

# Ableitung der „Ergänzungsrelationen“ aus den Formeln von Simon L'Huilier.

Von

Hans Falckenberg in Königsberg i. Pr.

In E. Studys<sup>1)</sup> Abhandlung über sphärische Trigonometrie, die sich in gewisser Hinsicht an Arbeiten von Gauß und Möbius anschließt, kommt der charakteristische Unterschied der (sphärischen) Dreiecke erster und zweiter Klasse (eigentliche und uneigentliche Dreiecke), der übrigens schon Gauß bekannt gewesen zu sein scheint, in den Delambreschen<sup>2)</sup> Gleichungen zum Ausdruck. Mit ihnen gleichbedeutend sind die Formeln von Simon L'Huilier.

Versteht man unter  $l_1\pi, l_2\pi, l_3\pi$  die Seiten, unter  $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi$  die elementar definierten<sup>3)</sup> Winkel eines *eigentlichen* (Kreisbogen-) Dreiecks und führt mit Study die Größen

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} s_0 = \frac{2 - l_1 - l_2 - l_3}{2}, & \sigma_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1}{2}, \\ s_1 = \frac{-l_1 + l_2 + l_3}{2}, & \sigma_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1}{2}, \\ s_2 = \frac{-l_2 + l_3 + l_1}{2}, & \sigma_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1 + 1}{2}, \\ s_3 = \frac{-l_3 + l_1 + l_2}{2}, & \sigma_3 = \frac{\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2} \end{array} \right.$$

ein, wobei

$$(1a) \quad \sum_{i=0}^3 s_i = \sum_{i=0}^3 \sigma_i = 1$$

<sup>1)</sup> „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen“, Abh. der math. phys. Klasse der Sächs. Ges. der Wiss., 20 (1893), S. 85.

<sup>2)</sup> 1807, auch Mollweidesche (1808) oder Gaußsche (1809) Formeln genannt.

<sup>3)</sup> Im Gegensatz zu der von Study verwendeten „symmetrischen“ Definition, die dem hier behandelten Problem nicht naturgemäß wäre. Die Symmetrie zwischen Seiten und Winkeln in (1) geht dadurch verloren.

ist, so erhält man folgende von Study angeschriebene Form der für eigentliche Dreiecke gültigen L'Huilierschen Gleichungen:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma_0 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_1 \pi}{2} = \pm \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_1 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_2 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_3 \pi}{2}} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Das Auftreten der Größen  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) in diesen Formeln weist auf die bekannten von F. Klein<sup>4)</sup> entdeckten „Ergänzungsrelationen“ für *einfach zusammenhängende* Dreiecke (Membrandreiecke) hin und legt den Gedanken einer Ableitung dieser Relationen aus den L'Huilierschen Formeln nahe<sup>5)</sup>.

Man sieht, daß bei stetiger Veränderung der Dreieckswinkel und dadurch bedingter stetiger Verzerrung des Dreieckes Verzweigungen in den L'Huilierschen Gleichungen nur beim Durchgang durch ein parabolisches Dreieck — eine oder mehrere der Größen  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) werden ganzzahlig, sämtliche Seiten des Dreiecks ganze Vielfache von  $\pi$  — auftreten können. Verfolgt man in allen Fällen *einfach zusammenhängender* Dreiecke unter Zugrundelegung der projektiven (Caleyschen) Maßbestimmung das Verhalten der Seiten bei den Durchgängen durch die Verzweigungsstellen *geometrisch*, so gewinnt man, weil diese Dreiecke durch Vorgabe der Winkel *eindeutig* bestimmt sind, an jeder parabolischen Stelle eine Bestimmung des in Gl. (2) noch offenen *Vorzeichens* (§§ 2 bis 4), *wodurch die Formeln für das Kontinuum der Kleinschen Membrandreiecke aus den für die eigentlichen geltenden herausgeschält sind*. Mit Hilfe dieser Vorzeichenbestimmung steigt man zu Beziehungen zwischen den Größen  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) und den „Überschlagungszahlen“<sup>6)</sup> der Dreiecksseiten auf, *die gerade die Kleinschen Ergänzungsrelationen sind* (§ 5). —

Die Gegendreiecke, auf einer Kugel angenommener parabolischer Membrandreiecke, für die nur eine der Größen  $\sigma_i$  ganzzahlig wird, *arten* bekanntlich in Punkte oder Zweiecke aus; auch ihnen kommt im Sinne der Theorie der eigentlichen Dreiecke eine einfache *geometrische* Bedeutung zu: Versucht man nämlich die Übergangsdreiecke zwischen den *einfach zusammenhängenden* und den *nicht einfach zusammenhängenden* eigentlichen Dreiecken herauszuarbeiten, *so findet man, daß die Gesamtheit der Membrandreiecke mit den übrigen eigentlichen sicherlich durch solche in den „falschen Kern“ (s. unten!) eingehängten parabolischen Dreiecke zusammenhängt* (§ 6). Für diejenigen parabolischen Fälle, bei denen zwei oder mehr Größen  $\sigma_i$  ganze Zahlen werden, existieren von vornherein zwei wesent-

<sup>4)</sup> „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, Math. Ann., 37 (1890), S. 573—590.

<sup>5)</sup> Herr Hilb in Würzburg hat mich auf diesen Zusammenhang aufmerksam gemacht.

<sup>6)</sup> Vgl. die Definition der Überschlagungszahl in § 5!

lich verschiedene Dreieckskerne. Auch hier zeigt sich, daß die in den falschen Kern eingehängten Dreiecke sicherlich einen Übergang bilden zwischen Membrandreiecken und solchen, in die man keine Fläche einspannen kann.

Die Form der in Gl. (2) auftretenden Quadratwurzel, die man als Produkt von vier Quadratwurzeln schreiben kann, läßt erkennen, daß an den Stellen, an denen zwei oder mehrere Größen  $\sigma_i$  gleichzeitig ganzzahlig werden, 4 bzw. 8 bzw. 16 Vorzeichenbestimmungen möglich sind und deutet daraufhin, daß an diesen Stellen mehr als zwei verschiedene Dreiecksformen existieren könnten, von denen innerhalb des Kontinuums der Membrandreiecke nur eines einen einfachen Zusammenhang hätte, während die anderen in Grenzfälle zerfallen oder ausarten müßten. Die Durchführung dieses hier nur angedeuteten Gedankens dürfte keine prinzipielle Schwierigkeit bieten. Hieraus würde sich dann noch eine vollständige *geometrische Eingliederung* der Membrandreiecke in die Gesamtheit der eigentlichen ergeben,

### § 1.

#### Die Verzweigungsstellen in den L'Huilierschen Gleichungen. — Erste Aufgabenstellung.

Drei eine gegebene Kugel durchsetzende<sup>7)</sup>, durch einen Punkt gehende Gerade mit ihren Verbindungsebenen schneiden aus der Kugel eine Reihe von Kreisbogendreiecken aus. Das entstandene Dreikant nennen wir mit F. Klein<sup>8)</sup> den „Kern“ dieser Dreiecke, seine Geraden „Achsen“, die durch je zwei Achsen gelegten Ebenen „Seitenflächen“, den gemeinsamen Achsenschnittpunkt „Scheitel“ des Kernes.

Die nach der projektiven (Caleyschen) Maßbestimmung mit der gegebenen Kugel als Fundamentalfäche gemessenen stets reellen und positiv vorausgesetzten Winkel zweier Seitenflächen nennen wir „Winkel“, die ebenso gemessenen Winkel zweier Achsen „Seiten“. Bei geeigneter Verfügung über diese noch in gewisser Beziehung unbestimmten sechs Größen gelten zwischen ihnen die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Ich gehe von einem *bestimmten* Dreieck (d. h. von einer bestimmten Winkel- und Seitenkombination an einem bestimmten Kern) aus, für das

<sup>7)</sup> Im Grenzfall können eine oder mehrere Gerade die Kugel berühren. Doch läßt sich dieser Fall bei stetiger Abänderung ausschließen. Denn zwei benachbarte Fälle, in denen die kritische Gerade die Kugel durchsetzt, lassen sich immer unter Vermeidung des Grenzfalles ineinander überführen.

