

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 14.

1. *Über den Durchgang schneller Wechselströme durch Drahtrollen; von Max Wien.*

Bei Gelegenheit der Messung von Induktionskoeffizienten hat Hr. Dolezalek¹⁾ beobachtet, daß bei Wechselströmen von über 300 Schwingungen in der Sekunde eine erhebliche Vermehrung des Widerstandes und gleichzeitig eine kleine Verminderung der Selbstinduktion eintritt gegenüber den Werten bei konstantem Strom oder langsamem Wechselstrom.

Die Vermehrung des Widerstandes ist sehr viel größer und befolgt andere Gesetze als der Skineffekt in geraden Drähten, wie ihn Rayleigh²⁾ und Stefan³⁾ berechnet haben. Als Grund der Erscheinung gibt Hr. Dolezalek Wirbelströme an und als deren Folge ein Zusammendrängen der Stromlinien im Draht nach der inneren Seite des Drahtquerschnittes — also nach der Spulenchse zu —, ohne näher darauf einzugehen, in welcher Art dieses Zusammendrängen erfolgt. Da die Erscheinung für alle schnellen Wechselströme, speziell auch für elektrische Schwingungen, drahtlose Telegraphie u. a. von Bedeutung ist, so soll im folgenden der Versuch gemacht werden, den Vorgang rechnerisch zu verfolgen.

Rollen mit vielen Windungslagen.

Nehmen wir zunächst an, es läge ein gerader Draht von dem Radius ϱ und der Länge l_0 in einem homogenen Wechselfeld von n Schwingungen in 2π Sek., und denken wir uns den Draht durch axiale Schnitte parallel den magnetischen Kraftlinien in Streifen geteilt, die an den Enden des Drahtes verbunden sind, so teilen wir damit den Draht in eine Reihe von

1) F. Dolezalek, Ann. d. Phys. 12. p. 1142. 1903.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. p. 381. 1886.

3) J. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 400. 1890.

Stromkreisen ein, in denen durch das Wechselfeld Ströme induziert werden. Die elektromotorische Kraft in jedem dieser Stromkreise ist gleich der Änderung der Anzahl der Kraftlinien \mathfrak{B} mit der Zeit, also gleich

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \cdot f,$$

worin \mathfrak{H} die Feldstärke, f die von dem Stromkreise umschlossene Fläche, also gleich $2x l_0$ ist (vgl. Fig. 1).

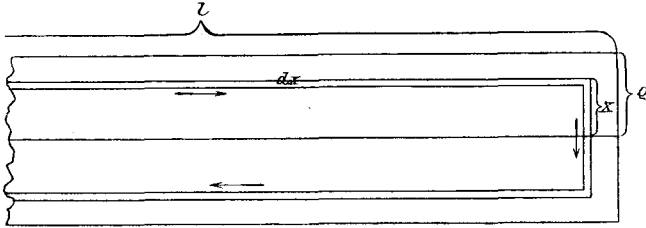


Fig. 1.

Es sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \sin nt$, also die elektromotorische Kraft

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \cdot f = 2nx l_0 \mathfrak{H}_0 \cos nt.$$

Der Widerstand eines solchen Elementarstromkreises ist gleich $l_0 \sigma / \sqrt{\varrho^2 - x^2} dx$ (vgl. Fig. 2), wenn σ der spezifische Widerstand des Metalles ist, und der Widerstand der Teile der Strombahn an den Enden des Drahtes, wo der Strom \perp zur Achse fließt, wegen ihrer geringen Länge vernachlässigt wird.

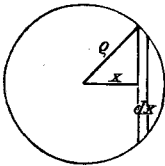


Fig. 2.

Die *Stromamplitude* in einem Elementarstromkreis ist gleich

$$\frac{2n\mathfrak{H}_0}{\sigma} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot x \cdot dx.$$

Die *mittlere Stromamplitude* in einer Drahthälfte gleich

$$\frac{2n\mathfrak{H}_0}{\sigma} \int_0^{\varrho} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot x \cdot dx = \frac{2}{3} \frac{n\mathfrak{H}_0}{\sigma} \varrho^3.$$

Die Joulesche Wärme im ganzen Draht während einer Sekunde beträgt

$$\frac{4n^2 l_0 \mathfrak{H}_0^2}{\sigma} \int_0^1 dt \cos^2 nt \int_0^{\varrho} x^2 \sqrt{\varrho^2 - x^2} dx = \frac{\mathfrak{H}_0^2 n^2 l_0 \varrho^4 \pi}{8\sigma}.$$

Wir gehen jetzt von dem geraden Draht zu Rollen über. Die Rolle wird von den Kraftlinien geschnitten, die von dem in ihr selbst fließenden Strom herrühren. Die Anzahl der Kraftlinien, die durch den Querschnitt des Drahtes geht, ist hier durchaus nicht überall innerhalb des Wicklungsraumes dieselbe, und dies muß bei der Berechnung der Wirbelstromwärme berücksichtigt werden. Bei langen — solenoidalen — Rollen, wie sie Hr. Dolezalek benutzte, ist an der Außenseite das Feld annähernd gleich Null, auf der Innenseite der Wicklung erreicht es ein Maximum. Bei unserer nur angenäherten Berechnung nehmen wir nun zunächst der Einfachheit halber an, daß das Feld am äußeren Ende des Drahtes gleich Null ist, und nun proportional l wächst, bis es am inneren Ende gleich \mathfrak{H}_0 wird; also $\mathfrak{H}_l = \mathfrak{H}_0 \cdot l/l_0$.

Dann ist die elektromotorische Kraft in einem von l und $l + dl$ begrenzten Stück des Drahtes gleich $\partial \mathfrak{H} / \partial t \cdot dl \cdot 2x$ der Widerstand¹⁾ gleich $\sigma dl / \sqrt{\varrho^2 - x^2} dx$, die *mittlere Stromamplitude* des Wirbelstromes in der einen Drahthälfte gleich

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{n \mathfrak{H}_0 \frac{l}{l_0} \cdot 2x dl}{\sigma dl \sqrt{\varrho^2 - x^2} dx} = \frac{2 \varrho^3}{3} \frac{n \mathfrak{H}_0 l}{\sigma l_0},$$

sie wächst also proportional l und erreicht ihr Maximum auf der Innenseite des Wicklungsraumes $2 \varrho^3 n \mathfrak{H}_0 / 3 \sigma$.

