

# Über getrennte gemeinsame Convergenzgebiete zweier Potenzreihen zweier Veränderlichen.<sup>1)</sup>

Von Konrad Zindler in Graz.

Es seien zwei Potenzreihen zweier Veränderlichen

$$f_1(x, y \mid a, b) \text{ und } f_2(x, y \mid a', b')$$

gegeben, welche auch gemeinsame Convergenzstellen besitzen. Wenn  $(x', y')$  eine solche ist, ferner der Schnittpunkt der Normalen durch  $x'$  auf die Gerade  $aa'$  der  $x$ -Ebene mit  $\xi$ , der Schnittpunkt der Normalen durch  $y'$  auf die Gerade  $bb'$  der  $y$ -Ebene mit  $\eta$  bezeichnet wird, so gehört die Stelle  $(\xi, \eta)$  demselben Stück des gemeinsamen Convergenzbereiches wie  $(x, y)$  an. Die Gesammtheit der Stellen  $(\xi, \eta)$  heißt „der reducierte gemeinsame Convergenzbereich“, und der wirkliche gemeinsame Convergenzbereich besteht aus ebensoviele getrennten Stücken, wie der reducierte, wobei man sich noch, wenn es sich bloß um Abzählung dieser Stücke handelt, auf die Werte  $\xi$  zwischen  $a$  und  $a'$  und auf die Werte  $\eta$  zwischen  $b$  und  $b'$  beschränken kann. Der reducierte gemeinsame Convergenzbereich ist bei Potenzreihen zweier Veränderlichen einer anschaulichen Darstellung in einer Ebene fähig. Zunächst ist nämlich der wahre Convergenzbereich einer solchen Potenzreihe  $f_1$

---

<sup>1)</sup> Die im ersten Absatz zusammengestellten Sätze rühren von E. Phragmén (Om konvergenzområdet hos potensserier af två variabler; Stockholm, Vetenskaps-Akad. Förh. 1883) und A. Meyer. (Om konvergenzområdet hos potensserier af flere variabler; Upsala, Almqvist & Wiksell, 1887; cf. namentlich Abschn. III und V) her, welche daselbst auch Beispiele für Potenzreihen mit zwei getrennten gemeinsamen Convergenzgebieten angegeben haben. Phragmén verwendet, um zu einem reducierten Convergenzbereich zu gelangen, geometrisch gesprochen statt der Normalen die Winkelhalbierende im Punkte  $x'$  des Dreiecks  $aa'x'$  und analog in der  $y$ -Ebene. Die Verwendung der Normalen hat den Vortheil, dass die Mannigfaltigkeit der Stellen des wirklichen gemeinsamen Convergenzbereichs, welche derselben Stelle des reducierten gemeinsamen Convergenzbereichs zugeordnet sind, durch gerade Linien darstellbar ist. Wir nehmen auch die Definition des Convergenzcontinuums nach Meyer (a. a. O. S. 8) an, berücksichtigen also nicht die „Ausläufer“ niedrigerer Dimension des Convergenzgebietes, weil sie für Fragen der Fortsetzung nicht in Betracht kommen. Aus ähnlichem Grunde werden zwei Stellen des gemeinsamen Convergenzcontinuums nur dann als demselben Stücke desselben angehörig betrachtet, wenn sie durch Wege verbunden werden können, die ganz im Innern des gemeinsamen Convergenzcontinuums liegen (a. a. O. S. 4).