<sup>8)</sup> Vgl. etwa Klein, „Über die hypergeometrische Funktion“, autogr. Vorlesung Göttingen (1894), neuer Abdruck Leipzig (1906), (weiterhin zitiert mit „K.“), S. 299

die L'Huilierschen Gleichungen *in der für eigentliche Dreiecke gültigen Form* bestehen und *ändere es stetig so ab*, wobei drei der Größen  $\sigma_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) als *unabhängige Veränderliche* gelten sollen, *daß diese Gleichungen erhalten bleiben*. Dadurch ist erreicht, daß ich stets im Kontinuum der eigentlichen Dreiecke und im Gültigkeitsbereich der Gl. (2) verbleibe und daß die noch herrschende Unbestimmtheit zunächst behoben ist. Unbestimmtheiten erscheinen erst wieder an den *Verzweigungsstellen* der in den L'Huilierschen Gleichungen auftretenden Quadratwurzel. Verzweigungsstellen liegen dann und nur dann vor, wenn mindestens eine der Größen  $\sigma_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) eine *ganze Zahl* wird.

Zur Erleichterung der Ausdrucksweise führe ich folgende *Worterklärung* ein:

„Nimmt bei stetiger Abänderung eine der Größen  $\lambda_i, \sigma_i, l_i, s_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) an einer bestimmten Stelle den Wert  $\Re$  an und ist sie vor dem Durchgang durch diese Stelle gleich  $\Re - \varepsilon_1$ , nach dem Durchgang gleich  $\Re + \varepsilon_2$ , so sage ich, sie „*durchschreitet*“ an dieser Stelle den Wert  $\Re$ ; ist sie aber vor dem Durchgang gleich  $\Re - \varepsilon_1$ , nach dem Durchgang gleich  $\Re - \varepsilon_2$ , so sage ich, sie „*erreicht*“ diesen Wert. Dabei sollen die  $\varepsilon$  kleine reelle oder rein imaginäre Größen gleichen Vorzeichens sein“<sup>9)</sup>.

Bildet man aus (2) den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma_{k+1} + \sigma_{k-1}}{2} \pi, \quad \left( k = 1, 2, 3; \begin{matrix} 3+1=1 \\ 1-1=3 \end{matrix} \right)$$

so erhält man wegen (1) die Gleichungen<sup>10)</sup>:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2} = - \frac{\cos \frac{\sigma_0 \pi}{2} \cdot \cos \frac{\sigma_k \pi}{2}}{\sin \frac{\sigma_{k+1} \pi}{2} \cdot \sin \frac{\sigma_{k-1} \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_1 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_2 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_3 \pi}{2}} \quad (k=1, 2, 3)$$

und ersieht:

I. Das Vorzeichen von  $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$  kann sich nur dann ändern, wenn *mindestens eine der Größen  $\sigma_i$  eine ganze Zahl durchschreitet*<sup>11)</sup> (*Verzweigungsstelle*), und zwar hängt die Änderung oder Nichtänderung wesentlich

<sup>9)</sup> Ein  $\varepsilon$  kann reell, das andere rein imaginär sein; es können aber auch beide reell oder beide rein imaginär sein.

<sup>10)</sup> Setzt man in (3) den vor der Quadratwurzel stehenden Ausdruck unter dieselbe, so erhält man die bekannten Formeln:

$$\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin \sigma_0 \pi \cdot \sin \sigma_k \pi}{\sin \sigma_{k+1} \pi \cdot \sin \sigma_{k-1} \pi}},$$

die aber auch für uneigentliche Dreiecke gelten.

<sup>11)</sup> Stellen, an denen Größen  $\sigma_i$  ganze Zahlen *erreichen*, sollen bei stetiger Veränderung vermieden werden.

von der Festsetzung über das Vorzeichen der L'Huilierschen Quadratwurzel nach der Verzweigungsstelle ab.

II. Eine Dreiecksseite kann nur dann ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  durchschreiten — bzw. erreichen —, wenn mindestens eine der Größen  $\sigma_i$  eine ganze Zahl durchschreitet (Verzweigungsstelle), und zwar durchschreitet die Seite ihren Wert — bzw. erreicht ihn —, je nachdem die Festsetzung über das Vorzeichen der L'Huilierschen Quadratwurzel nach dem Durchgang durch die Verzweigungsstelle so getroffen ist, daß die ganze rechte Seite von (3) bei diesem Durchgang das Vorzeichen ändert — bzw. beibehält —.

Dem Durchgang durch eine Verzweigungsstelle, an der nur eine einzige Größe  $\sigma_i$  eine ganze Zahl durchschreitet, entspricht, wie man aus (3) erkennt, der Übergang von rein reellen zu bis auf ganze Vielfache von  $\pi$  rein imaginären Seiten, also von einem elliptischen zu einem hyperbolischen Dreieck oder umgekehrt. Zur Verzweigungsstelle selbst gehört ein „einfach parabolisches“ Dreieck, bei dem der Scheitel des Kernes auf die Kugeloberfläche gerückt ist und alle Seiten ganze Vielfache von  $\pi$  werden. Bezüglich dieser Stellen sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1.  $\sigma_0$  ganzzahlig:

Sämtliche Tangenten der halben Seiten werden 0, die Seiten selbst ganze Vielfache von  $2\pi$ . Läßt man bei stetiger Veränderung nach der Verzweigungsstelle für die Quadratwurzel beide Vorzeichen zu, so wird die Seite  $l_k\pi^{12)}$  ( $k=1, 2, 3$ ) das eine Mal das ganze Vielfache von  $2\pi$  durchschreiten, das andere Mal erreichen.

2.  $\sigma_k$  ( $k=1, 2$  oder  $3$ ) ganzzahlig:

Es wird in (3)

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2} = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{l_{k+1} \pi}{2} = \operatorname{tg} \frac{l_{k-1} \pi}{2} = \infty;$$

$$l_k = 2k_1; \quad l_{k+1} = 2k_2 + 1; \quad l_{k-1} = 2k_3 + 1 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ ganze Zahlen}).$$

Wenn man hier durch die Verzweigungsstelle hindurchgeht, so wird je nach Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel die Seite  $l_k$  den Wert  $2k_1\pi$  entweder durchschreiten oder erreichen. —

Dem Durchgang durch eine Verzweigungsstelle, an der zwei Größen  $\sigma_i$  gleichzeitig ganze Zahlen durchschreiten und der nur eintreten kann, wenn ein Dreieckswinkel ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  wird (Gl. (1)), entspricht der Übergang von einem elliptischen wieder zu einem elliptischen oder

<sup>12)</sup> Wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, lasse ich den Faktor  $\pi$  bei der Winkel- und Seitenbezeichnung weg.

von einem hyperbolischen wieder zu einem hyperbolischen Dreieck. Zwei Typen solcher „doppelt parabolischer“ Dreiecke sind zu unterscheiden.

1.  $\sigma_0$  und  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ) ganzzahlig;  $\lambda_k$  ganzzahlig:

Es ist

$$(4a) \quad \operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2} = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{l_{k+1} \pi}{2} \text{ und } \operatorname{tg} \frac{l_{k-1} \pi}{2} \text{ unbestimmt.}$$

Die Seite  $l_k$  wird je nach Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel nach dem Durchgang ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  durchschreiten oder erreichen. Die beiden anderen Seiten werden unbestimmt.

2.  $\sigma_{k+1}$  und  $\sigma_{k-1}$  ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ) ganzzahlig;  $\lambda_k$  ganzzahlig.

Man findet: Die Seite  $l_k \pi$  wird je nach Bestimmung des Vorzeichens ein *ungerades ganzes* Vielfaches von  $\pi$  durchschreiten oder erreichen, während die beiden anderen Seiten unbestimmt werden. —

Durchschreiten endlich *drei* Größen  $\sigma_i$  gleichzeitig ganze Zahlen, so durchschreitet auch die vierte einen solchen Wert (Gl. (1a)). Diese „Ausnahmedreiecke“, bei denen übrigens sämtliche Winkel ganze Vielfache von  $\pi$  werden, vermitteln zwischen zwei elliptischen bzw. zwei hyperbolischen Dreiecken. Sämtliche Tangenten der halben Seiten werden unbestimmt.