Die *Joulesche Wärme* infolge der Wirbelströme ist in dem Elementarstück von der Länge dl

$$\frac{\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \cdot dl \cdot 2x \right)^2}{\sigma dl \sqrt{\varrho^2 - x^2} dx}$$

und im ganzen Draht:

$$\frac{2 n^2 \mathfrak{H}_0^2}{l_0^2 \sigma} \int_0^{l_0} dl \int_0^{\frac{l}{2}} dx \left\{ l^2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2} \right\} = \frac{\mathfrak{H}_0^2 \cdot n^2 \cdot \varrho^4 \pi}{8 \sigma} \cdot \frac{l_0}{3}.$$

1) Die Stromteile \perp zur Drahtachse heben sich mit den Nachbarstromelementen annähernd auf, und kommen daher für unsere Berechnung wieder nicht in Betracht.

Die Annahme, daß \mathfrak{S} längs des Drahtes proportional l zunimmt, ist nicht genau richtig. Das Feld steigt innerhalb des Wickelungsraumes von außen nach innen proportional der Anzahl der Windungslagen, jedoch ist die Drahtlänge einer äußeren Windungslage größer wegen des größeren Radius, demnach steigt \mathfrak{S}_l mit einer höheren Potenz von l als der ersten. Nehmen wir — was jedenfalls zu groß ist — die zweite Potenz an, so erhalten wir $\mathfrak{S}_l = \mathfrak{S}_0 \cdot l^2 / l_0^2$ und die Joulesche Wärme gleich

$$\frac{\mathfrak{S}_0^2}{8} \cdot \frac{n^2 \varrho^4 \pi}{\sigma} \cdot \frac{l_0}{5}.$$

$l_0/3$ ist zu groß, $l_0/5$ zu klein, wir nehmen daher für unsere angenäherte Berechnung $l_0/4$ als richtig an, und mithin die Joulesche Wärme gleich

$$\frac{\mathfrak{S}_0^2 n^2 \varrho^4 \pi l_0}{32 \cdot \sigma}.$$

\mathfrak{S}_0 ist offenbar proportional dem Strom in der Rolle; wenn seine Amplitude gleich α ist, so möge $\mathfrak{S}_0 = G \cdot \alpha$ sein. Demnach der Energieverlust durch die Joulesche Wärme der Wirbelströme gleich

$$\frac{\alpha^2}{2} \left\{ \frac{G^2 \cdot n^2 \varrho^4 \pi \cdot l_0}{16 \cdot \sigma} \right\}.$$

Dieser Energieverlust tritt zu dem Energieverlust durch Joulesche Wärme im Draht infolge des ursprünglichen Stromes hinzu. Derselbe ist, wenn W der Widerstand der Rolle für konstanten Strom ist, gleich $W \cdot \alpha^2 / 2$ in der Sek. Demnach erhalten wir als effektiven Widerstand der Rolle für einen Wechselstrom von n Schwingungen in 2π Sekunden:

$$(1) \quad W' = W + \frac{n^2 G^2 \varrho^4 \pi \cdot l_0}{16 \cdot \sigma}.$$

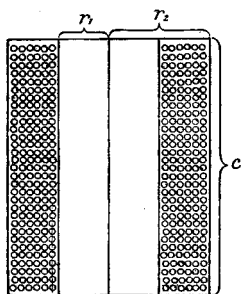


Fig. 3.

Qualitativ werden offenbar die Versuchsergebnisse von Dolezalek durch diese Formel wiedergegeben. Es fragt sich, ob auch zahlenmäßig unsere Rechnung, die einige Vernachlässigungen enthält, mit dem Experiment stimmt.

Hr. Dolezalek verwandte Spulen, deren Länge c größer war als der Radius (r_1 bez. r_2 , vgl. Fig. 3).

Für das Feld derartiger Rollen an Punkten, die der Achse nahe liegen, gibt Heydweiller¹⁾ die Formel:

$$G = \frac{4 \pi m}{c} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{(r_1 + r_2)^2}{2} + \frac{(r_2 - r_1)^2}{6} \right\} + \frac{1}{c^4} \left\{ \frac{6(r_1 + r_2)^4}{2} - \frac{3(r_1 + r_2)^2}{2} (4r_1^2 + (r_2 - r_1)^2) - r_1^2 (r_2 - r_1)^2 \right\} \right],$$

worin m die Gesamtanzahl der Windungen ist.

Für unsere nur angenäherte Rechnung behalten wir nur das weitaus größte Korrektionsglied $(r_1 + r_2)^2/2c^2$ bei und erhalten:

$$G = \frac{4 \pi m}{c} \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{2c^2} \right\}.$$

$$W' - W = \frac{n^2 G^2 \varrho^4 \cdot \pi \cdot l_0}{12 \sigma} = n^2 \frac{4 \cdot \pi^2 m^2}{3 \sigma c^2} \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{c^2} \right\} l_0 \varrho^4 \pi.$$

Führen wir hier $2 \pi N = n$ und $\pi (r_1 + r_2) m = l_0$ ein, so wird:

$$(2) \quad W' - W = \frac{16 \pi^6}{3 \sigma} \cdot \frac{m^3 \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{c^2} \right\} (r_1 + r_2) \varrho^4}{c^2} \cdot N^2.$$

Setzen wir den wahren Widerstand der Rolle

$$W = \frac{(r_1 + r_2) m \sigma}{\varrho^2},$$

so wird der effektive Widerstand

$$W' = \frac{(r_1 + r_2) m \sigma}{\varrho^2} + \frac{16 \pi^6}{3 \sigma c^2} m^3 \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{c^2} \right\} (r_1 + r_2) \varrho^4 N^2.$$

Hieraus folgt, daß der effektive Widerstand einer Rolle gegen Wechselstrom nicht etwa mit abnehmendem spezifischen Widerstand σ immer kleiner wird, sondern für einen bestimmten Wert von σ ein Minimum besitzt und dann wieder steigt. Dieser Wert ist:

$$\sigma = \frac{16 m^2 \varrho^6 \cdot \pi^6}{3 c^2} \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{c^2} \right\} N^2.$$

Für eine Rolle $m = 1000$, $\varrho = 0,1$ cm, $c = 20$ cm, $r_1 + r_2 = 5$ cm, $N = 2000$ erhalten wir $\sigma = 6900$, während für Kupfer ($\sigma = 1700$) der effektive Widerstand mehr als doppelt so groß wäre. Ähnliches gilt natürlich auch für die Drahtdicke.

1) A. Heydweiller, Hilfsbuch für die Ausführung elektrischer Messungen. Leipzig 1892.

Führen wir $\sigma = 1700$, als spezifischen Widerstand des Kupfers bei 18°C. , in die Formel (2) ein, so wird:

$$W' - W = \left[2,26 \cdot \frac{m^3 (r_1 + r_2) \varrho^4}{c^2} \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{c^2} \right\} \right] N^2.$$

Mit dieser Formel sind im folgenden die Dolezalekschen Messresultate verglichen. Auf meine Bitte war Hr. Dolezalek so freundlich, mir die Zahlen für die Dimensionen der einzelnen von ihm gemessenen Rollen zur Verfügung zu stellen.

