten trägt einen (ruht auf einem) Kegel-

*) Ihre Seiten, als Tangenten von $N_2(\varphi)$, bilden, wovon man sich leicht überzeugt, die zu den ersten Polaren von a_2^4 conjugirte Involution.

Sie bilden selbst wiederum, was hier ohne Beweis mitgetheilt sein mag, die ersten Polaren einer zu a_2^4 correspondirenden Form, $jf - iH$, wo i, j, H die bekannten invariantiven Bildungen von $f = a_2^4$ sind (und zwar mit den üblichen Zahlenfactoren 2, 6, 2 versehen).

Beide Formen sind die, die dieselbe Hesse'sche Form H besitzen.

(Cf. Cap. II meines bald erscheinenden Buches, siehe die Schlussbemerkung).

schnitt, wenn alle Individuen des Büschels (Netzes, etc.) dies thun, so ergiebt unser Princip zuvörderst:

Gegeben sei ein Kegelschnittbüschel (A_1, A_2) und ein von ihm getragener Kegelschnitt φ .

I. Dann ist jedem der (zweifach) unendlich vielen φ umschriebenen Polvierseite des Büschels (A_1, A_2) , ein (einziger) Kegelschnitt B einbeschrieben, der zugleich auf φ, A, A_1 ruht.

Wird B also dadurch bestimmt, dass er auf einem dieser drei Kegelschnitte ruht, so ruht er auch auf den beiden andern. Oder:

II. Man construire sich die zweifach unendliche Schaar (= Gewebe) der Kegelschnitte B, die auf φ, A, A_1 ruhen.

Jeder Kegelschnitt dieses Gewebes hat dann mit φ ein Tangentenvierseit gemein, das zugleich Polvierseit des Büschels (A, A_1) ist.

Wir nannten einen (Ordnungs)-Kegelschnitt A der Form a_2^4 „entsprechend“, wenn er derjenige ist, der φ trägt und aus φ das Punktquadrupel a_2^4 ausschneidet: dualistisch einen (Klassen)-Kegelschnitt B der Form b_2^4 „entsprechend“, wenn er auf φ ruht und mit φ das Tangentenvierseit b_2^4 gemein hat.

Dann können wir dem Satze auch folgende Formulirung geben (die sich dann, wie man sehen wird, fast unmittelbar auf höhere Gebiete übertragen lässt):

Auf einem (weder als Ordnungs- noch als Klassengebilde zerfallenden) Kegelschnitt φ sei eine Parametervertheilung in bekannter Art ausgebreitet.

Mittelst dieser sei auf φ

$$\begin{cases} \text{einmal die zweigliedrige Gruppe } a_2^4 + \kappa a_{12}^4, \\ \text{dann die ihr conjugirte dreigliedrige } b_2^4 + \mu b_{12}^4 + \nu b_{22}^4 \end{cases}$$

dargestellt.

III. Dann „entspricht“ der ersteren das Ordnungskegelschnittbüschel

$$A + \kappa A_1,$$

dagegen der zweiten das Klassenkegelschnittgewebe

$$B + \mu B_1 + \nu B_2.$$

Diese beiden stehen in der doppelten Beziehung

erstens, dass das Netz $A + \kappa A_1 + m\varphi$ die vollständige zum Gewebe $B + \mu B_1 + \nu B_2$;

zweitens, dass das Büschel $A + \kappa A_1$ die vollständige zur (dreifach unendlichen) Schaar $B + \mu B_1 + \nu B_2 + n\varphi$

conjugirte Gruppe ist.“

12. Alle diese Sätze I, II, III enthalten aber auch Eigenschaften der quadratischen Transformation in der Ebene, wodurch ihre Wichtigkeit vermehrt wird.

Denn mit Berücksichtigung der Gleichungen (54), (55) ergibt sich sofort, dass die Gleichungen (59) alle in Bezug auf das Kegelschnittbüschel (A, A_1) conjugirten Punktepaare darstellt d. h. bekanntlich die Punktepaare einer quadratischen ein-eindeutigen involutorischen Verwandtschaft T , deren vier Einheitspunkte die Grundpunkte jenes Büschels sind, deren Fundamentaldreieck somit mit dem gemeinsamen Polardreieck des Büschels zusammenfällt.

Wir nennen das Kegelschnittbüschel durch die Einheitspunkte einer (quadratischen, etc.) Transformation T einfach „das Einheitsbüschel von T “.

