Über die Starrheit konvexer Polyeder.

Von

M. Dehn in Breslau.

Cauchy hat auf bewundernswerte Art den Satz bewiesen:

Zwei gleichzusammengesetzte konvexe) Polyeder mit entsprechend kongruenten Seitenflächen sind selbst kongruent oder symmetrisch.*

Im folgenden soll der sehr eng mit dem Cauchyschen Satz zusammenhängende Satz bewiesen werden:

Ein konvexes Polyeder mit starren Seitenflächen ist auch infinitesimal nur wie ein starrer Körper beweglich.

Der analytische Ausdruck für diese Tatsache ist: sind a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; $x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n$ die Koordinaten der Ecken des Polyeders,

$$f_1(a_1, \ldots, c_3;\ x_1, \ldots, z_n) = f_2(a_1, \ldots, c_3;\ x_1, \ldots, z_n) = f_m(a_1, \ldots, c_3;\ x_1, \ldots, z_n) = 0$$

Bedingungen zwischen den Koordinaten, die die Starrheit der Seitenflächen zur Folge haben (die drei ersten Ecken sollen auf einer Seitenfläche und nicht in einer Geraden liegen), dann ist in der Matrix:

$$M:\quad \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{matrix}$$

mindestens eine $3n$-reihige Determinante von Null verschieden. Anschaulicher und völlig gleichbedeutend mit dem obigen Satz ist die Aussage:

Zu jedem an den Ecken eines konvexen Polyeders angreifenden, im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystem gibt es ein an den Ecken angreifendes und in den Seitenflächen wirkendes Kräftesystem von der Art,

---

*) Liegen alle von den Ecken einer Seitenfläche verschiedene Ecken eines Polyeders auf *einer* Seite der Ebene dieser Seitenfläche, dann heißt das Polyeder konvex.

daß 1. die Kräfte des ersten Systems, die an einer Ecke angreifen mit den an derselben Ecke angreifenden Kräften des zweiten Systems äquivalent sind und 2. die in einer Seitenfläche wirkenden Kräfte des zweiten Systems für sich im Gleichgewicht sind.

Ein noch kürzerer Ausdruck hierfür ist:

Ein aus starren Seitenflächen aufgebautes konvexes Polyeder ist stabil.

Sowohl in dem Cauchyschen wie in dem von uns zu beweisenden Satz enthalten, aber viel weniger als diese aussagend ist der folgende Satz:

Die endlichen Bewegungen eines konvexen Polyeders mit starren Seitenflächen sind die eines starren Körpers.

Unser Beweisgang ist von dem entsprechenden Cauchyschen durchaus verschieden.

1. Es ist sehr leicht einzusehen, daß wir unsere Untersuchung auf Trigonalpolyeder, d. i. auf von lauter Dreiecken begrenzte Polyeder beschränken können. Denn ist ein Polyeder mit dem n-Eck F infinitesimal beweglich, so ist sicher auch das Polyeder infinitesimal beweglich, das aus dem ersten entsteht, wenn man F durch die Seitenflächen einer Pyramide mit der Grundfläche F ersetzt. Denn dadurch kann die Beweglichkeit des Polyeders nicht verringert werden. Dasselbe ist auch leicht analytisch einzusehen: Wir fügen zu der Matrix M die drei Reihen hinzu, die den drei Bedingungen entsprechen, deren Erfüllung die Starrheit der sämtlichen Seitenflächen der Pyramide zur Folge hat. Sämtliche $3n + 3$-reihigen Determinanten der neuen Matrix werden verschwinden, wenn die sämtlichen $3n$-reihigen Determinanten von M verschwinden. Also folgt aus der infinitesimalen Beweglichkeit des ursprünglichen Polyeders dieselbe Eigenschaft für das neue, selbst wenn wir für dieses letztere die Starrheit der Fläche F aufrecht erhalten. Ist das ursprüngliche Polyeder konvex, so ist auch das neue konvex, falls wir die Höhe der hinzugefügten Pyramide genügend klein wählen. Aus der infinitesimalen Starrheit sämtlicher konvexer Trigonalpolyeder folgt also dieselbe Eigenschaft für sämtliche konvexe Polyeder. *Wir beschränken uns deswegen von jetzt an auf Trigonalpolyeder.*