durch eine Function  $\sigma = \varphi_1(\rho)$  gekennzeichnet, welche zu jedem Werte  $|x - a| = \rho$  den wahren Convergenzradius  $\sigma$  der Potenzreihe der nunmehr einzigen Veränderlichen  $y - b$  angibt. Ist für die andere Potenzreihe  $f_2$  die entsprechende Function  $\sigma' = \varphi_2(\rho)$ , ist  $\xi$  eine Stelle zwischen  $a$  und  $a'$  und  $|\xi - a| = \rho$ , so werden zum Werte  $\xi$  Werte  $\eta$  der Strecke  $b b'$  gefunden werden können, welche mit  $\xi$  im Innern des reducierten gemeinsamen Convergencesbereiches liegende Stellen ausmachen, wenn die beziehungsweise von  $b$  und  $b'$  ins Innere der Strecke  $b b'$  aufgetragenen Strecken der Länge  $\varphi_1(\rho)$  und  $\varphi_2(\delta - \rho)$  übergreifen, wobei  $\delta = |a - a'|$ , oder wenn

$$\varphi_1(\rho) + \varphi_2(\delta - \rho) > |b - b'|.$$

Eine solche Function  $\varphi$  ist monoton und stetig; wenn sie differenzierbar ist, können der vorwärts und der rückwärts genommene Differentialquotient verschieden sein. Wir nehmen Potenzreihen an, deren zugehörige Functionen  $\varphi$  durch Curven darstellbar sind und beschreiben ein Rechteck  $OA O' B$ , wobei

$$OA = BO' = |a - a'|,$$

$$OB = AO' = |b - b'|.$$

Wir denken uns für die Curve  $\sigma = \varphi_1(\rho)$ ,  $OA$  als positive  $\rho$ -Achse,  $OB$  als positive  $\sigma$ -Achse, die Curve  $\sigma' = \varphi_2(\rho)$  dagegen so verzeichnet, dass für sie  $O'B$  die positive  $\rho$ -Achse,  $O'A$  die positive  $\sigma'$ -Achse ist. Der Flächentheil, der von der ersten Curve begrenzt wird, und einem Randtheil des Rechtecks, welcher  $O$  enthält, heiße  $\mathfrak{F}_1$ ; der Flächentheil, der von der zweiten Curve begrenzt wird, und einem Randtheil des Rechtecks, welcher  $O'$  enthält, heiße  $\mathfrak{F}_2$ . Dann wird also obiger Ungleichung gemäß die Zahl der gemeinsamen Convergencesgebiete beider Potenzreihen durch die Zahl der den Flächentheilen  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  gemeinsamen Stücke der Ebene angezeigt, wobei Stücke, die nur durch einen Punkt zusammenhängen, als getrennt zu zählen sind.

Mit Hilfe des Umstandes, dass die Curven  $\varphi$  Ecken haben können, lässt sich nun ein Verfahren angeben, in der That zwei Potenzreihen zweier Veränderlichen aufzustellen, deren gemeinsames Convergencesgebiet aus  $k$  getrennten Stücken besteht, wobei  $k$  eine beliebig gegebene Anzahl ist. Es sei  $r$  eine positive Zahl,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  seien ganze positive Zahlen, die keinen gemeinsamen Theiler haben. Wir betrachten dasjenige Stück der Curve

$$\rho^{\lambda_1} \sigma^{\lambda_2} = r,$$

gehen, wobei  $m$  und  $n$  reelle positive Zahlen sind, und soll zugleich ihre Tangente in diesem Punkte eine gegebene Richtung haben, welche durch die trigonometrische Tangente  $\tau$  ihres Winkels mit der  $\rho$ -Achse bestimmt ist, so sind die Gleichungen zu erfüllen:

$$(1) \quad m^{\lambda_1} n^{\lambda_2} = r, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{m}{n} \cdot \tau,$$

d. h. es sind ganzzahlige positive Werte  $\lambda_1, \lambda_2$  und ein positiver Wert  $r$  zu finden, welche diesen Gleichungen genügen. Wenn also  $\tau$  rational und negativ ist, so kann der Aufgabe für jeden rationalen Punkt  $(m, n)$  genügt werden. Je zwei solche Curven  $\mathfrak{C}$  schneiden sich in einem einzigen Punkte, außer wenn  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  für beide identisch sind.