Dann haben wir nach Obigem:

IV. *Irgend eine Transformation T sei gegeben; ihr Einheitsbüschel sei (A, A_1) .*

Dann lassen sich die sämtlichen Punktepaare von T immer auffassen als die Gegeneckenpaare der (zweifach) unendlich vielen Polvierseite des Einheitsbüschels, die irgend einem der (dreifach unendlich vielen) auf dem Büschel ruhenden Kegelschnitte φ umbeschrieben sind.

Greifen wir einen solchen Kegelschnitt φ heraus, so giebt es wieder ein Gewebe von Kegelschnitten B , die alle zum Netze (φ, A, A_1) conjugirt sind.

Irgend ein einem Kegelschnitt B und φ gemeinsames Tangenten-vierseit stellt vermöge seiner Gegeneckenpaare drei Punktepaare von T dar.

Das Gewebe B hat zugleich mit φ die sämtlichen Formen b_λ^4 gemein, die zu den sämtlichen Formen a_λ^4 , die das Büschel (A, A_1) mit φ gemein hat, conjugirt sind.“

Zweiter Fall. Erste Behandlung.

$$n = 2 \cdot 3 = 6.$$

13. Mit Hülfe der gewählten Bezeichnungen lassen sich die obigen Entwicklungen in ganz analoger Weise für diesen complicirteren Fall durchführen. Denn auch hier ist die cubische Normcurve (23), (24) so gewählt, dass die Coordinaten eines Raumpunktes mit den homogenen symmetrischen Functionen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ der drei Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ identisch sind, die den drei vom Punkte an die Curve gehenden Ebenen zugehören.

Bezeichnet man die drei entsprechenden Functionen dreier anderer Argumente $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ mit $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$, so schreibt sich die Bedingung, unter der die sechs Werthe λ die Wurzeln einer zur gegebenen Form a_λ^6 (21) apolaren Form b_λ^6 sind, folgendermassen:

$$(60) \quad \begin{cases} a_\lambda \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6 = 0 \\ \equiv \sigma_0(a_0 \tau_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_3 \tau_3) + \sigma_1(a_1 \tau_0 + a_2 \tau_1 + a_3 \tau_2 + a_4 \tau_3) \\ \quad + \sigma_2(a_2 \tau_0 + a_3 \tau_1 + a_4 \tau_2 + a_5 \tau_3) + \sigma_3(a_3 \tau_0 + a_4 \tau_1 + a_5 \tau_2 + a_6 \tau_3) \end{cases}$$

wo noch zu bemerken ist, dass die s_i ($i = 0, 1, \dots, 6$) die homogenen symmetrischen Functionen aller sechs Werthe λ sind.

Aus der zweiten Form von (60) geht wieder unmittelbar hervor, dass unter der Bedingung (60) die Punkte (σ_i) (τ_i) in Bezug auf die (die Normcurve N_3 stützende und aus ihr das Punktsextupel a_λ^6 ausschneidende) Fläche zweiter Ordnung: (32) $a_x'^2 = 0$ conjugirt sind, oder wegen der Symmetrie von (60) in Bezug auf die sechs λ :

„Trägt eine F_2 eine cubische Curve φ und trifft sie dieselbe im Punktsextupel a_λ^6 , so stellt (60) $a_s = 0$ die (fünffach unendliche) Schaar*) der φ umschriebenen Polsechsfache**) von F_2 dar.“

„Die diesen entsprechenden Sextupel b_λ^6 bilden die ganze zu a_λ^6 conjugirte Gruppe.“

Mithin nach unserem Hauptprincipe:

„Trägt eine F_2 die cubische Curve φ , so ist stets einem der φ umschriebenen Polsechsfache von F_2 eine einzige Fläche zweiter Classe Φ_2 einbeschrieben, die zugleich auf φ ruht.

Diese ruht dann auch auf F_2 .“

Oder:

„Trägt eine F_2 die cubische Curve φ , so bilde man die ganze (fünffach) unendliche Schaar von Flächen Φ_2 , die zugleich auf F_2 und φ ruhen.

Jede dieser Flächen Φ_2 hat mit φ sechs Ebenen gemein, die ein Polsechsfach von F_2 bilden.

So gehört zur ganzen Schaar der Φ_2 die ganze Schaar der φ umschriebenen Polsechsfache von F_2 .“

Oder, mit der dem Obigen ganz analogen Benützung des terminus „Entsprechen“:

Auf einer cubischen Curve φ sei in bekannter Weise eine Parametervertheilung ausgebreitet und mittelst ihrer eine binäre Form a_λ^6 nebst ihrer ganzen conjugirten Gruppe dargestellt.