2. Wir bezeichnen eine Seitenfläche, ihre drei Kanten und ihre drei Ecken als Randelemente, alle übrigen Elemente der Polyeder als innere. Die Starrheit sämtlicher Seitenflächen folgt hier aus der Starrheit der Kanten. Halten wir also die drei Randecken fest, so werden die der Voraussetzung entsprechenden, die Beweglichkeit des Polyeders einschränkenden Bedingungen ausgedrückt durch die Starrheit sämtlicher innerer Kanten. Ist ϱ die Anzahl der Kanten, so ist $\frac{2\varrho}{3}$ die Anzahl der Flächen und also nach der Eulerschen Formel die Anzahl der Ecken gleich $\frac{\varrho}{3} + 2$.

Wir haben also $\varrho - 3$ Bedingungen für die $3\left(\frac{\varrho}{3} - 1\right)$ Koordinaten der inneren Ecken. Die Matrix M ist also quadratisch und die Bedingung für die infinitesimale Starrheit des Polyeders ist das Nichtverschwinden der Determinante

$$D = \left|\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_i - x_k & y_i - y_k & z_i - z_k & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_k - x_i & y_k - y_i & z_k - z_i & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix}\right| .$$

Hier entspricht jede Reihe einer Bedingung von der Form:

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = s_{ik}^2 .$$

3. Je drei Kolonnen der Matrix von D entsprechen einer inneren Ecke des Polyeders. Jede dreireihige Determinante der aus solchen drei Kolonnen bestehenden Matrix ist, falls sie keine Nullenreihe besitzt, durch einen Ausdruck von der Form

$$T_{i\,;\,k} = \left|\begin{matrix} x_i - x_{i_{k'}} & y_i - y_{i_{k'}} & z_i - z_{i_{k'}} \\ x_i - x_{i_{k''}} & y_i - y_{i_{k''}} & z_i - z_{i_{k''}} \\ x_i - x_{i_{k'''}} & y_i - y_{i_{k'''}} & z_i - z_{i_{k'''}} \end{matrix}\right|$$

gegeben, dessen absoluter Wert gleich dem 6-fachen Inhalt des Tetraeders ist, das von den drei Strecken $P_i P_{i_{k'}}$, $P_i P_{i_{k''}}$, $P_i P_{i_{k'''}}$ gebildet wird. Die Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $\overrightarrow{P_i P}_{i_{k'}}$, $\overrightarrow{P_i P}_{i_{k''}}$, $\overrightarrow{P_i P}_{i_{k''}}$ denselben oder den umgekehrten Umlaufssinn bestimmen, wie die positiven Halbstrahlen der x-, y- und z-Achse. Entwickeln wir die Determinante D nach solchen Unterdeterminanten, so erhalten wir für D den Ausdruck

$$D = \pm \sum_k (-1)^{v_k} \prod_i T_{i,\,k} .$$

Jedes Glied $\prod_i T_{i\,;\,k}$ dieser Summe entsteht auf folgende Weise: Wir verteilen die $\varrho - 3$ inneren Kanten zu je dreien auf die $\frac{\varrho}{3} - 1$ Ecken und zwar ordnen wir der Ecke P_i die Kanten $P_i P_{i_{k'}}$, $P_i P_{i_{k''}}$, $P_i P_{i_{k'''}}$ zu; dann bilden wir das Produkt der Inhaltszahlen sämtlicher Tetraeder

$$(P_i;\ P_{i,\,i_{k'}},\ P_{i,\,i_{k''}},\ P_{i,\,i_{k'''}})$$

jede mit $+6$ oder -6 entsprechend seinem Umlaufssinn multipliziert. Die Zahl v_k ist gleich der Anzahl der Vertauschungen von zwei Kanten, die eine bestimmte solche Zuordnung — wir wollen als solche etwa die mit dem Index $k = 1$ wählen — in die k^{te} Zuordnung überführt. Addieren wir die sämtlichen möglichen Zuordnungen entsprechenden, dergestalt mit Vorzeichen versehenen Produkte, so erhalten wir $\pm D$.