Abhängigkeit von der Schwingungszahl.

Messungen an 2 Rollen (I und II) mit den Drahtdicken $2\varrho = 1,1 \text{ mm}$ und $2\varrho = 0,85 \text{ mm}$.

I. $m = 1550$, $c = 13,8 \text{ cm}$, $r_1 + r_2 = 5,30$, $\varrho = 0,055$, $W = 4,83 \Omega$.

N	W' beobachtet (D)	W' berechnet
0	4,83 Ohm	4,83 Ohm
591	5,43	5,47
917	6,32	6,30
1452	8,54	8,68
2286	14,13	14,38

II. $m = 1550$, $c = 10,6 \text{ cm}$, $r_1 + r_2 = 4,75$, $\varrho = 0,0425$, $W = 6,96 \Omega$.

N	W' beobachtet (D)	W' berechnet
0	6,96 Ohm	6,96 Ohm
648	7,34	7,34
1000	7,86	7,88
1433	8,83	8,86
1893	10,21	10,28
2272	11,63	11,74

Einfluß der Drahtdicke.

Folgendes sind die für fünf Rollen mit verschiedenem Drahtdurchmesser aus Beobachtung und Rechnung sich ergebenden Werte von K . K ist durch die Formel definiert

$$W' = W + K \cdot N^2.$$

Nr.	ϱ	c	$r_1 + r_2$	m	K beobachtet (D)	K berechnet
1	0,0275	10,5	3,9	1550	$1,7 \cdot 10^{-7} \text{ Ohm}$	$1,5 \cdot 10^{-7} \text{ Ohm}$
2	0,0325	11,55	4,32	1500	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$
3	0,0425	10,6	4,75	1550	$9,1 \cdot 10^{-7}$	$9,3 \cdot 10^{-7}$
4	0,055	13,8	5,3	1550	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
5	0,100	25,0	7,52	1400	$6,9 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$

Die Rollen Nr. 1, 3, 4, 5 sind in der Dolezalekschen Abhandlung angeführt.¹⁾ Nr. 1 ergab zunächst den sehr von der Berechnung abweichenden Wert $K = 3,2 \cdot 10^{-7}$. Auf meine Anfrage war Hr. Dolezalek so liebenswürdig, die Rolle nochmals zu untersuchen. Es stellte sich ein Isolationsfehler heraus, der nach Auskochen in Paraffin verschwand. Zur Sicherheit wurde nun noch Rolle 2 aus einem Draht von wenig verschiedener Dicke gewickelt, welche das obige, mit der Berechnung übereinstimmende Resultat ergab.

Demnach stellt die oben abgeleitete Formel (2) die Vermehrung des effektiven Widerstandes langer Rollen mit vielen Windungslagen bis zu recht hohen Schwingungszahlen mit genügender Genauigkeit dar.

Bei *flachen Rollen*, deren Durchmesser groß ist gegen die axiale Länge, kommt zur Berechnung des magnetischen Feldes eine etwas andere Formel in Betracht (vgl. Heydweiller l. c.):

$$G = \frac{4 \pi m}{r_1 + r_2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_2 + r_1} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{(r_2 + r_1)^2} + \frac{3 r_1^2}{(r_2 + r_1)^2} \right\}.$$

Das letzte Korrektionsglied ist das größte. Wir können daher die Formel in erster Annäherung schreiben:

$$G = \frac{4 \pi m}{r_1 + r_2} \left(1 + \frac{3 r_1^2}{(r_1 + r_2)^2} \right).$$

Danach erhalten wir die Vermehrung des effektiven Widerstandes flacher Rollen aus Formel (1) (p. 4)

$$W' - W = \frac{4 \pi^6 m^3 q^4}{(r_1 + r_2) \sigma} \left(1 + \frac{3 r_1^2}{(r_1 + r_2)^2} \right)^2 N^2.$$

Solche flache Rollen habe ich zur Herstellung der Normal-einheiten der Selbstinduktion²⁾ benutzt, und auch die Firmen, welche diese Normale jetzt fabrikmäßig herstellen, Siemens & Halske, Dr. R. Franke-Hannover, Hartmann & Braun haben diese Form beibehalten. Die eben abgeleitete Formel kann daher dazu benutzt werden, um zu untersuchen, für welche

1) Auch bei Nr. 3, 4 und 5 sind etwas andere Werte von K angeführt, als Hr. Dolezalek sie in seiner Abhandlung angibt. Dies liegt daran, daß Hr. Dolezalek die Zahlen der verschiedenen Rollen auf gleiches Selbstpotential zu reduzieren versuchte, während ich die direkt von Hrn. Dolezalek gemessenen Zahlen angebe.

2) M. Wien, Wied. Ann. 58. p. 553. 1896.

Schwingungszahlen Einheitsrollen aus massivem Draht ohne Bedenken verwandt werden können, und wo Rollen aus Litzen vorzuziehen sind.

Hr. Dolezalek weist in seiner Abhandlung nach, daß bei höheren Schwingungszahlen die *Vergrößerung des effektiven Widerstandes einen Fehler bei der absoluten Messung des Selbstpotentiales nach der von mir angegebenen Methode verursacht*. Es soll nun untersucht werden, ob dieser Fehler bei meiner ursprünglichen Messung von Einfluß war.

Es wurde damals das Selbstpotential von zwei Rollen (I und II) bestimmt. Die Dimensionen derselben waren:

- | | | | | |
|--------------------|---------------------|-------------|---------------|--------------|
| I. $L = 10^8$ cm, | $\varrho = 0,023$, | $r_1 = 2$, | $r_2 = 4,5$, | $m = 1280$. |
| II. $L = 10^7$ cm. | $\varrho = 0,04$, | $r_1 = 2$, | $r_2 = 4,0$, | $m = 360$. |

Die höchste angewandte Schwingungszahl war $256 = N$. Aus der Formel (3) berechnet sich für die Rolle 10^8 eine Zunahme des Widerstandes um $0,022$ Ohm, bei der Rolle 10^7 um $0,005$ Ohm, Werte, welche etwa $\frac{1}{10}$ des Einstellungsfehlers bei den damaligen Messungen darstellen, also durchaus zu vernachlässigen sind.

Bei Vergleich von Selbstinduktionskoeffizienten mit dem Hörtelephon im Brückenweig und einem Induktorium als Stromquelle macht sich die Erhöhung des effektiven Widerstandes bei den höheren Oberströmen bemerklich. Ich habe auf diese Verschlechterung des Minimums durch Dispersion der Obertöne beim Vergleich *ungleicher* Rollen mehrfach hingewiesen¹⁾, sie jedoch für eine Wirkung der Kapazität oder auch mangelhafter Isolation gehalten.