Wegen der Stetigkeit der Abänderung kann man im allgemeinen trotzdem schließen, daß je nach Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel nach der Verzweigungsstelle das eine Mal die Seite  $l_k \pi$  ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  durchschreitet, das andere Mal einen unbestimmten Wert erreicht, ohne ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  zu durchschreiten. Pathologische Sonderfälle, bei denen dieser Schluß nicht mehr zulässig wäre, können umgangen werden (§ 3b, Kern II').

Sämtliche parabolischen Fälle zusammenfassend kann man sagen:

III. Die Seite  $l_k \pi$  ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ) wird sicherlich dann ein *gerades* ganzes Vielfaches von  $\pi$ , wenn  $\sigma_0, \sigma_k$  oder  $\sigma_0$  und  $\sigma_k$ , sicherlich dann ein *ungerades* ganzes Vielfaches von  $\pi$ , wenn  $\sigma_{k+1}$  und  $\sigma_{k-1}$ , sicherlich dann *unbestimmt*, wenn sämtliche Größen  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) eine ganze Zahl durchschreiten.

IV. Die Seite  $l_k \pi$  kann dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  durchschreiten, wenn  $\sigma_0$  oder  $\sigma_k$  oder beide Größen eine ganze Zahl durchschreiten.

V. An allen in III besprochenen Stellen kann nach II das Vorzeichen der L' Huillierschen Quadratwurzel so bestimmt werden, daß die Seite  $l_k \pi$  ein ganzes Vielfaches durchschreitet oder daß sie das ganze Vielfache von  $\pi$  bzw. einen unbestimmten Wert erreicht.

Umgekehrt kann aus der Kenntnis des Verhaltens der Seite  $l_k \pi$  an

einer dieser Stellen auf Änderung oder Nichtänderung des Vorzeichens der L'Huilierschen Quadratwurzel beim Durchgang durch diese Stelle geschlossen werden.

Kennt man von einem innerhalb des Kontinuums der eigentlichen Dreiecke verlaufenden Dreieckskontinuum, dessen Individuen etwa durch Vorgabe dreier Größen  $\sigma$ , oder durch Vorgabe der Winkel *eindeutig* bestimmt sind, das Verhalten der Seiten beim Durchgang durch die parabolischen Stellen, so kann man nach III für jedes parabolische Dreieck mindestens eine Seite angeben, aus deren Verhalten (Durchschreiten oder Erreichen eines ganzen Vielfachen von  $\pi$ ) man nach V auf das Verhalten des Vorzeichens der L'Huilierschen Quadratwurzel beim Durchgang durch die parabolische Stelle schließen kann, woraus sich eine Vorzeichenbestimmung in den L'Huilierschen Gleichungen für das betreffende Dreieckskontinuum ergibt.

Aufgabe der folgenden Paragraphen wird es sein, *diese Vorzeichenbestimmung für das eindeutige Kontinuum der einfach zusammenhängenden Dreiecke* (Membrandreiecke) *durchzuführen* und zwar mit Hilfe *geometrischer Verfolgung der Durchgänge* dieses Kontinuums durch die parabolischen Stellen.

Zur Erreichung der für diese geometrische Betrachtung notwendigen Eindeutigkeit in der projektiven Maßbestimmung bei stetiger Verzerrung bedarf es einer Festsetzung, wie sie implizite den Kleinschen Untersuchungen zugrunde liegt, die so getroffen ist, daß folgende *Regeln* gelten:

1. Wird ein Winkel ein ganzes Vielfaches von  $\pi$ , so *durchschreitet* er diesen Wert *dann und nur dann*, wenn die ihn einschließenden Seitenflächen des Kernes durcheinander hindurchgehen.

2. Wird eine Seite ein ungerades ganzes Vielfaches von  $\pi$ , so *durchschreitet* sie diesen Wert *dann und nur dann*, wenn ihre eine Ecke über den Gegenpunkt der anderen hinweggleitet.

2a. Wird eine Seite ein gerades ganzes Vielfaches von  $\pi$ , so *durchschreitet* sie diesen Wert *dann und nur dann*, wenn ihre eine Ecke über die andere hinweggleitet.

D. h., daß im ersten Falle der Winkel der beiden Seitenflächen, im zweiten der der beiden Achsen des Kernes auch im gewöhnlichen (euklidischen) Maß ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  gerade *durchschreitet*.

## § 2.

### Durchgang durch die einfach parabolischen Membrandreiecke.

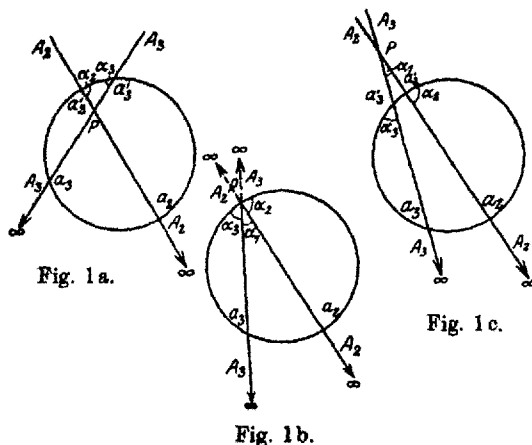
Die Achsen eines gegebenen Dreieckskernes bezeichne ich mit  $A_1, A_2, A_3$ . Von den beiden Schnittpunkten der Achse  $A_1$  mit der Kugel wähle ich

denjenigen aus, der beim stetigen Durchgang durch das zu untersuchende *einfach parabolische Membrandreieck* nicht in den auf die Kugeloberfläche rückenden Scheitel des Kernes hineinfällt, und nenne ihn  $S$ . Dann lege ich an die Kugel eine Ebene an, die in dem  $S$  diametral gegenüberliegenden Kugelpunkt berührt und projiziere Achsen und Kugeloberfläche — die letzte *stereographisch* — von  $S$  aus auf die Ebene.

Je nachdem der Scheitel des Kernes innerhalb (elliptischer), auf (parabolischer) oder außerhalb (hyperbolischer Fall) der Kugeloberfläche liegt, erhält man in der Ebene Figuren vom Typus 1a, 1b oder 1c. Für den

ersten ist die Summe der eingezeichneten Hilfswinkel  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )  $> \pi$ , für den zweiten  $= \pi$ , für den dritten  $< \pi$ .

Die Punkte  $P$  sind in allen Figuren die Projektionen des Scheitels, die Geraden  $A_2$  und  $A_3$  die der Achsen  $A_2$  und  $A_3$ , deren Ebene die Seite  $l_1$  aus der Kugel ausschneidet. Die Projektionen der Achse  $A_1$  sind an den Figuren nicht eingetragen. Die Seite  $l_1$



wird auf die eingezeichneten Kreise, die Seiten  $l_2$  und  $l_3$  auf die Geraden  $A_3$  und  $A_2$  projiziert. Die Projektionen der Dreieckswinkel lassen sich ebenfalls leicht angeben. Da eine stereographische Projektion vorliegt, so gestattet die projektive Maßbestimmung die Maßzahlen der Dreieckswinkel unmittelbar an den Figuren abzulesen.

*Es ist offenbar möglich, für jeden nicht vermeidbaren und nicht der Umgebung einer höheren parabolischen Stelle angehörenden Dreieckstypus einen Repräsentanten an einer der drei Figuren anzugeben.*

Läßt man die an den Figuren 1a und 1c zu erklärenden Dreiecke stetig ineinander übergehen, so kann man das Verhalten der Seite  $l_1$  beim Durchgang durch den parabolischen Fall der Fig. 1b verfolgen und erkennt aus Regel 2b des vorigen Paragraphen:

*Bei Durchlaufung eines einfach parabolischen Dreiecks durchschreitet die Seite  $l_1$  eines Membrandreiecks dann und nur dann ein gerades ganzes Vielfaches von  $\pi$ , wenn ihre beiden Ecken<sup>18)</sup> in den Punkt  $P$  hineintrücken, während sie diesen Wert dann und nur dann erreicht, wenn ihre Ecken  $a_2$  und  $a_3$  werden.*



Daß das bei eigentlichen Dreiecken immer dann möglich ist, wenn eine der Größen  $\sigma_0$  oder  $\sigma_1$  eine ganze Zahl durchschreitet, folgt aus III.