Wir werden nun Folgendes nachweisen: 1) *Es existieren für jedes Eulersche Polyeder solche Anordnungen der inneren Kanten zu Tripeln, daß auf den drei Kanten jedes Tripels ein und dieselbe innere Ecke liegt.* — Damit werden wir gezeigt haben, daß für kein Eulersches Polyeder die Determinante allein wegen der Verteilung der Nullen in ihrer Matrix verschwindet, oder, was dasselbe ist, daß die Anzahl der Glieder in der D darstellenden Summe von Null verschieden ist. Liegen bei dem Polyeder keine drei von einer Ecke ausgehenden Kanten in einer Ebene, eine für konvexe Polyeder stets erfüllte Bedingung, so werden die Glieder in dieser Summe alle von Null verschieden sein. — 2) *Die Zahl* v_k (d. i. die Anzahl der Kantenvertauschungen, die die erste Zuordnung in die k^{te} überführen) *vermehrt um die Anzahl der Umlaufssinnänderungen, die die Tetraeder* (P_i, $P_{i_1'}$, $P_{i_1''}$, $P_{i_1'''}$) *durch diese Kantenvertauschungen erleiden, ist bei konvexen Polyedern gerade.* — Daraus folgt, daß D durch die Summe lauter von Null verschiedener Größen mit gleichem Vorzeichen dargestellt wird und deswegen von Null verschieden ist. *Mit diesem Nachweis werden wir also unser Ziel erreicht haben.*

4. Wir führen den Beweis für die Existenz der im vorigen Abschnitt erklärten Zuordnungen (wir bezeichnen sie mit den Buchstaben Φ) rein topologisch. Wir setzen von den zu betrachtenden Polyedern nur voraus, daß sie einfachen Zusammenhang besitzen und daß zwei ihrer Ecken höchstens durch eine Kante verbunden sind, Eigenschaften, die für konvexe ebenflächige Polyeder stets erfüllt sind. —

Existiert eine Zuordnung Φ' für das Polyeder Π', so existiert auch eine solche, Φ, für das Polyeder Π, das aus Π' entsteht durch zentrale Zerlegung eines inneren Dreiecks in drei Dreiecke. Wir erhalten Φ aus Φ', wenn wir die drei neuen Kanten der neuen Ecke zuordnen. Wir können deswegen unsere Betrachtung beschränken auf solche Polyeder, die keine innere dreistrahlige Ecke haben.

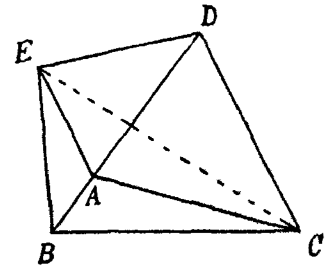

Fig. 1.

Es möge nun Π eine vierstrahlige innere Ecke A mit den Kanten AB, AC, AD und AE haben (s. Fig. 1). Nach unseren Voraussetzungen sind B und D, sowie C und E je voneinander verschieden und es können auf Π nicht gleichzeitig eine Kante BD und eine Kante EC liegen. Es möge etwa EC nicht auf Π liegen, dann bilden wir aus Π ein neues Polyeder Π', indem wir die vier an A liegenden Dreiecke ersetzen durch die beiden Dreiecke BEC und DEC.

Wir bestimmen ferner das Randdreieck für Π' so, daß EC innere Kante von Π' wird. Das ist sicher möglich, da auf Π' sicher noch andere Dreiecke als BEC und DEC liegen. Gibt es nun nach dieser Bestimmung eine Zuordnung Φ' für Π' und ist durch sie EC etwa dem Punkte C zugeordnet, dann erhalten wir Φ aus Φ', indem wir die Zuordnung für die Π und Π' gemeinsamen Kanten bestehen lassen und AB, AE und AD der Ecke A zuordnen.