Die von Hrn. Dolezalek beobachtete geringe *Verkleinerung des Selbstpotentiales* läßt sich in folgender Weise erklären:

1) M. Wien, Wied. Ann. 57. p. 255. 1896; 58. p. 563. 1896. Bei meinen Arbeiten mit Wechselströmen höherer Frequenz (Ann. d. Phys. 4. p. 425. 1901) habe ich die Selbstinduktion der Rollen stets durch Einschalten von Kondensatoren aus Glimmer oder Paraffinpapier kompensiert, um Resonanz herzustellen. Die dabei eintretende starke Vermehrung des effektiven Widerstandes habe ich im wesentlichen dem Energieverlust im Dielektrikum der Kondensatoren zugeschrieben. Ein Teil davon rührt nach den Dolezalekschen Resultaten auch von den Wirbelströmen in den Rollen her, jedoch dürfte in den meisten Fällen der Energieverlust im Dielektrikum besonders bei Paraffinpapierkondensatoren erheblich größer sein.

Solange keine merkliche Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Kraft und der Intensität der Wirbelströme besteht, bewirken sie nur eine Vermehrung des wirksamen Widerstandes. Wenn nun die Wirbelströme auch innerhalb desselben Drahtes vorwärts und rückwärts strömen, also „bifilar“ sind, und daher nur ein sehr geringes Selbstpotential besitzen, so bewirkt dieses doch bei den höheren Schwingungszahlen eine merkliche Verzögerung (φ) der Intensität gegen die elektromotorische Kraft. Zerlegt man nun diesen verzögerten Strom in seine Komponenten ($\sin \varphi \sin nt$ und $\cos \varphi \cos nt$), so tritt die Sinuskomponente zu dem ursprünglichen Strom, der durch die Rolle fließt, hinzu, und zwar so, daß sie an der Innenseite des Drahtes mit ihm gleichgerichtet, an der Außenseite mit ihm entgegengesetzt gerichtet ist. Dadurch wird der Strom außen geschwächt, innen verstärkt, so daß die Stromlinien nach der inneren Seite des Drahtquerschnittes gedrängt werden. Schließlich kann sogar, da die Wirbelströme bald sehr viel höhere Intensität erhalten als der ursprüngliche Strom, an der Außenseite die Sinuskomponente des Wirbelstromes den ursprünglichen Strom überwiegen, so daß an der Außenseite ein dem ursprünglichen Strom und der elektromotorischen Kraft entgegengesetzter Strom besteht, während an der Innenseite der Strom verstärkt im richtigen Sinne fließt.

Da die Stromlinien auf diese Weise immer mehr nach innen gedrängt werden, wird der mittlere Radius der Stromkreise verkleinert und das Selbstpotential verringert. Jedoch wird diese Verminderung nur klein sein, da der mittlere Radius der Stromkreise höchstens um den Radius des Drahtes ρ verkleinert werden kann. Wie das Selbstpotential, so ändert sich auch die Anzahl der magnetischen Kraftlinien, die im Mittel durch den Drahtquerschnitt gehen, infolge der Verschiebung der Stromlinien nur wenig. Es wird daher auch bis zu hohen Schwingungszahlen der Energieverlust und damit die Vermehrung des effektiven Widerstandes gemäß der obigen Formel mit dem Quadrat der Schwingungszahl zunehmen. Ein Resultat, das ja den Versuchsergebnissen von Dolezalek entspricht.

Bei der soeben abgeleiteten Theorie ist vorausgesetzt, daß eine große Anzahl von Windungslagen auf der Rolle vor-

handen sind, so daß das Feld innerhalb eines Drahtquerschnittes als homogen angesehen werden kann. Dies ist nicht mehr erlaubt, wenn nur wenige Lagen oder gar nur eine vorhanden ist. Da nun gerade der Fall eines einfachen Solenoids, eines Ringes oder Rechtecks für die elektrischen Schwingungen von besonderem Interesse ist, so soll im folgenden versucht werden, auf die Theorie des Durchganges eines Wechselstromes durch einen beliebig gestalteten Leiter etwas näher einzugehen.

Beliebig gestalteter Leiter.

Für den Skineffekt in geraden Drähten haben Lord Rayleigh¹⁾ und Stefan²⁾ die Formeln für Widerstand und Selbstinduktion bei langsamen und sehr schnellen elektrischen Schwingungen gegeben. Diese Formeln sind ohne weiteres auf gekrümmte lineare Leiter, ja sogar auf Rollen ausgedehnt, obgleich hierzu durchaus keine Berechtigung vorliegt, da die magnetischen Kraftlinien nicht mehr in Kreisen um die Drahtachse, sondern ganz anders verlaufen.

Wir denken uns nun den beliebig gestalteten Leiter in Stromfäden zerlegt und betrachten jeden dieser Stromfäden als gesonderten Leiter. Ehe jedoch die Betrachtung auf beliebig viele Leiter (Stromfäden) ausgedehnt wird, soll zunächst als Einführung der Fall zweier parallel geschalteter Leiter mit den Widerständen W_1 und W_2 , den Selbstpotentialen L_{11} und L_{22} , dem gegenseitigen Induktionskoeffizient L_{12} durchgerechnet werden.

Die Widerstandsoperatoren der beiden Zweige ergeben sich aus³⁾

$$\alpha_1 = W_1 + in \left(L_{11} + L_{12} \frac{a_1}{a_2} \right), \quad \alpha_2 = W_2 + in \left(L_{22} + L_{12} \frac{a_2}{a_1} \right)$$

zu:

$$\alpha_1 = \frac{(W_1 + in L_{11})(W_2 + in L_{22}) + n^2 L_{12}^2}{W_1 + in(L_{11} - L_{12})^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{(W_1 + in L_{11})(W_2 + in L_{22}) + n^2 L_{12}^2}{W_2 + in(L_{22} - L_{12})^2}.$$

1) Lord Rayleigh, l. c.

2) J. Stefan, l. c.

3) Vgl. M. Wien, Wied. Ann. 44. p. 689. 1891.