Wir untersuchen daher alle Typen „reduzierter“, einfach parabolischer Membrandreiecke, für die  $\sigma_0$  oder  $\sigma_1$  ganzzahlig wird. Sie sind sämtlich an Fig. 1b zu erklären. Es handelt sich um die Dreiecke mit den Winkeln:

- |   |  |
|---|--|
| 1a. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$        | 1b. $2 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3$               |
| 2. $\alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3$ | 3. $1 - \alpha_1, \alpha_2, 1 - \alpha_3$                    |
| 4. $2 - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$     | 5. $2 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3$ <sup>14)</sup> |

Das Dreieck 5. ist kein reduziertes, muß aber hinzugenommen werden, damit sämtliche Typen einfach zusammenhängender Membrandreiecke aus diesen Grunddreiecken allein durch die Prozesse der lateralen und polaren Anhängungen von Halbkugelflächen erzeugt werden können <sup>15)</sup>.

In den Fällen 1 durchschreitet  $\sigma_0$  eine ganze Zahl:

Die Ecken der Seite  $l_1$  sind  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ , die dritte Ecke liegt im Unendlichen. Bei lateralen und polaren Anhängungen an eine der drei Seiten bleibt  $\sigma_0$  eine ganze Zahl, die Ecken der Seite  $l_1$  bleiben — wie stets bei diesen Prozessen — erhalten. Man folgert, daß die Seite  $l_1$  beim Durchgang durch solche parabolischen Stellen das ganze Vielfache von  $2\pi$  stets erreicht, während  $\sigma_0$  eine ganze Zahl durchschreitet. —

In den Dreiecken 2. und 3. durchschreitet  $\sigma_1$  den Wert 0:

Die Ecken von  $l_1$  liegen in  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ , die dritte Ecke in  $P$ . Bei lateralen Anhängungen an  $l_1$  wird  $\sigma_1$  eine negative ganze Zahl, polare Anhängungen an diese Seite würden den einfachen Zusammenhang des Dreiecks stören, weil die Ecke  $P$  dann auf der gegenüberliegenden Seite  $l_1$  liegen würde, sind also auszuschließen. Laterale Anhängungen an die beiden andern Seiten ändern den Wert von  $\sigma_1$  nicht, bei polaren Anhängungen an eine dieser Seiten erhält  $\sigma_1$  einen negativ ganzzahligen Wert. Da bei allen diesen Dreiecken die Seite  $l_1$  die Ecken  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  beibehält, so erreicht sie beim Durchgang stets das ganze Vielfache von  $2\pi$  (Gl. (4)), während  $\sigma_1$  den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet. —

Es bleiben noch die Fälle 4 und 5 (Fig. 2 und 3 — in Fig. 3 ist der doppelt überdeckte Teil der Ebene schraffiert - );  $\sigma_1$  durchschreitet den Wert  $+1$ :

<sup>15)</sup> Ich spreche der Bequemlichkeit halber von den „Ecken“ statt von den „Projektionen der Ecken“.

<sup>14)</sup> K. S. 404. Figuren zu diesen Dreiecken befinden sich z. B. bei Schilling, Math. Ann., 44 (1894), S. 219; Van Vleck, Trans. Am. Math. Soc. 3 (1902), S. 121; K. S. 405.

<sup>16)</sup> K. S. 428f. Wenn ich hier von „reduzierten“ Dreiecken spreche, so schließe ich das Dreieck 5 nicht aus.

Die Ecken der Seite  $l_1$  rücken in  $P$  zusammen. Laterale Anhängungen an die Seite  $l_1$  sind nicht möglich, weil sie sich gerade schließt; ebenso wenig polare Anhängungen an die beiden übrigen Seiten, die mit Rücksicht

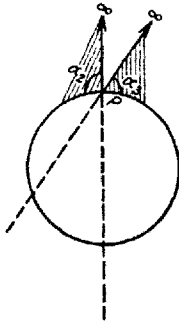


Fig. 2.

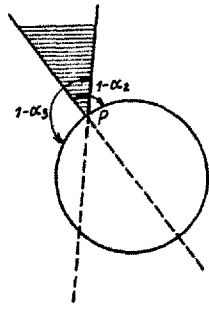


Fig. 3

auf die sich schließende Seite den einfachen Zusammenhang unterbrechen würden. Polare Anhängungen an  $l_1$  vermehren  $\sigma_1$  um eine positive ganze Zahl, laterale Anhängungen an die beiden anderen Seiten ändern den Wert von  $\sigma_1$  nicht. D. h.: Bei Durchlaufung aller Dreiecke dieses Falles durchschreitet einerseits  $l_1$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ , weil die beiden Ecken nach  $P$  hineingerückt sind, ander-

seits  $\sigma_1$  eine positive ganze Zahl. Umgekehrt sind alle einfach parabolischen Dreiecke, bei denen  $\sigma_1$  eine positive ganze Zahl durchschreitet, in den vorliegenden Fällen enthalten, da sich zeigte, daß in allen anderen einfach parabolischen Dreiecken, in denen  $\sigma_1$  eine ganze Zahl durchschritt, diese Zahl 0 oder negativ war. —

In leichter Zusammenfassung und Verallgemeinerung folgt unter Berücksichtigung von III:

VI. Beim Durchgang durch ein einfach parabolisches Dreieck durchschreitet die Seite  $l_k \pi$  sicherlich dann ein ganzes Vielfaches von  $\pi$ , wenn  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet und erreicht einen solchen Wert sicherlich dann, wenn  $\sigma_0$  eine ganze Zahl oder  $\sigma_1$  den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet.

Und in Hinblick auf IV:

VII. Beim Durchgang durch ein einfach parabolisches Membrandreieck durchschreitet die Seite  $l_k \pi$  dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ , wenn  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet.

### § 3.

Durchgang durch die höheren parabolischen Membrandreiecke.

#### a) Doppelparabolische Dreiecke.

Beim Durchgang durch ein doppelparabolisches Dreieck, bei dem etwa  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ganze Zahlen durchschreiten, wird jedenfalls ein Winkel — hier  $\lambda_1$  — eine ganze Zahl. Je nachdem  $\lambda_1$  die ganze

Zahl durchschreitet oder erreicht<sup>16)</sup>, hat man zwei verschiedene Dreieckskerne zu unterscheiden.

Im Kern I ( $\lambda_1$  durchschreitet eine ganze Zahl) fallen die beiden den Winkel  $\lambda_1$  einschließenden Seitenflächen nach Regel 1 (§ 1) zusammen und daher auch die Achsen  $A_2$  und  $A_3$ . Die dritte Achse schneidet die Kugel in zwei getrennt liegenden Punkten<sup>17)</sup>, von deren einem, der jedenfalls nicht Scheitel des Kernes sein soll, projizieren wir wie oben Kern und Kugeloberfläche (Fig. 4). Die Seite  $l_1$  projiziert sich auf den gezeichneten Kreis, die Achsen  $A_2$  und  $A_3$  sowie die Seiten  $l_2$  und  $l_3$  auf die Gerade  $A$ . Die Projektion des unbestimmten Achsenschnittpunktes können wir beliebig auf der Strecke  $a_2 a_3$  — also etwa in  $P$  — wählen.

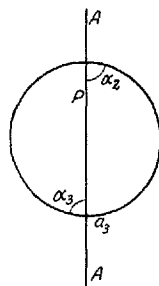


Fig. 4.

Es sind reduzierte Dreiecke möglich mit den Winkelzahlen:

1. 1,  $a_2$ ,  $1 - a_3$ ;
2. 2,  $a_2$ ,  $a_3$  ( $a_2 + a_3 = 1$ ).