„Dann, entspricht‘ der ersten Form eine bestimmte F_2 (die φ trägt und aus φ das Sextupel a_λ^6 ausschneidet), sowie der zweiten Gruppe eine

*) Cf. die zweite Anmerkung der Nr. 9, die hier analog gilt.

**) Wir gebrauchen, wie meistens üblich die Endung — flach, resp. — eck, um die Zusammensetzung aus Ebenen resp. Punkten anzudeuten. Nur für Vierflach und Viereck sagen wir ohne Unterschied Tetraeder.

Von einem solchen Polsechsfach von F_2 kann man fünf Ebenen (als Ebenen von φ) beliebig annehmen, dann ist die sechste eindeutig bestimmt.

Man erhält sie nach Obigem durch folgende Construction (cf. die Anm. zu Nr. 9). Es giebt eine Φ_2 , die die fünf Ebenen berührt und zugleich auf φ und F_2 ruht. Die ihr mit φ gemeinsame sechste Ebene ist die gewünschte.

Für die Polfünf- und -vierflache gelten ganz analoge Sätze, wie in der erwähnten Anmerkung für die Poldreiseite eines Kegelschnitts mitgetheilten, ihre Aufstellung kann darum hier unterbleiben.

(fünffach) unendliche Schaar von Φ_2 , die auf φ ruhen und mit φ die (Ebenen)-Sextupel jener Gruppe gemein haben.

Dann bildet einmal die (dreifach unendliche) Schaar von Flächen zweiter Ordnung, die sich aus F_2 und den der Curve φ einbeschriebenen Flächen linear zusammensetzt, die vollständige zur Schaar der Φ_2 , andererseits die (siebenfach unendliche) Schaar von Flächen zweiter Classe, die sich aus den Φ_2 und den der Curve φ umschriebenen Flächen linear zusammensetzt, die vollständige zu F_2 conjugirte Gruppe.“

Wie sich dieser Satz modificirt, wenn für die eine Form a_1^6 und die ihr conjugirte Gruppe eine zweigliedrige Gruppe $a_1^6 + \kappa a_{1,1}$ nebst der ihr conjugirten und endlich eine dreigliedrige Gruppe

$$a_1^6 + \kappa a_{1,1}^6 + \kappa' a_{2,2}^6$$

nebst der ihr conjugirten eintreten, liegt nach den Angaben der vorigen und dieser Nummer so auf der Hand, dass auf diese Ergänzungen hier verzichtet werden darf.

Im Uebrigen, was diese mehrgliedrigen Gruppen anbelangt, vergleiche man die in meiner Note (diese Annalen Bd. XXI, pag. 134 ff.) ohne Beweis mitgetheilten Sätze.

Auch die der quadratischen Transformation T analoge Raumtransformation, die dort (pag. 134, dritte Anm.) ihre wesentliche Rolle spielte, lässt sich im Anschluss an die dreigliedrigen Gruppen sechsten Grades gerade so behandeln, wie oben die quadratische im Anschluss an die zweigliedrigen Gruppen vierten Grades.

14. Dagegen sollen die speciellen Polsechse fläche der Schaar (60) kurz ihre Erwähnung finden.

Wird eine Ebene eines Polsechse flaches der Fläche F_2 unbestimmt, so wird es zum Polfünfflach: desgleichen wenn zwei der Ebenen, zum Poltetraeder.

Bezeichnen also $S_i (i = 0, \dots, 5)$ die homogenen symmetrischen Functionen von fünf Elementen $(\lambda_1 \dots \lambda_5)$: analog $T_x (x = 0, \dots, 4)$ die von vieren $(\lambda_1 \dots \lambda_4)$, so zeigt die Form (60), dass

$$(61) \quad \begin{cases} A_1 \equiv a_0 S_0 + a_1 S_1 + \dots + a_5 S_5 = 0, \\ A_2 \equiv a_1 S_0 + a_2 S_1 + \dots + a_6 S_5 = 0 \end{cases}$$

die φ umbeschriebenen (dreifach unendlich vielen) Polfünfflach von F_2 und

$$(62) \quad \begin{cases} A_{11} \equiv a_0 T_0 + a_1 T_1 + \dots + a_4 T_4 = 0, \\ A_{12} \equiv a_1 T_0 + a_2 T_1 + \dots + a_5 T_4 = 0, \\ A_{22} \equiv a_2 T_0 + a_3 T_1 + \dots + a_6 T_4 = 0 \end{cases}$$

die φ umschriebenen (einfach unendlich vielen) Poltetraeder von F_2 repräsentirt.