Der Widerstandsoperator der ganzen Stromschleife:

$$A = W' + \text{in } L' = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}.$$

Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles erhält man den effektiven Widerstand der Stromschleife:

$$W' = \frac{W_1 W_2 (W_1 + W_2) + n^2 \{ W_2 (L_{22} - L_{12})^2 + W_1 (L_{11} - L_{12})^2 \}}{(W_1 + W_2)^2 + n^2 (L_{11} + L_{22} - 2 L_{12})^2}$$

und das effektive Selbstpotential:

$$L' = \frac{L_{11} W_2^2 + 2 L_{12} W_1 W_2 + L_{22} W_1^2 - n^2 (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) (L_{11} + L_{22} - 2 L_{12})}{(W_1 + W_2)^2 + n^2 (L_{11} + L_{22} - 2 L_{12})^2}.$$

Betrachten wir als Beispiel den Fall eines langen Solenoids, das bifilar gewickelt ist, jedoch so, daß der eine Draht immer außen, der andere immer innen liegt. Beide Drähte werden parallel geschaltet. Wir haben damit in erster Annäherung den Fall eines Solenoids aus dickem Draht, durch das ein Wechselstrom fließt. Der gegenseitige Induktionskoeffizient der beiden Solenoide ist gleich dem Selbstinduktionskoeffizient des inneren Solenoids ($L_{12} = L_{11}$). Der Widerstand beider sei als gleich vorausgesetzt ($W_1 = W_2 = 2 W$), wobei W den wahren Widerstand der Stromschleife bedeutet. Dann ist:

$$W' = \frac{16 W^3 + 2 n^2 W (L_{22} - L_{11})^2}{16 W^2 + n^2 (L_{22} - L_{11})^2},$$

$$L' = \frac{4 W^2 (3 L_{11} + L_{22}) + n^2 L_{11} (L_{22} - L_{11})^2}{16 W^2 + n^2 (L_{22} - L_{11})^2}.$$

$L_{22} - L_{11}$ ist eine kleine Größe, demnach werden die Glieder mit n^2 , die sämtlich mit $(L_{22} - L_{11})^2$ multipliziert auftreten, solange n nicht sehr hoch ist, gegenüber W klein sein:

$$W' = W + \frac{n^2 (L_{22} - L_{11})^2}{16 W}, \quad L' = L - \frac{n^2 (L_{22} - L_{11})^2}{16 W^2}.$$

Wir sehen, daß der Widerstand für Wechselstrom W' gegenüber dem für konstanten Strom W steigt, und zwar um ein Glied, das die kleine Größe $L_{22} - L_{11}$ in der zweiten Potenz enthielt, das Selbstpotential L' gegenüber dem Wert für lang-

samen Stromwechsel L sinkt, und zwar um ein Glied, das $L_{22} - L_{11}$ in der dritten Potenz enthält, also sinkt L' langsamer, als W' steigt.

Für sehr große Frequenzen werden schließlich die Glieder mit n^2 doch groß gegen die Glieder ohne n^2 werden, dann wird: $W' = 2W$, $L' = L_{11}$; das sind die Werte für den inneren Draht des Solenoids: *Der Strom fließt ausschließlich in diesem, während der äußere Draht stromlos ist.* Für den Durchgang eines schnellen Wechselstromes durch ein Solenoid können wir hieraus schon schließen, daß die Stromlinien, je höher die Wechselzahl ist, um so mehr nach der Innenseite zusammengedrängt werden.

Um zu dem Stromdurchgang durch einen beliebigen Leiter überzugehen, nehmen wir jetzt statt zweier parallel geschalteter Ströme deren beliebig viele (q) an. Für die Widerstandsoperatoren $a_1 - a_q$ erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{W_1 + in L_{11}}{a_1} + \frac{in L_{12}}{a_2} + \dots + \frac{in L_{1q}}{a_q}, \\ 1 &= \frac{in L_{21}}{a_1} + \frac{W_2 + in L_{22}}{a_2} + \dots + \frac{in L_{2q}}{a_q}, \\ &\vdots \\ 1 &= \frac{in L_{q1}}{a_1} + \frac{in L_{q2}}{a_2} + \dots + \frac{W_q + in L_{qq}}{a_q}. \end{aligned}$$

Den Widerstandsoperator eines beliebigen Stromkreises a_α erhalten wir hieraus als

$$\frac{1}{a_\alpha} = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}.$$

Darin ist Δ die Determinante sämtlicher Koeffizienten, und Δ_α diejenige Determinante, welche entsteht, wenn man in Δ die Vertikalreihe mit dem Index α überall durch 1 ersetzt.

Mit Hilfe einiger Determinantensätze¹⁾ lassen sich sowohl Δ wie Δ_α nach Potenzen von in entwickeln:

1) Vgl. hierüber die Ausrechnung eines sehr ähnlichen Gleichungssystems in meiner früheren Arbeit Wied. Ann. 49. p. 306. 1903.

$$\Delta = W_1 \cdot W_2 \dots W_q \left\{ 1 + (in) \sum_{\beta} \frac{L_{\beta\beta}}{W_{\beta}} + \frac{(in)^2}{2!} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{L_{\beta\beta} \cdot L_{\beta\gamma}}{W_{\beta} W_{\gamma}} \right. \\ \left. + \frac{(in)^3}{3!} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \frac{\begin{vmatrix} L_{\beta\beta} & L_{\beta\gamma} & L_{\beta\delta} \\ L_{\gamma\beta} & L_{\gamma\gamma} & L_{\gamma\delta} \\ L_{\delta\beta} & L_{\delta\gamma} & L_{\delta\delta} \end{vmatrix}}{W_{\beta} W_{\gamma} \cdot W_{\delta}} + \dots \right\}.$$

$$\Delta_1 = W_1 W_2 \dots W_q \left\{ \frac{1}{W_{\alpha}} + (in) \sum_{\beta} \frac{L_{\beta\beta} - L_{\alpha\beta}}{W_{\alpha} W_{\beta}} + \frac{(in)^2}{2!} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \right. \\ \left. \frac{\begin{vmatrix} L_{\beta\beta} & L_{\beta\gamma} \\ L_{\beta\gamma} & L_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma}} - 2 \frac{\begin{vmatrix} L_{\alpha\beta} & L_{\gamma\gamma} \\ L_{\beta\gamma} & L_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma}} + \dots \right\}.$$

Hieraus erhalten wir $1/a_{\alpha}$ in der verhältnismäßig einfachen Form:

$$\frac{1}{a_{\alpha}} = \frac{1}{W_{\alpha}} + (-in) \sum_{\beta} \frac{L_{\alpha\beta}}{W_{\alpha} W_{\beta}} + (-in)^2 \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{L_{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma}} \\ + (-in)^3 \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \frac{L_{\alpha\delta} L_{\beta\gamma} L_{\gamma\delta}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma} W_{\delta}} + \dots$$

Der Widerstandsoperator aller nebeneinander geschalteten Leitungen ist

$$W' + in L' = \frac{1}{\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{a_{\alpha}} \right)} \\ = \frac{1}{\sum_{\alpha} \frac{1}{W_{\alpha}} + (-in) \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{L_{\alpha\beta}}{W_{\alpha} W_{\beta}} + (-in)^2 \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{L_{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma}} + \dots} \\ = \frac{1}{A + (-in) B + (-in)^2 C + (-in)^3 D + \dots} \\ = \mathfrak{A} + in \mathfrak{B} + n^2 \mathfrak{C} - in^3 \mathfrak{D} - n^4 \mathfrak{E} \dots$$