Durchläuft man ein zum ersten dieser reduzierten Dreiecke gehörendes Dreieck, so wird die Seite  $l_1$  ein ungerades ganzes Vielfaches von  $\pi$  durchschreiten;  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  durchschreiten im reduzierten Fall den Wert 0. Hängt man an  $l_1$  polar an, so durchschreiten  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  negative ganze Zahlen, laterale Anhängungen an diese Seiten lassen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ungeändert. Polare und laterale Anhängungen an die beiden anderen Seiten gestattet der geforderte einfache Zusammenhang der Figuren nicht. In allen diesen Dreiecken durchschreitet  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl.

Bei Durchlaufung der zum reduzierten Dreieck 2 gehörenden Membrandreiecke wird stets die Seite  $l_1$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  (Gl. (4a)) durchschreiten, die beiden anderen Seiten aber keine ganzen Vielfachen von  $\pi$  durchschreiten. Im reduzierten Dreieck selbst werden  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$  gleich  $+1$ . Polare Anhängungen an  $l_2$  ergeben positiv ganzzahlige Werte von  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$ , während laterale Anhängungen an die beiden anderen Seiten  $\sigma_0$  größere positive ganze Zahlen annehmen und  $\sigma_1$  unverändert lassen. Laterale Anhängungen an  $l_1$  und polare an  $l_2$  und  $l_3$  sind unzulässig. Bei allen diesen Dreiecken durchschreitet  $\sigma_1$  eine positive ganze Zahl. —

Im Kern II ( $\lambda_1$  erreicht eine ganze Zahl) sind die Achsen  $A_2$  und  $A_3$

<sup>16)</sup> Im ersten Falle ändern sich die ganzzahlig werdenden  $\sigma$  gleichsinnig, im zweiten gegensinnig; daraus läßt sich folgern, daß die ersten Dreiecke zwei elliptische, die letzten zwei hyperbolische miteinander verbinden.

<sup>17)</sup> Von den unter b) zu behandelnden Ausnahmendreiecken kann hier abgesehen werden.

nicht zusammenfallend. Die Achse  $A_1$  berührt die Kugel<sup>18)</sup>. Wir projizieren von dem Berührungspunkt der Achse  $A_1$  auf die in dem diesem diametral gegenüberliegenden Punkt berührende Ebene (Fig. 5). Die Projektion der Seite  $l_1$  erscheint auf der Geraden  $B$ , die der Achsen  $A_2$  und  $A_3$  sowie der Seiten  $l_3$  und  $l_2$  auf den Geraden  $A_2$  und  $A_3$ , die des gemeinschaftlichen Achsenschnittpunktes im Unendlichen, also auch auf der Geraden  $B$ .

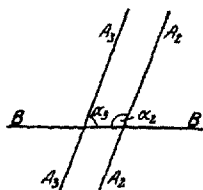


Fig. 5.

Für diesen Kern existieren reduzierte Membrandreiecke mit den Winkeln:

$$3. 0, \alpha_2, \alpha_3; \quad 4. 0, 1 - \alpha_2, 1 + \alpha_3 \quad (\alpha_2 + \alpha_3 = 1).$$

Im dritten Dreieck liegen die Ecken der ganzzahligen Seite  $l_1$  getrennt in  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ , die dritte Ecke im Unendlichen;  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$  sind gleich 0. Polare Anhängungen an  $l_1$  sind nicht möglich, weil die gegenüberliegende unendlich ferne Ecke dann auf der Seite selbst liegen würde. Laterale Anhängungen an  $l_1$  und polare an  $l_2$  oder  $l_3$  machen  $\sigma_1$  zu einer negativen,  $\sigma_0$  zu einer positiven ganzen Zahl; laterale Anhängungen an  $l_2$  oder  $l_3$  würden  $\sigma_1$  unverändert lassen, während  $\sigma_0$  eine positive ganze Zahl würde. Die Ecken von  $l_1$  bleiben getrennt: Bei Durchlaufung solcher Dreiecke erreicht die Seite  $l_1$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ . —

Im Dreieck 4 (Fig. 6) durchschreitet  $\alpha_2$  den Wert 0,  $\alpha_3$  den Wert  $+\pi$ ; die Ecken der Seite  $l_1$  liegen getrennt in  $\alpha_2$  und im Unendlichen, die dritte Ecke ebenfalls im Unendlichen. Polare Anhängungen sind nur an  $l_3$  möglich, wobei  $\sigma_3$  positiv ganzzahlig bliebe, während  $\sigma_2$  negativ ganzzahlig würde. Laterale Anhängungen an  $l_3$  sind auszuscheiden, an  $l_1$  und  $l_2$  würden  $\sigma_3$  unverändert lassen, während  $\sigma_2$  negative ganze Zahlen annähme oder unverändert bliebe. Bei Durchlaufung dieser Dreiecke, bei denen  $\sigma_2$  den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl,  $\sigma_3$  eine positive ganze Zahl durchschreitet, läßt sich über das Verhalten der Seite  $l_1$  nicht ohne weiteres etwas aussagen; dagegen durchschreitet die nach § 1 unbestimmte Seite  $l_3$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ .

Zusammenfassend folgert man in einfacher Verallgemeinerung der Resultate, wobei III bzw. IV zu berücksichtigen ist:

<sup>18)</sup> Nach Anm. 7) könnten wir diesen Kern bei stetiger Abänderung ausschließen. Die Betrachtung dieses Kernes ist jedoch für die Erörterungen des § 6 wesentlich. Die Schlüsse der beiden folgenden Paragraphen würden sich aber auch ohne Berücksichtigung der Kerne II und II' durchführen lassen.

VIII. Beim Durchgang durch ein doppelparabolisches Membrandreieck durchschreitet die Seite  $l_k \pi$  sicherlich dann ein ganzes Vielfaches von  $\pi$ , wenn  $\sigma_k$  oder  $\lambda_k$  oder beide eine positive ganze Zahl durchschreiten und erreicht einen solchen Wert sicher dann, wenn  $\sigma_k$  den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet.

IX. Beim Durchgang durch ein doppelparabolisches Membrandreieck durchschreitet die Seite  $l_k \pi$  dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ , wenn  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet.

#### b) Ausnahmedreiecke.

In den Ausnahmefällen, in denen sämtliche  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) ganze Zahlen durchschreiten und in denen sämtliche Winkel ganze Vielfache von  $\pi$  werden, sind zwei Typen von Kernen auseinanderzuhalten<sup>19)</sup>.

Im Kern I' fallen sämtliche Seitenflächen zusammen, sämtliche Winkel durchschreiten ganze Vielfache von  $\pi$ ; die Achsen des Kernes werden unbestimmt, liegen aber in einer Ebene. Fig. 7 zeigt den Schnitt dieser Ebene mit der Kugel. Es gibt nur ein reduziertes Membrandreieck, in dem sämtliche Winkel den Wert  $\pi$ ,  $\sigma_0$  den Wert 1, die Größen  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) den Wert 0 durchschreiten. Bei den nur möglichen lateralen Anhängungen erhält man für  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) nur den Wert 0 oder negative ganze Zahlen.

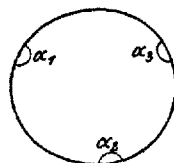


Fig. 7.

Die Seite  $l_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) erreicht in allen Fällen einen unbestimmten Wert, ohne ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  zu durchschreiten.

Im Kern II' fallen zwei Seitenflächen zusammen, die dritte schneidet diese längs einer Tangente an die Kugel. Zwei Achsen des Kernes — etwa  $A_2$  und  $A_3$  — fallen in diese Tangente<sup>18)</sup>, dritte Achse und Scheitel des Kernes sind unbestimmt. Fig. 8 stellt eine Projektion des Dreiecks auf die zusammenfallenden Seitenflächen dar. Auch hier gibt es nur ein reduziertes Dreieck, bei dem der Winkel  $\lambda_1$  den Wert  $\pi$  durchschreitet, die Winkel  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  den Wert 0 erreichen;  $\sigma_0$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  durchschreiten den Wert 0,  $\sigma_1$  den Wert +1. Die Ecken der Seite  $l_1$  und deren Gegenpunkte fallen in  $P$  zusammen. Polare Anhängungen an  $l_1$  verschaffen der Größe  $\sigma_1$  stets positiv ganzzahlige Werte; bei lateralen Anhängungen an die beiden anderen Seiten bleibt  $\sigma_1$  unverändert,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  behalten den Wert 0 oder werden negative ganze Zahlen. Polare Anhängungen an  $l_2$  oder  $l_3$ , laterale an  $l_1$  sind nicht möglich. Die Seite  $l_1$  durchschreitet nach Regel 2a und 2b (§ 1) so-

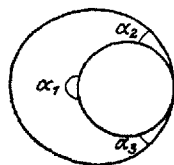


Fig. 8.