Da für Π' ebenfalls unsere beiden Voraussetzungen erfüllt sind, so können wir dieselbe Reduktion auf eine etwa in Π' vorhandene vierstrahlige Ecke anwenden und erhalten Φ' aus der Zuordnung Φ'' für das reduzierte Polyeder genau so wie Φ aus Φ'. Wir erkennen so, daß wir unsere Betrachtungen beschränken können auf solche Polyeder, die weder dreistrahlige noch vierstrahlige innere Ecken besitzen. — Wir erkennen auch leicht, daß unsere Voraussetzungen beide notwendig sind. Denn die Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges muß schon deswegen gemacht werden, damit die Anzahl der inneren Kanten dreimal so groß ist, wie die Anzahl der inneren Ecken. Die Voraussetzung, daß zwei Ecken nur durch eine Kante verbunden sind, wurde bei der Reduktionskonstruktion benutzt und das nebenstehende Beispiel (Fig. 2) zeigt, daß, wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist, auch gar keine Zuordnung der gewünschten Art zu existieren braucht.

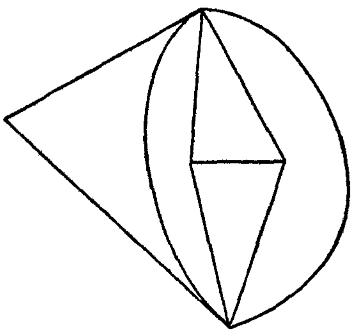

Fig. 2.

Es möge nun Π eine fünfstrahlige innere Ecke A mit den Kanten AB, AC, AD, AE und AF besitzen. Dann sind nach unseren Voraussetzungen B, C, D, E, F alle voneinander verschieden und es gibt höchstens *eine* Kante von Π, die Diagonale des Fünfecks $BCDEF$ ist. Wir können also annehmen, daß auf Π keine Kanten FC und FD liegen. Bilden wir dann Π' aus Π, indem wir die fünf Dreiecke mit der Spitze A ersetzen durch die drei Dreiecke mit der Spitze F, und existiert dann eine Zuordnung Φ' für Π', so können wir aus Φ' eine Zuordnung Φ für Π ableiten auf drei verschiedene Weisen je nach der Art, wie durch Φ' die Kanten FC und FD den Ecken zugeordnet sind. Die drei verschiedenen Fälle sind in den folgenden Figuren 3, 4, 5 dargestellt, wobei die in Betracht kommenden Kanten mit Pfeilen versehen sind, die von derjenigen Ecke ausgehen, der die Kante zugeordnet ist.

Zur Erläuterung des letzten Falles sei noch bemerkt, daß durch Φ' nicht gleichzeitig die Kanten FC und FD, sowie FB und FE der Ecke F zugeordnet sein können. In Fig. 5 ist deswegen angenommen, daß durch Φ' die Kante FE der Ecke E zugeordnet ist. — Da für Π' ebenfalls unsere beiden Voraussetzungen erfüllt sind, so können wir dieselbe Reduktion auf eine etwa in Π' vorhandene fünfstrahlige Ecke anwenden und erhalten Φ' aus der Zuordnung Φ'' für das reduzierte Polyeder genau nach demselben Verfahren, wie Φ aus Φ'.

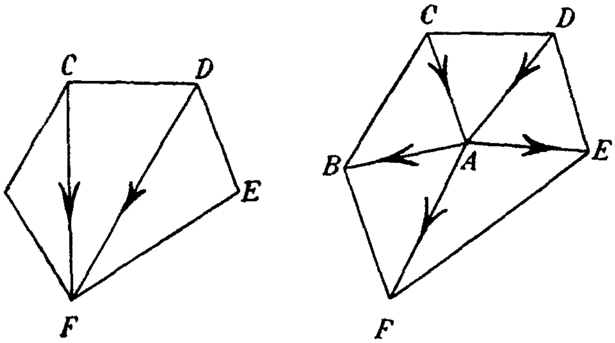

Fig. 3.