Mithin der effektive Widerstand des beliebigen Leiters:

$$W' = \mathfrak{A} + n^2 \mathfrak{C} - n^4 \mathfrak{E} \pm \dots$$

und das effektive Selbstpotential:

$$L' = \mathfrak{B} - n^2 \mathfrak{D} + n^4 \mathfrak{F} \pm \dots$$

Hierin ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{W_{\alpha}} \right)}.$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{A^2} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{L_{\alpha\beta}}{W_{\alpha} W_{\beta}}}{\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{W_{\alpha}} \right)^2}.$$

$$\mathfrak{C} = \frac{A C - B^2}{A^3} = \frac{\sum \frac{1}{W_{\alpha}} \cdot \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{L_{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma}} - \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{L_{\alpha\beta}}{W_{\alpha} W_{\beta}} \right)^2}{\left(\sum_{\alpha} \frac{1}{W_{\alpha}} \right)^3}$$

etc.

Damit ist unsere Aufgabe formell gelöst. Die Schwierigkeiten beginnen jedoch erst, wenn die einzelnen Koeffizienten, d. h. die den Summen entsprechenden mehrfachen Integrale numerisch ausgewertet werden sollen. Der gegenseitige Induktionskoeffizient ($L_{\alpha\beta}$ etc.)

ist meist ein komplizierter Ausdruck, so daß die Berechnung auch in den scheinbar einfachsten Fällen, z. B. bei einem Ring recht umständlich wird. Wie wir unten sehen werden, ist es fraglich, ob der Erfolg der Mühe entsprechen würde. Hier soll nur der Fall *eines langen Solenoides* näher besprochen werden, weil hier der gegenseitige Induktionskoeffizient

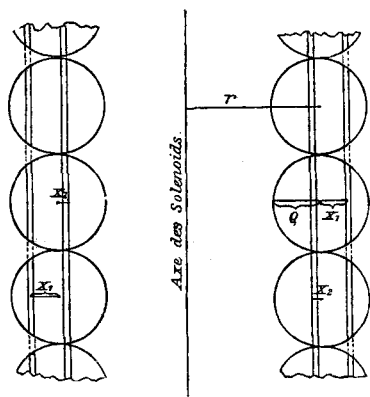


Fig. 4.

einfacher ist. Derselbe ist bei zwei coaxialen Solenoiden gleich dem Selbstinduktionskoeffizient des kleineren also gleich $4\pi^2 m^2 r_1^2 / c$, wenn c die Länge des Solenoids, r_1 der Radius des inneren Solenoids ist. Wir teilen nun durch kreisförmige Schnitte das Solenoid in eine Reihe coaxialer Solenoide (Fig. 4).

Zwei dieser Elementarsolenoiden besitzen die Radien $r + x_1$ und $r + x_2$. Der Widerstand des einen ist gleich

$$\frac{(r + x_1) \pi m \sigma}{\sqrt{\varrho^2 - x_1^2} d x_1},$$

der des anderen gleich

$$\frac{(r + x_2) \pi m \sigma}{\sqrt{\varrho^2 - x_2^2} d x_2}, \quad L_{11} = \frac{4 \pi^2 m^2}{c} (r + x_1)^2, \quad L_{22} = \frac{4 \pi^2 m^2}{c} (r + x_2)^2,$$

L_{12} ist gleich L_{11} , solange $x_1 < x_2$, $L_{12} = L_{22}$, solange $x_1 > x_2$.
Es ist

$$A = \sum_{\alpha} \frac{1}{W_{\alpha}} = \frac{1}{\pi m \sigma} \int_{-e}^{+e} \frac{\sqrt{\varrho^2 - x_1^2}}{r + x_1} d x_1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}}{\sigma m},$$

$$B = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{L_{\alpha\beta}}{W_{\alpha} W_{\beta}} = \frac{4}{\sigma^2 c} \left[\int_{-e}^{+e} d x_2 \frac{\sqrt{\varrho^2 - x_1^2}}{r + x_2} \int_{-e}^{x_2} d x_1 \sqrt{\varrho^2 - x_1^2} (r + x_1) \right. \\ \left. + \int_{-e}^{+e} d x_2 \sqrt{\varrho^2 - x_2^2} (r + x_2) \int_{x_2}^{+e} \frac{\sqrt{\varrho^2 - x_1^2}}{r + x_1} d x_1 \right] \\ = \frac{\pi^2 \varrho^4}{\sigma^2 c} \left\{ 1 - \frac{256}{45 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho^2}{4 r^2} \right\},$$

$$C = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{L_{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma}}{W_{\alpha} W_{\beta} W_{\gamma}} = \frac{2 \pi^4 \varrho^6 r m}{c^2 \sigma^3} \left\{ 1 - \frac{512}{45 \pi^2} \frac{\varrho}{r} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{2,67}{\pi^2} \right) \frac{\varrho^3}{r^2} \right\}$$

etc.

Hieraus

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{A} = \frac{\sigma m}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}}$$

und unter Vernachlässigung von ϱ^2/r^2 gegen 1:

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{A^2} = \frac{\sigma \cdot m}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} \left[\frac{2 \pi^2 \varrho^3 m}{\sigma c} \right] \left[\frac{r}{\varrho} - \frac{256}{45 \pi^2} \right],$$

$$\mathfrak{C} = \frac{A C - B^2}{A^3} = \frac{\sigma m}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} \left[\frac{2 \pi^2 \varrho^3 m}{\sigma c} \right]^2 0,272,$$

$$\mathfrak{D} = \frac{A D - C B}{A^4} = \frac{\sigma m}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} \left[\frac{2 \pi^2 \varrho^3 m}{\sigma c} \right]^3 \Gamma,$$

worin Γ ein von den Rollenkonstanten unabhängiger kleiner Zahlenfaktor ist.