<sup>19)</sup> Vgl. etwa K. S. 431 f.

wohl ein *ungerades* als auch ein *gerades* ganzes Vielfaches von  $\pi$ , weil beim Durchgang eine Ecke sowohl über die andere als auch über deren Gegenpunkt hinweggleitet.

Wir fassen auf Grund von III bzw. IV zusammen:

X. *Beim Durchgang durch ein Ausnahmedreieck, in das man eine Membran einspannen kann, durchschreitet die Seite  $l_k \pi$  sicherlich dann ein ganzes (ungerades oder auch gerades) Vielfaches von  $\pi$ , wenn der Winkel  $\lambda_k \pi$ , nicht aber die Winkel  $\lambda_{k+1} \pi$  und  $\lambda_{k-1} \pi$  ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  durchschreiten, und erreicht einen unbestimmten Wert sicherlich dann, wenn alle Winkel ganze Vielfache von  $\pi$  durchschreiten.*

XI. *Beim Durchgang durch ein Ausnahmedreieck, in das man eine Membran einspannen kann, durchschreitet die Seite  $l_k \pi$  dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ , wenn  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet.*

Aus Regel 1 (§ 1) folgt, daß ein Dreieckswinkel  $\lambda_k$  nur dann ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  durchschreiten kann, wenn die beiden ihn einschließenden Seitenflächen des Kernes im kritischen Dreieck zusammenfallen. In keinem der zu Fig. 1a, 1b oder 1c gehörigen Dreiecke fallen zwei Seitenflächen zusammen. Das ganzzahlige Vielfache von  $\pi$  wird also von dem Winkel  $\lambda_k \pi$  stets in einem doppeltparabolischen oder Ausnahmedreieck durchschritten, und zwar kommen hierfür nur die Kerne I, I' oder II' in Frage:

XII. *Durchschreitet ein Winkel ( $\lambda_k \pi$ ) ein ganzes Vielfaches von  $\pi$ , so liegt sicherlich ein doppeltparabolisches oder Ausnahmedreieck vor<sup>20)</sup>.*

#### § 4.

#### Vorzeichenbestimmung für das Kontinuum der Membrandreiecke in den L'Huilierschen Gleichungen.

Aus II, V, VI, VIII, X und XII folgt, wenn man die vermeidbaren Fälle des Kernes II' ausschaltet:

XIII. *An den innerhalb des Kontinuums der Membrandreiecke ge-*

<sup>20)</sup> Aus diesem Resultat folgt, daß sich die in die Kerne I und I' einzuhängenden Dreiecke bei stetiger Verzerrung jedenfalls nicht sämtlich vermeiden lassen. Wie man unten (Anm. <sup>21)</sup>) erkennt, lassen sich nicht einmal die zu I' gehörenden Dreiecke vermeiden. Die Vermeidbarkeit der zu den Kernen II und II' und die Unvermeidbarkeit der zu den Kernen I und I' gehörenden Dreiecke gewinnt in der Theorie der hypergeometrischen Funktion insofern eine gewisse Bedeutung, als daraus folgt, daß „Ausnahmestellen 1. Ordnung“, bei denen in den Entwicklungen logarithmische Glieder auftreten, bei stetiger Änderung ausgeschlossen werden können, während das bei „Ausnahmestellen zweiter Ordnung“, wo die logarithmischen Glieder wieder hinausfallen, nicht mehr der Fall ist

legen den Verzweigungsstellen ändert der Ausdruck  $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$  sein Vorzeichen sicherlich dann, wenn

1.  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet,
2.  $\lambda_k$  eine (positive) ganze Zahl durchschreitet, ohne daß  $\lambda_{k+1}$  und  $\lambda_{k-1}$  gleichzeitig dasselbe tun,
3.  $\sigma_k$  und  $\lambda_k$  gleichzeitig positive ganze Zahlen durchschreiten.

Er behält sein Vorzeichen sicherlich dann bei, wenn

4.  $\sigma_0$  eine ganze Zahl durchschreitet,
5.  $\sigma_k$  den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet,
6.  $\lambda_k, \lambda_{k+1}, \lambda_{k-1}$  gleichzeitig ganze Zahlen durchschreiten<sup>21)</sup>;

wenn mehrere dieser letzten Ereignisse gleichzeitig eintreten, so bleibt das Vorzeichen ebenfalls ungeändert.

Lassen wir hier  $k$  der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 annehmen, so können wir für jede nicht ausgeschlossene Verzweigungsstelle mindestens eine Seite  $l_k \pi$  ( $\tau = 1, 2, 3$ ) angeben, von der wir wissen, ob sich das Vorzeichen von  $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$  ändert oder nicht; daraus folgt sofort die fragliche Vorzeichenbestimmung an allen nicht umgangenen Verzweigungsstellen.

Um für dieses Vorzeichen einen expliziten Ausdruck anzugeben, setzen wir es

$$(5) \quad \delta = \eta_0 \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta''',$$

wobei die 4 Größen  $\eta$  ganzzahlige Funktionen der  $\sigma_i$  bzw.  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2, 3$ ) sind, die nur der Werte  $+1$  und  $-1$  fähig sind, und untersuchen das Vorzeichen ( $\delta_k$ ) von  $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$ ; es ist nach (3):

$$(6) \quad \delta_k = (-1)^{\left[ \frac{\sigma_0+1}{2} \right] + \left[ \frac{\sigma_k+1}{2} \right] + \left[ \frac{\sigma_{k+1}}{2} \right] + \left[ \frac{\sigma_{k-1}}{2} \right]} \cdot \eta_0 \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta'''^{22)}.$$

Setzt man

$$(7) \quad \eta_0 = (-1)^{\left[ \frac{\sigma_0+1}{2} \right] + \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{\sigma_n+1}{2} \right] + \varrho} \quad (\varrho = 0 \text{ oder } 1),$$

so ergibt sich

$$\delta_k = (-1)^{\left[ \frac{\sigma_{k+1}}{2} \right] + \left[ \frac{\sigma_{k-1}}{2} \right] + \varrho} \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta''',$$

weil

$$(-1)^{\left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{x+1}{2} \right]} = (-1)^{[x]}$$

ist, und es ist erreicht, daß sich dieses Vorzeichen in allen Fällen XIII

<sup>21)</sup> Aus dem Erfülltsein von 6. folgt übrigens ohne weiteres das Erfülltsein von 4.

<sup>22)</sup>  $[x]$  = größte ganze Zahl unter  $x$ .

dann ändert oder nicht ändert, wenn das Produkt  $\eta' \cdot \eta'' \cdot \eta'''$  es umkehrt oder beibehält.

Setzt man ferner

$$(8) \quad \eta' = (-1)^{\sum_{n=1}^3 E(\sigma_n)} \quad {}^{23)}$$

und

$$(9) \quad \eta'' = (-1)^{\sum_{n=1}^3 [\lambda_n]} = (-1)^{\sum_{n=1}^3 E(\lambda_n)},$$

so erkennt man, daß sich das Produkt  $\eta' \cdot \eta''$  in den Fällen 1, 2, 4 und 5 von XIII für alle Werte von  $k$  bezüglich des Vorzeichens so verhält, wie sich auch  $\delta_k$  verhalten soll, daß es sich aber im Falle 3 und 6 umgekehrt verhält, wie es von  $\delta_k$  verlangt wird.

Es erübrigt noch  $\eta'''$  so zu bestimmen, daß es sich in diesen beiden Fällen für alle Werte von  $k$  ändert, sonst aber unverändert bleibt.