Andrerseits erkennt man leicht, dass diese Polfünfffläche, Poltetraeder (die ja φ umschrieben sind)

„durch die viergliedrige zu den ersten Polaren von a_2^6
resp. durch die zweigliedrige zu den zweiten Polaren von a_2^6 } conjugirte
Gruppe dargestellt sind.“

Diese letztere bildet also eine Involution vierten Grades und man gelangt so zu den damals (pag. 135ff.) angeführten Sätzen über die Poltetraeder von F_2 , die φ umschrieben sind.

Lassen wir uns hier nur insoweit auf diese speciellen Polfläche von F_2 ein, als sie mit unserem Princip in Connex stehen, so erhalten wir:

„Irgend einem φ umschriebenen Polfünfffläche von F_2 kann man noch einfach unendlich viele Flächen Φ_2 einbeschreiben, die auf F_2 und φ ruhen.“

„Irgend einem φ umschriebenen Poltetraeder von F_2 kann man noch zweifach unendlich viele Flächen Φ_2 einbeschreiben, die auf F_2 und φ ruhen.“

Zweiter Fall. Zweite Behandlung.

$$n = 3 \cdot 2 = 6.$$

15. Für diesen kann man die bei der ersten Behandlung gewonnenen Sätze sofort umschreiben, wenn man für die Pol-sechs-fünf-vierfläche der die cubische Raumcurve φ tragenden Fläche F_2 die Pol-sechs-fünf-vierseite der einen Kegelschnitt φ tragenden ebenen cubischen Curve C_3 substituirt.

Zum Beweise wird es vollständig genügen, wenn wir zeigen, dass die Relation

$$(60) \quad a_s = 0$$

in der That jetzt ein Polsechseit derjenigen cubischen Curve C_3 darstellt, die den Normkegelschnitt N_2 trägt und aus ihm das Sextupel a_2^6 ausschneidet, und zwar ein N_2 umschriebenes Polsechseit von C_3 .

Dazu reicht es wieder aus, wenn bewiesen wird, dass die drei Punkte (σ_i) (τ_i) (τ'_i) , wo dies die homogenen symmetrischen Functionen der Argumentenpaare $\lambda_1 \lambda_2$ resp. $\lambda_3 \lambda_4$, resp. $\lambda_5 \lambda_6$ sind, ein in Bezug auf die C_3 (44) $a_x^3 = 0$ conjugirtes Poldreieck bilden.

In der That kann man (60) auch folgende Form geben:

$$(60) \quad a_s = 0 \equiv \sigma_0 \{ \tau_0 (a_0 \tau'_0 + a_1 \tau'_1 + a_2 \tau'_2) + \tau_1 (a_1 \tau'_0 + a_2 \tau'_1 + a_3 \tau'_2) \\ + \tau_2 (a_2 \tau'_0 + a_3 \tau'_1 + a_4 \tau'_2) \} \\ + \sigma_1 \{ \tau_0 (a_1 \tau'_0 + a_2 \tau'_1 + a_3 \tau'_2) + \tau_1 (a_2 \tau'_0 + a_3 \tau'_1 + a_4 \tau'_2) \\ + \tau_2 (a_3 \tau'_0 + a_4 \tau'_1 + a_5 \tau'_2) \}$$

$$+ \sigma_2 \{ \tau_0 (a_2 \tau_0' + a_3 \tau_1' + a_4 \tau_2') + \tau_1 (a_3 \tau_0' + a_4 \tau_1' + a_5 \tau_2') \\ + \tau_2 (a_4 \tau_0' + a_5 \tau_1' + a_6 \tau_2') \}$$

womit das gewünschte Resultat bewiesen ist.

Im Besondern spielen die Polvierseite von C_3 eine ebenso wichtige Rolle in der Ebene (vgl. Rosanes, insbesondere: Ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle, Bd. 76) wie die Poltetraeder von F_2 im Raume.

Eine nähere Darlegung dieser Beziehungen (namentlich auch zu Rosanes'schen Ergebnissen) widerspricht dem Zwecke dieser Mittheilung und möge daher auf eine andere Gelegenheit verschoben bleiben.

Im Uebrigen sind eine grosse Zahl hierhergehöriger Resultate bereits in meinem nun schon mehrfach angekündigten Buche*) abgeleitet, das sich gerade diese Verknüpfung der Apolaritätsbeziehungen *verschieden* ausgedehnter Gebiete zum Hauptstudium gemacht hat. Man findet dort auch den allgemeinen Beweis unseres Principes.

Tübingen, den 13. December 1882.

*) Dasselbe ist inzwischen erschienen (Nachschrift vom 4. April 1883).