Nennen wir

$$\frac{2 \pi^2 \varrho^3 m}{\sigma c} = \Phi,$$

so wird der effektive Widerstand eines Solenoides:

$$W' = \frac{\sigma m}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} [1 + 0,272 \cdot n^2 \Phi^2 - \dots],$$

$$n L' = \frac{\sigma m}{r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}} \left[n \Phi \left(\frac{r}{\varrho} - \frac{256}{45 \pi^2} \right) - n^3 \Phi^3 \cdot I' + \dots \right].$$

Das Charakteristische bei diesen Reihen für das Solenoid ist, daß die durch das Zusammendrängen der Stromlinien verursachten Glieder $0,272 \cdot n^2 \Phi^2$ und $n^3 \Phi^3 \cdot I'$ mit sehr hohen Potenzen von ϱ einsetzen, indem die niedrigeren Potenzen sich herausheben. Da

$$\Phi = \frac{2 \pi^2 m}{\sigma c} \cdot \varrho^3,$$

so ist das Korrektionsglied für den Widerstand proportional ϱ^6 , während es bei dem Skineffekt gerader Drähte gleich

$$\frac{n^2}{12} \cdot \frac{\pi^2}{\sigma^2} \cdot \varrho^4$$

ist. Andererseits wird m/c , die Anzahl der Windungen auf der Längeneinheit, bei dicht gewickelten Solenoiden um so kleiner, je dicker der Draht ist. Setzen wir unter Vernachlässigung der Umspinnung

$$\frac{2 \varrho m}{c} = 1, \text{ so ist } \Phi = \frac{\pi^2 \varrho^2}{\sigma}$$

und das Korrektionsglied gleich

$$0,272 \cdot n^2 \frac{\pi^4 \varrho^4}{\sigma^2},$$

also bei gleicher Drahtlänge etwa 32 mal so groß wie bei einem gerade gespannten Draht.

Für höhere Werte von $n \Phi$ konvergieren die Reihen schlecht. Der physikalische Grund davon liegt im folgenden: Sobald ein Zusammendrängen der Stromlinien nach der Innenseite des Drahtquerschnittes erfolgt, so vermindert sich auch die Ursache der ganzen Erscheinung: das Hindurchtreten der magnetischen Kraftlinien durch den Draht selbst, weil diese ja bei dem Solenoid nur von den an der Außenseite des Drahtquerschnittes bez. in ihm fließenden Stromlinien herrühren. Während oben bei den Rollen mit vielen Lagen, wo durch

das Zusammendrängen der Stromlinien nach Innen die Anzahl der die Rollen selbst schneidenden Kraftlinien nur wenig kleiner wurde, auch für sehr hohe Schwingungszahl das erste von n^2 abhängige Glied zur Darstellung der Erscheinung genügte, machen sich bei dem Solenoid, wo die magnetischen Kraftlinien im Draht sich gleichzeitig mit dem Zusammendrängen der Kraftlinien nach Innen stark vermindern, die höheren Glieder der Reihe bald merklich.

Um experimentell festzustellen, wie lange das erste Glied die Vermehrung des effektiven Widerstandes genügend darstellt, wurden zwei Solenoide in verschiedener Drahtdicke hergestellt und ihr effektiver Widerstand in der Brücke mit der Wechselstromsirene¹⁾ als Stromquelle und dem Hörtelephon als Brückeninstrument durch Vergleich mit aus gedrillter Litze hergestellten Solenoiden²⁾ gemessen. Sowohl im Stromkreise der Wechselstromsirene, als auch in dem des Telephons wurde durch Einschalten von Kondensatoren elektrische Resonanz hergestellt.

Die Dimensionen der Solenoide und die Resultate der Messung waren folgende:

I. $q = 0,0485$, $m = 534$, $c = 61$, $r = 1,75$, $W = 1,24$ Ohm.

$N = \frac{n}{2\pi}$	$n \Phi$	$W' - W$ berechnet	$W' - W$ gemessen
4050	0,29	0,029 Ohm	0,026
5680	0,40	0,058	0,056
8310	0,60	0,123	0,110

Das Selbstpotential nahm um Bruchteile eines Prozentes gegen das für langsamen Wechselstrom ab.

II. $q = 0,10$, $m = 338$, $c = 71,8$, $r = 2,31$, $W = 0,265$ Ohm.

$N = \frac{n}{2\pi}$	$n \Phi$	$W' - W$ berechnet	$W' - W$ beobachtet	$\frac{(W' - W) \text{ beob.}}{(W' - W) \text{ ber.}}$
4050	1,39	0,139 Ohm	0,089	64 Proz.
5710	1,96	0,277	0,159	57
8000	2,75	0,544	0,235	43

Das Selbstpotential nahm um ca. 2 Proz. gegen die für langsame Schwingungen ab.

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 4. p. 425. 1901.

2) Die Firma Siemens & Halske war so freundlich, mir die dazu nötigen Litzen zur Verfügung zu stellen.

Wir sehen, daß bis zu $n\Phi = 0,5$ das erste Korrektionsglied genügt, daß aber bei Werten von $n\Phi$, die etwas größer sind als 1, sich die höheren Glieder sehr bemerkbar machen, und sehr bald die Reihe nicht mehr recht konvergieren dürfte, jedenfalls eine große Anzahl von Koeffizienten berechnet werden müßten, was große rechnerische Schwierigkeiten haben würde.

Nun würden offenbar gerade die Verhältnisse bei sehr schnellen Schwingungen von besonderem Interesse sein, wo Schwingungszahlen von einer Million in der Sekunde und darüber verwandt werden. Hier erreicht $n\Phi$ im allgemeinen sehr hohe Werte, z. B. sind die Dimensionen einer viel gebrauchten Form des Teslatransformators folgende:

$$\begin{aligned} \text{Primäre Spule: } \quad \varrho &= 0,165, \quad c = 11, \quad m = 20, \\ n &= 2\pi N = 2\pi \cdot 2,6 \cdot 10^8 = 1,67 \cdot 10^7, \quad n\Phi = 1600, \\ \text{Sekundäre Spule: } \quad \varrho &= 0,025, \quad c = 12, \quad m = 230, \\ n\Phi &= 57. \end{aligned}$$

Für solche hohen Werte von $n\Phi$ konvergieren die Reihen sicher nicht, und, um W' und L' zu berechnen, müßte man einen geschlossenen Ausdruck dafür aufstellen, wie ihn Rayleigh für gerade Drähte gegeben hat.¹⁾

Ähnlich liegen die Dinge bei *Ringen* und *Rechtecken*.

Man hat hier bisher zur Berechnung des effektiven Widerstandes und der Selbstinduktion einfach die Formeln für den Skineffekt in geraden Drähten benutzt.²⁾ Das ist auf jeden Fall unrichtig, da bei schnellen Schwingungen die Stromlinien in einem Ring nicht nur nach der Peripherie gedrängt werden, sondern auch eine ungleichmäßige Verteilung derselben auf der Peripherie eintritt, indem auf der Innenseite mehr Stromlinien laufen als außen. Auch hier dürften für die praktischen Fälle bei Hertzschen Schwingungen die Reihen

1) Die großen Abweichungen, welche kürzlich Drude (Ann. d. Phys. 9. p. 590. 1902) zwischen den von ihm experimentell gefundenen und den nach der Stefanschen Formel berechneten Werten des Selbstpotentials von Solenoiden fand, können nicht in dieser Verschiebung der Stromlinien ihren Grund haben, da diese nur eine Differenz von der Größenordnung ϱ/ν bewirken könnte.