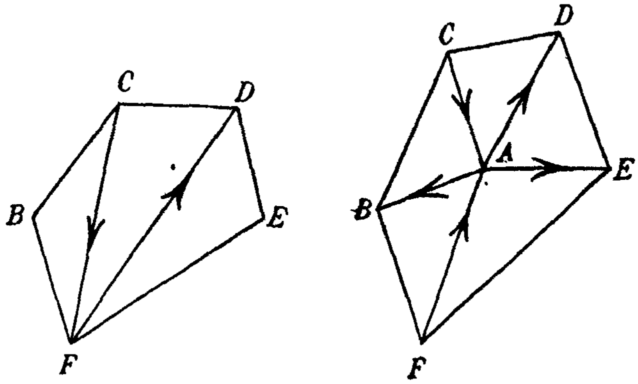

Fig. 4.

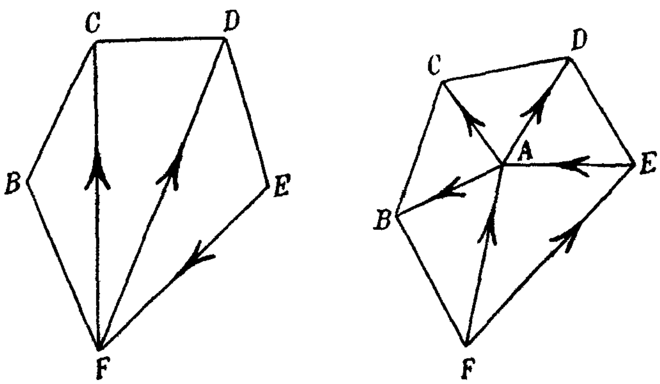

Fig. 5.

Bei keinem Polyeder können die inneren Ecken alle sechs- und mehrstrahlig sein. Denn dann würden von den inneren $\frac{\varrho}{3} - 1$ Ecken mehr als $\frac{6}{2}\left(\frac{\varrho}{3} - 1\right) = \varrho - 3$ Kanten ausgehen (man beachte, daß bei der sechsfachen Zählung der inneren Ecken die nach den Randecken gehenden Kanten nicht doppelt gezählt werden). Es gibt aber nur $\varrho - 3$ innere Kanten. — Durch die oben dargestellten Reduktionen für drei-, vier- und fünf-strahlige Ecken können wir also für jedes Polyeder sämtliche innere Ecken wegschaffen bis ein Polyeder Π^0 übrig bleibt, das aus zwei von den Randkanten begrenzten Dreiecken besteht. Da Π^0 aber keine innere Ecke und Kante besitzt, ist für Π^0 die Zuordnung Φ^0 trivial.

Hiermit haben wir die Existenz der Zuordnung Φ für jedes Trigonalpolyeder Π bewiesen, das die beiden Voraussetzungen erfüllt. Wie bemerkt, treffen diese Voraussetzungen sicher ein, wenn das Polyeder konvex und ebenflächig ist.

5. Wir betrachten einen geschlossenen Polygonzug Z mit n Ecken auf dem Trigonalpolyeder Π. Nach Ausscheidung der Ecken und Kanten

von Z zerfällt Π in zwei Teile, von denen der eine, Π^i, nur *innere* Ecken, Kanten und Flächen enthält. Ihre Anzahlen seien E^i, K^i, F^i. Nach der Eulerschen Formel ist:

$$K^i + 1 = E^i + F^i,$$

ferner weil sämtliche Flächen Dreiecke sind:

$$K^i = \frac{3}{2} F^i - \frac{n}{2}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt:

$$K^i = 3E^i + n - 3.$$

Daraus folgt aber: *Von den Kanten von* Π^i *sind bei jeder Zuordnung* Φ *den Ecken des Zuges* Z $n-3$ *zugeordnet.*