Die Funktion

$$(10) \quad \eta''' = (-1)^{E\left(\frac{[\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + 1}{2}\right)} \quad {}^{24)}$$

kann sich nur ändern, wenn mindestens eine der Größen  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) eine ganze Zahl durchschreitet, wenn also nach XII ein doppelparabolischer oder Ausnahmefall vorliegt. Eine Nachprüfung sämtlicher Dreiecke des § 3 ergibt, daß  $\eta'''$  sich *dann und nur dann* ändert, wenn ein zum reduzierten doppelt parabolischen Dreieck 2 (§ 3a) oder zum Ausnahme-dreieck des Kernes I' (§ 3b) gehörendes Dreieck durchlaufen wird. *Das sind aber gerade die beiden kritischen Fälle* 3 und 6 <sup>25)</sup>.

Die noch unbestimmte Zahl  $\varrho$  in (6) folgt aus der Betrachtung des (natürlich einfach zusammenhängenden) Elementardreiecks, dessen sämtliche Winkel und Seiten  $\frac{\pi}{2}$  und für das sämtliche Größen  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) gleich  $\frac{1}{4}$  sind. Hier ist nach (6) bis (10)

$$\delta = (-1)^{\varrho}$$

<sup>23)</sup>  $E(x)$  = größte ganze Zahl unter  $x$  für  $x > 1$   
 $= 0$  für  $x \leq 1$ .

<sup>24)</sup> Die im Exponenten stehende Funktion gibt im wesentlichen die Anzahl der lateralen und polaren Anhängungen an, die man am zugehörigen reduzierten Dreieck vornehmen muß, um das Dreieck  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  zu erhalten.

<sup>25)</sup> Würde man an Stelle von  $\eta'''$  den Ausdruck  $(-1)^{\sum E\left(\frac{\lambda_n - [\lambda_{n+1}] - [\lambda_{n-1}]}{2}\right)}$  setzen, so würde der Fall 3 dadurch Erledigung finden; der Fall 6 aber nicht. Daraus folgt, daß die Annahme, daß alle Ausnahmefälle, bei denen allein der Fall 6 auftreten kann, bei stetiger Verzerrung vermeidbar sind, zu einem Widerspruch führen würde. (Vgl. Anm. <sup>20)</sup>).



und, da das Vorzeichen der L'Huilierschen Quadratwurzel für Elementardreiecke positiv ist,

$$(11) \quad \varrho = 0.$$

Es folgt definitiv als Vorzeichen der Quadratwurzel in den L'Huilierschen Gleichungen für Membrandreiecke aus (6) bis (11)

$$(12) \quad \delta = (-1)^{\left\lfloor \frac{\sigma_0+1}{2} \right\rfloor + E(\lambda_1) + \left\lfloor \frac{\lambda_2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lambda_1}{2} \right\rfloor + 1} \cdot \sum_{n=1}^3 \left\{ \left\lfloor \frac{\sigma_n+1}{2} \right\rfloor + E(\sigma_n) + E(\lambda_n) \right\},$$

wo man noch für die Größen  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) die Größen  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) aus (1) einführen könnte oder umgekehrt.

## § 5.

### Ergänzungsrelationen.

Unter „Überschlagungszahl“ einer Dreiecksseite verstehe ich diejenige Zahl, die angibt, wie oft mindestens die Seite ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  durchschritten haben muß, wenn das Dreieck durch stetige Verzerrung aus einem Elementardreieck entstanden ist.

Bei Einführung dieser Ausdrucksweise lassen sich die Sätze IV, VII, IX und XI zusammenfassen in:

XIV. Die Seite  $l_k$  eines Membrandreiecks ändert dann und nur dann ihre Überschlagungszahl, wenn  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet.

Um von der im vorigen Paragraphen geleisteten Vorzeichenbestimmung in den L'Huilierschen Gleichungen zu den Kleinschen „Ergänzungsrelationen“, die Beziehungen zwischen den Überschlagungszahlen und den Größen  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sind, aufzusteigen, untersuchen wir den Sinn des Durchgangs der Seite  $l_k \pi$  durch ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$ , wobei dann also  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl durchschreitet.

Für das Vorzeichen von  $\operatorname{tg} \frac{l_1 \pi}{2}$  erhält man aus (5), (6) und (12):

$$(13) \quad \delta_1 = (-1)^{[\sigma_2] + [\sigma_3] + E(\sigma_1) + E(\sigma_2) + E(\sigma_3) + [\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + E\left(\frac{[\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + 1}{2}\right)}.$$

$\sigma_1$  möge die ganze Zahl  $k_1$  wachsend durchschreiten; an der Verzweigungsstelle selbst bzw. unmittelbar vorher ist dann, wie leicht zu sehen:

$$[\sigma_2] = -k_1 + [1 - \lambda_3],$$

$$[\sigma_3] = -k_1 + [1 - \lambda_2],$$

$$E(\sigma_1) = k_1 - 1,$$

$$E(\sigma_2) = E(\sigma_3) = 0,$$

$$[\lambda_1] = 2k_1 + [\lambda_2 + \lambda_3 - 1],$$

$$[\lambda_2] = [\lambda_2],$$

$$[\lambda_3] = [\lambda_3],$$

$$E \left( \begin{matrix} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & [\lambda_3 + 1] \\ & & 2 & & \end{matrix} \right) = E^{1-2k_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - 1}{2} + \lambda_2 - \lambda_1} \\ - k_1 \cdot \left[ \begin{matrix} \lambda_2 - \lambda_3 - 1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_1 & - & 1 \\ & & 2 & & \end{matrix} \right].$$

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich das Vorzeichen von  $\operatorname{tg} \frac{l_1 \pi}{2}$  unmittelbar vor dem Durchgang durch die Verzweigungsstelle aus (13):

$$(14) \quad \sigma_1 = (-1)^{(1-\lambda_1) + (1-\lambda_2) - 1 + (\lambda_2 + \lambda_3 - 1) + [\lambda_2] + [\lambda_3] + \left[ \frac{(\lambda_2 + \lambda_3 - 1) - (\lambda_2)}{2} + \frac{(\lambda_3 - 1)}{2} \right]}.$$

Faßt man im Exponenten die Ausdrücke

$$[1 - \lambda_2] + [1 - \lambda_3] \quad \text{und} \quad [\lambda_2 + \lambda_3 - 1],$$

ferner

$$[\lambda_2] + [\lambda_3] \quad \text{und} \quad \left[ \frac{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{(\lambda_3 - 1)}{2} \right]$$

zusammen, wobei zu berücksichtigen ist, daß

$$[1 - x] = -[x]$$

ist, so ergibt (14):

$$\sigma_1 = (-1)^{-1 + [\lambda_2 - [\lambda_2] + \lambda_3 - [\lambda_3] - 1] + \left[ \frac{(\lambda_2 - [\lambda_2] + \lambda_3 - [\lambda_3] - 1)}{2} + \frac{(\lambda_2 - [\lambda_2] - 1)}{2} \right]}.$$

Aus den §§ 2 und 3 findet man, daß in der Nähe einer Stelle, an der  $\sigma_1$  positiv ganzzahlig ist, die Ungleichungen:

$$0 < \lambda_2 - [\lambda_2] < 1,$$

$$0 < \lambda_3 - [\lambda_3] < 1$$

gelten, und folglich auch

$$-1 < \lambda_2 - [\lambda_2] + \lambda_3 - [\lambda_3] - 1 < 1$$

ist. Der Ausdruck

$$\varphi = [\lambda_2 - [\lambda_2] + \lambda_3 - [\lambda_3] - 1]$$

kann nur die Werte  $-1$  und  $0$  annehmen.