2) Vgl. z. B. R. Blondlot in seiner bekannten Bestimmung von v mit elektrischen Schwingungen (Compt. rend. 113. p. 628. 1891.

nicht mehr konvergieren, und nur die Aufstellung eines geschlossenen Ausdruckes zum Ziele führen.

Verwendung gedrillter oder geflochtener Litzen.

Die Berechnung aller dieser Formeln hat eigentlich nur noch theoretische Bedeutung, da Hr. Dolezalek ja das Mittel angegeben hat, wie man überall eine ungleichmäßige Verteilung der Stromlinien prinzipiell vermeiden kann: nämlich durch Verwendung von Litzen an Stelle massiver Drähte, wobei jedoch dafür gesorgt werden muß, daß keiner der Einzeldrähte, aus denen die Litze besteht, bevorzugt wird, sie also alle gleichen Widerstand, Selbstinduktion und gegenseitige Induktion besitzen. Zu dem Zweck muß eigentlich jeder Elementardraht gleich oft an jeder Stelle des Drahtquerschnittes sich befinden. Bei Rollen genügt es hierfür schon, wie Hr. Dolezalek gezeigt hat, der Litze einen Drall zu geben, so daß jeder Elementardraht bald auf der Innen-, bald auf der Außenseite des ganzen Drahtes verläuft.

Die Unterteilung kann natürlich nicht unbegrenzt weiter getrieben werden: mit Elementardrähten von 0,1 mm Dicke dürfte die Grenze erreicht sein. In jedem dieser Elementardrähte werden natürlich wieder Wirbelströme auftreten, und es soll hier zum Schluß noch untersucht werden, wie groß diese restierende Vermehrung des effektiven Widerstandes in Rollen, Solenoiden und geraden Drähten ist.

Rollen. Für jeden Elementardraht berechnet sich die Widerstandsvermehrung nach unseren obigen Formeln für Voll-drähte. Sind ν Elementardrähte vorhanden, so ist bei gleichem Gesamtquerschnitt, da die Widerstandsvermehrung proportional ϱ^4 ist, diejenige des Elementardrahtes ν^2 mal kleiner, und da ν solcher Elementardrähte *parallel geschaltet* sind, ν^3 mal kleiner als bei einem Volldraht. Mithin erhalten wir für eine lange Rolle mit mit vielen Windungslagen (vgl. Formel (2), p. 5):

$$W' - W = \frac{16 \cdot \pi^6}{3 \sigma \cdot \nu^3} \frac{m^3 (r_1 + r_2) \varrho^4}{c^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{(r_1 + r_2)^2}{c^2} \right\} N^2.$$

Für die oben von Hrn. Dolezalek untersuchte Rolle 5
 $\varrho = 0,100$, $c = 25$, $r_1 + r_2 = 7,52$, $m = 1400$ ergibt Rechnung
 und Versuch eine Widerstandsvermehrung um 1 Ohm bei der

Schwingungszahl $N = 382$ in der Sekunde. Ersetzen wir den Volldraht durch Elementardrähte von 0,1 mm Dicke, so müssen wir um den gleichen Kupferquerschnitt zu erhalten, $\nu = 400$ machen. Demnach erreichen wir eine Widerstandsvermehrung von 1 Ohm erst bei einer Schwingungszahl von $N = 3,1 \cdot 10^6$.

Solenoid. Im Gegensatz zu einem Solenoid aus einem Volldraht bewirkt das Zusammendrängen der Stromlinien in den Elementardrähten einer Litze keine merkliche Änderung der magnetischen Kraftlinien. Daher können die Wirbelströme in dem Elementardraht nach den obigen Formeln für einen geraden Draht, der sich in einem homogenen Wechselfeld befindet (p. 2), berechnet werden. Das magnetische Feld ist am äußeren Rande des Solenoids gleich Null, am inneren gleich $4\pi m/c \cdot \alpha$, wenn α die Stromamplitude ist, im Mittel demnach gleich $2\pi m/c \cdot \alpha$. Hieraus erhalten wir für die Widerstandsvermehrung in einem Elementardraht:

$$\frac{(2\pi m)^2}{c^2} \cdot \frac{n^2 \varrho^4 \pi}{8\sigma} \cdot \frac{2r\pi m}{\nu^2}$$

und, da ν Drähte parallel geschaltet sind:

$$\frac{(2\pi m)^2}{c^2} \cdot \frac{n^2 \varrho^4 \pi}{8\sigma} \cdot \frac{2r\pi m}{\nu^3} = \frac{\pi^4 \varrho^4 m^3 r}{c^2 \sigma \nu^3} n^2.$$

Für unser Solenoid II (p. 17) ($\varrho = 0,10$, $m = 338$, $c = 71,8$, $r = 2,31$, $W = 0,265$ Ohm) erhielten wir oben eine Vermehrung des Widerstandes um 0,089 Ohm für $N = 4050$. Dieselbe Widerstandsvermehrung würden wir bei einem Solenoid aus 400 0,1 mm dicken Litzen für $N = 1,2 \cdot 10^7$ erhalten.

Gerader Draht. Für die Berechnung der Wirbelströme in den Elementardrähten kommt hier das magnetische Feld im Innern eines geraden Drahtes in Betracht. Dasselbe ist im Abstand x von der Drahtachse gleich $2x\alpha/\varrho^2$. Bei einer Litze gleicher Dicke ist die mittlere Entfernung des Elementardrahtes von der Achse gleich $\varrho\sqrt{2}/2$. Mithin das Feld $\sqrt{2}/\varrho \cdot \alpha$. Hieraus folgt bei ν Elementardrähten die Widerstandsvermehrung:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\varrho}\right)^2 \cdot \frac{n^2 \varrho^4 \pi}{8\sigma} \cdot \frac{l}{\nu^3} = \frac{n^2 \varrho^2 \pi \cdot l}{4\sigma \cdot \nu^3}.$$

Bei einem geraden Volldraht von 100 m Länge und 0,1 Radius erfolgt nach den Rayleighschen Formeln eine Vermehrung des Widerstandes um 0,1 Ohm bei $N = 2300$.

Bei einer Litze aus 400 Elementardrähten von 0,100 mm Dicke ergibt unsere Formel die gleiche Widerstandsvermehrung erst bei $N = 6,0 \cdot 10^7$.

In allen Fällen ist also die Vermehrung des wirksamen Widerstandes bei Litzen praktisch verschwindend.

Aachen, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, 10. Febr. 1904.

(Eingegangen 12. Februar 1904.)