Wir stellen nun die Potenzreihe  $f_1(x, y | a, b)$  auf folgende Weise auf: Wir wählen  $|a - a'|$  und  $|b - b'|$  rational, nehmen auf der Diagonale  $BA$  des Rechtecks  $OA O' B$   $k - 1$  rationale Punkte  $(m_\mu, n_\mu)$  an ( $\mu = 1, 2, \dots, k - 1$ ) und bestimmen für jeden solchen Punkt nach den Gleichungen (1) eine Curve  $\mathfrak{C}(\lambda_{1,\mu}, \lambda_{2,\mu}, r_\mu)$  oder kurz  $\mathfrak{C}_\mu$ , welche die Diagonale im Punkte  $(m_\mu, n_\mu)$  berührt. Wählen wir eine Potenzreihe  $\mathfrak{P}_\mu(z)$  mit dem wahren Convergenzradius  $r_\mu$ , so ist

$$\mathfrak{P}_\mu(x^{\lambda_{1,\mu}} y^{\lambda_{2,\mu}})$$

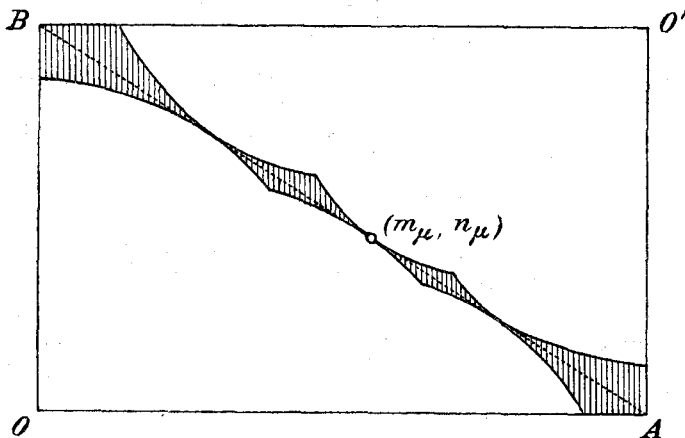
eine Potenzreihe zweier Veränderlichen, deren zugehörige Function  $\varphi$  durch die eben bestimmte Curve  $\mathfrak{C}_\mu$  dargestellt wird. Wir wählen nun

$$f_1(x, y | a, b) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \mathfrak{P}_\mu \left( (x - a)^{\lambda_{1,\mu}} (y - b)^{\lambda_{2,\mu}} \right).$$

Das zu  $f_1$  gehörige Flächenstück  $\mathfrak{F}_1$  ist in diesem Falle außer von einem Randtheil des Rechteckes von einer Curve  $\mathfrak{C}$  begrenzt, die aus  $k - 1$  Bogen je einer der Curven  $\mathfrak{C}_\mu$  zusammengesetzt ist. Da  $(m_\mu, n_\mu)$  auch für das Coordinaten-System der Curve  $\sigma' = \varphi_2(\rho)$  ein rationaler Punkt ist, so lassen sich Potenzreihen  $\mathfrak{P}'_\mu$  und zugehörige Curven  $\mathfrak{C}'(\lambda'_{1,\mu}, \lambda'_{2,\mu}, r'_\mu)$  bestimmen, sodass jede Curve  $\mathfrak{C}'_\mu$  die Diagonale  $BA$  im Punkte  $(m_\mu, n_\mu)$  berührt, jedoch als auf das andere Coordinaten-System bezogen auf der entgegengesetzten Seite der Diagonale liegt, wie die Curve  $\mathfrak{C}_\mu$ . Wählen wir nun

$$f_2(x, y | a', b') = \sum_{\mu=1}^{k-1} \mathfrak{P}'_\mu \left( (x - a')^{\lambda'_{1,\mu}} (y - b')^{\lambda'_{2,\mu}} \right),$$

so haben  $f_1$  und  $f_2$   $k$  getrennte gemeinsame Convergenzgebiete, wie (für  $k=4$ ) nebenstehende Figur schematisch veranschaulicht, in welcher der reducierte gemeinsame Convergencebereich schraffirt ist.<sup>1)</sup> Um das Beispiel zu verallgemeinern, kann man zu jeder Potenzreihe eine beständig convergente Potenzreihe der beiden Veränderlichen addieren.