Wir betrachten nun einen Prozeß, durch den man von einer Zuordnung zu jeder beliebigen anderen kommen kann. Sei etwa bei Φ_1 die Kante $P_0 P_1$ der Ecke P_0, die Kante $P_1 P_2$ der Ecke P_1 zugeordnet, bei Φ_2 dagegen $P_0 P_1$ der Ecke P_1, $P_1 P_2$ der Ecke P_2, dann gibt es sicher eine Kante $P_2 P_3$, die in Φ_1 der Ecke P_2, in Φ_2 der Ecke P_3 zugeordnet ist. Berücksichtigen wir nun die Endlichkeit der Kantenanzahl, so ergibt diese Betrachtung einen geschlossenen Polygonzug $P_m P_{m+1} \cdots P_{m+n} P_m$ von der Art, daß bei Φ jede Kante $P_{m+i} P_{m+i+1}$ der Ecke P_{m+i}, bei Φ_2 dagegen P_{m+i+1} zugeordnet ist. Einen geschlossenen Polygonzug, dessen Kanten und Ecken bei einer Zuordnung Φ einander paarweise zugeordnet sind, wollen wir einen *Ring* von Φ nennen. Wir erkennen aus dem Vorhergehenden: *von einer Zuordnung* Φ_1 *kommt man zu einer beliebigen anderen Zuordnung* Φ_2, *indem man die Zuordnung* Φ_1 *durch Umkehrung der Zuordnung in einem oder mehreren Ringen transformiert.*

Wir wollen sagen, an einer Ringecke besteht eine *Kreuzung*, wenn die beiden in der Ecke zusammenstoßenden Ringkanten getrennt werden von den anderen beiden der Ecke zugeordneten Kanten.

Es mögen nun zu ν Ringecken je zwei zum Π^i des Ringes gehörende Kanten zugeordnet sein, dann enthält der Ring nach dem oben Bewiesenen $n - 3 - 2\nu$ Kreuzungen.

Bei der Ringtransformation werden die n Kanten im Hinblick auf ihre Zuordnung zu den Ringecken zyklisch vertauscht. Diese zyklische Vertauschung der n Kanten wird aber erzeugt durch $n - 1 + 2\mu$ (μ ganze Zahl $\geqq 0$) Vertauschungen von Kanten zu je zweien. Daraus ergibt sich: *Die Anzahl der Kreuzungen eines Ringes vermehrt um die Anzahl der Kantenvertauschungen, die der Ringtransformation entsprechen, ist stets gerade* (nämlich gleich $2n - 4 + 2\mu - 2\mu$).

Werden die von einer Ecke ausgehenden Kanten s_1 und s_1' durch die von derselben Ecke ausgehenden Kanten s_2 und s_3 getrennt, so hat *bei einer konvexen Ecke* das Tetraeder ($s_1 s_2 s_3$) den umgekehrten Umlaufssinn wie ($s_1' s_2 s_3$), denn bei einer konvexen Ecke liegen s_1 und s_1' auf verschiedenen Seiten der Ebene durch s_2 und s_3. (Bei einer nicht konvexen Ecke braucht das natürlich nicht der Fall zu sein.) *Liegt also an einer Ringecke eine Kreuzung vor, so wird durch die Ringtransformation bei einem konvexen Polyeder der Umlaufssinn des der Ecke zugeordneten Tetraeders verkehrt.* Hiermit ist nach dem eben Bewiesenen auch der Beweis des zweiten Hilfssatzes erledigt, der aussagt, daß die Anzahl der von einer Zuordnung zur anderen führenden Kantenvertauschungen vermehrt um die Anzahl der bei dieser Transformation auftretenden Umlaufssinnänderungen der den Ecken zugeordneten Tetraeder eine gerade ist.

Zum Schluß sei bemerkt, daß die von uns angewandte Entwicklung auch für allgemeinere Stabverbände, sowohl ebene als räumliche, mit Vorteil angewandt werden kann.

Genval, 25. September 1915.