Man kann nach einem ähnlichen Verfahren sich zwei Potenzreihen zweier Veränderlichen verschaffen, die unbegrenzt viele getrennte gemeinsame Convergencegebiete haben. Nehmen wir nämlich auf der Diagonale  $BA$  eine unbegrenzte Folge rationaler Stellen  $(m_\mu, n_\mu)$  an, deren Häufungsstelle  $(m, n)$  ebenfalls rational sei, was zu Folge unserer Voraussetzung über die Rationalität von  $|a - a'|$  und  $|b - b'|$  geschehen kann, wählen

$$\mathfrak{P}_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z}{r_\mu} \right)^k,$$

so setzen wir:

$$f_1(x, y | a, b) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi(\mu) \mathfrak{P}_\mu \left( (x-a)^{\mu_1, \mu} (y-b)^{\mu_2, \mu} \right),$$

<sup>1)</sup> Will man auch noch den Zusammenhang der Gebiete des reducierten gemeinsamen Convergencebereichs in einzelnen Punkten vermeiden, so kann man  $b''$  an Stelle von  $b'$  im Ausdruck für  $f_2$  setzen, wobei

$$|b'' - b| = |b' - b| + \beta$$

und  $\beta$  eine positive Größe ist. Damit keines der Convergencegebiete verschwinde, genügt es für  $\beta$  z. B. folgende Begrenzung anzugeben: Die Begrenzung jedes solchen Gebiets wird durch die Diagonale  $BA$  in zwei Züge getheilt; die Differenz der Ordinaten dieser Züge (in Bezug auf ein und dasselbe der beiden Coordinatensysteme) für dieselbe Abscisse hat in jedem Gebiet ein Maximum.  $\beta$  muss nun kleiner als das kleinste dieser Maxima genommen werden.

wobei die  $\psi(\mu)$  passend zu bestimmende Convergenzfactoren sind: Es sei  $\mathfrak{C}(\lambda_1, \lambda_2, r)$  diejenige Curve  $\mathfrak{C}$ , welche die Diagonale  $BA$  im Punkte  $(m, n)$  berührt. Fassen wir eine bestimmte Stelle  $[(x-a), (y-b)]$  in's Auge, welche im Innern des Convergenzbereichs jeder einzelnen Potenzreihe  $\mathfrak{P}_\mu$  liegt und setzen

$$|x - a| = \xi, |y - b| = \eta,$$

so ist

$$\xi^{\lambda_1} \eta^{\lambda_2} = k r,$$

wobei  $k < 1$ , ferner

$$\lim_{\mu = \infty} \frac{\xi^{\lambda_{1,\mu}} \eta^{\lambda_{2,\mu}}}{r_\mu} = k,$$

d. h. der absolute Betrag der Exponenten der geometrischen Reihen  $\mathfrak{P}_\mu$  nähert sich für das betrachtete Argument bei wachsendem  $\mu$  einer bestimmten Grenze, die kleiner als Eins ist. Es genügt daher  $\psi(\mu) = \frac{1}{\mu^2}$  zu nehmen. Analog setzen wir

$$\overline{f}_2(x, y | a', b') = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \mathfrak{P}'_\mu \left( (x-a')^{\lambda'_{1,\mu}} (y-b')^{\lambda'_{2,\mu}} \right),$$

wobei  $\lambda'_{1,\mu}, \lambda'_{2,\mu}, \mathfrak{P}'_\mu$  dieselbe Bedeutung wie früher haben.  $\overline{f}_1$  und  $\overline{f}_2$  sind nun zwei solche Potenzreihen von der verlangten Eigenschaft, die nach einem wohldefinierten Verfahren aufgestellt wurden. Es gibt also Potenzreihen zweier Veränderlichen, welche unbegrenzt viele getrennte gemeinsame Convergenzgebiete haben; diese machen nach einem Satze von Cantor (Math. Ann. XX, S. 117) immer eine Menge erster Mächtigkeit aus.