Ist  $\varphi$  gleich  $-1$ , so ist auch

$$\left[ \frac{\varphi - 1}{2} \right] = -1,$$

und ist  $\varphi$  gleich  $0$ , so ist auch

$$\left[ \frac{\varphi + 1}{2} \right] = 0,$$

weswegen man erhält:

$$\sigma_1 = (-1)^{-1} = -1,$$

d. h.:

Vor dem Durchgang durch eine Verzweigungsstelle, an der  $\sigma_1$  wachsend eine positive ganze Zahl durchschreitet, hat die Seite  $l_1 \pi$  einen Wert  $2k\pi - \varepsilon_1$ , nach dem Durchgang einen Wert  $2k\pi + \varepsilon_2$ , wobei  $k$  eine ganze

Zahl,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  kleine positive reelle oder rein imaginäre Größen sind; die Überschlagungszahl wächst beim Durchgang. Verallgemeinert:

XV. Durchschreitet  $\sigma_k$  eine positive ganze Zahl, so wächst die Überschlagungszahl der Seite  $l_k\pi$  eines Membrandreiecks mit wachsendem  $\sigma_k$  und nimmt ab mit abnehmendem  $\sigma_k$ .

Bezeichnet man die Überschlagungszahl der Seite  $l_k\pi$  mit  $u_k$  und beachtet, daß in einem Elementardreieck

$$E(\sigma_1) = E(\sigma_2) = E(\sigma_3) = 0; \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

ist, so folgt aus den Sätzen XIV und XV:

$$(15) \quad u_k = E(\sigma_k) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Das sind gerade die Kleinschen Ergänzungsrelationen.

## § 6.

### Parabolische Dreiecke.

Zu jedem Membrandreieck, das in den elliptischen oder hyperbolischen Kern einzuhängen ist, läßt sich am gleichen Kern ein zweites, ebenfalls einfach zusammenhängendes, finden mit den nämlichen Maßzahlen der Winkel und Seiten, das aber die umgekehrte Eckenfolge<sup>26)</sup> hat, wie das erste (Gegendreieck): z. B. an Fig. 1a oder 1c zum Dreieck  $\infty a_2 a_3$  mit den Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  das Dreieck  $Pa'_3 a'_2$  mit den Winkeln  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$ . Dasselbe gilt für die doppelparabolischen Membrandreiecke. Beim einfachparabolischen Dreieck ist dies nicht mehr möglich<sup>27)</sup>; hier ist die Eckenfolge für das Membrandreieck fixiert durch die Vorgabe der Winkel und es bedarf zur Erklärung des Dreiecks mit umgekehrter Eckenfolge der Einführung eines neuen zum ursprünglichen symmetrisch liegenden Kernes (Fig. 9). In der Tat tritt bei diesem Kern ein Membrandreieck mit den Ecken  $\infty a_3 a_2$  und den Winkeln  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$  auf. Das gleiche findet man für alle übrigen reduzierten und nicht reduzierten einfachparabolischen Membrandreiecke.

Versucht man aber dennoch das Dreieck mit der verkehrten Eckenfolge in den ursprünglichen Kern einzuhängen, so würde die Figur ein ausgeartetes Dreieck darstellen; in dem angeführten Spezialfall z. B. würden alle Ecken des Dreiecks in den Punkt  $P$  hineinrücken. Würde man in

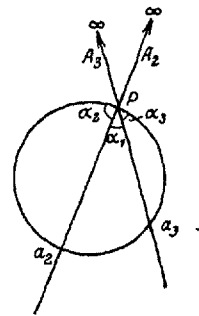


Fig. 9.

<sup>26)</sup> Die Eckenfolge ist so bestimmt, daß bei Umlaufung des Dreiecks im Sinne der Eckenfolge die Dreiecksfläche zur Linken liegt.

<sup>27)</sup> Vgl. etwa K., S. 411.

dieser Weise alle in § 2 besprochenen einfachparabolischen Dreiecke in den „falschen Kern“ einhängen, so würde sich herausstellen, daß die beiden Ecken der Seite  $l_1$  stets dann in den Punkt  $P$  hineinrücken, wenn sie bei dem in den „richtigen Kern“ eingehängten nicht in  $P$  liegen und umgekehrt.

Daraus folgt, daß sich beim Durchgang durch ein in den „falschen Kern“ eingehängtes — also ausgeartetes — einfachparabolisches Dreieck, für das  $\sigma_0$  oder eine der Größen  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) eine ganze Zahl durchschreitet, die Überschlagungszahl der Seite  $l_k$  immer dann ändert, wenn sie sich beim Durchgang durch das richtig eingehängte nicht ändert und umgekehrt.

Die in die beiden verschiedenen zueinander symmetrisch liegenden einfachparabolischen Kerne eingehängten Dreiecke mit verschiedener Eckenfolge aber gleichen Winkeln und Seiten, bei deren Durchlaufung  $\sigma_0$  oder  $\sigma_k$ <sup>28)</sup> eine ganze Zahl durchschreitet, unterscheiden sich wesentlich dadurch, daß bei Durchlaufung des einen die Überschlagungszahl der Seite  $l_k$   $\pi$  sich ändert, bei Durchlaufung des anderen gleichbleibt. D. h.:

Sieht man von der Dreiecksfläche noch ab, so sind die in die beiden verschiedenen zueinander symmetrisch liegenden einfachparabolischen Kerne eingehängten Dreiecke mit gleichen Winkeln und Seiten gleichberechtigt, sie entsprechen den beiden an den Verzweigungsstellen der L'Huilierischen Gleichungen möglichen Vorzeichenbestimmungen.

Betrachtet man aber auch die Dreiecksfläche, so vermittelt das in den „richtigen Kern“ eingehängte einfachparabolische Dreieck zwischen zwei Membrandreiecken, während das in den „falschen Kern“ eingehängte die Mannigfaltigkeit der Membrandreiecke von den nicht einfach zusammenhängenden abgrenzt.

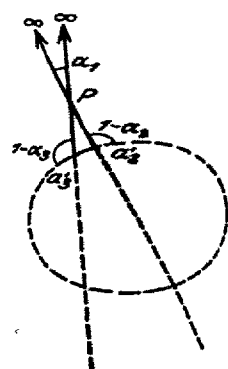


Fig. 10.

An zwei Einzelfällen mag das erläutert werden.

Geht man z. B. von dem einfach zusammenhängenden reduzierten elliptischen Dreieck  $\infty a'_1 a'_3$  mit den Winkeln  $\alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3$  (Fig. 1a) stetig zum parabolischen Fall über, so erreicht man das Zweieck  $P \infty$  (in Fig. 1b sind die Seiten dieses Zweiecks gestrichelt), das man als ausgeartetes Dreieck mit den Winkeln  $\alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3$  und der Seite  $l_1$  gleich 0 auffassen kann. Dieses ausgeartete Dreieck ist das dem reduzierten parabolischen Dreieck 2 des § 2 entsprechende in den „falschen Kern“ eingehängte. Setzt man die stetige Abänderung in das Hyperbolische hinein fort, so erhält man das in Fig. 10

<sup>28)</sup>  $k = 1, 2$  oder  $3$ .

stark ausgezeichnete *nicht mehr einfach zusammenhängende* Dreieck  $\infty a'_1 a'_2$  mit den Winkeln  $\alpha_1, 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_3$ , bei dem sich zwei Seiten überkreuzen, und dessen Seite  $l_1$  einen *negativen* Wert hat. —

Als zweites Beispiel verfolgen wir das reduzierte elliptische Membrandreieck  $Pa_1 a_3$  mit den Winkeln  $2 - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Die hieraus im parabolischen Fall entstehende Figur zerfällt in zwei Zweiecke, nämlich die beiden Kreissegmente  $Pa_2$  und  $Pa_3$ . Die Winkel dieses zerfallenden Dreieckes sind  $2 - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Es handelt sich also um das dem reduzierten Dreieck 4 (§ 2) entsprechende in den „falschen Kern“ eingehängte Dreieck. Die Seite  $l_1$  wird hier gleich dem Bogen  $a_2 Pa_1$ . Der hyperbolische Fall liefert das nicht einfach zusammenhängende Dreieck  $Pa_2 a_3$  der Fig. 11 mit den Winkeln  $2 - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Die Seite  $l_1 = a_2 a_3$  (größerer Bogen!) wird von den beiden anderen Seiten gekreuzt; ihre Überschlagungszahl ist null, während sie nach den Ergänzungsrelationen gleich 1 sein sollte.

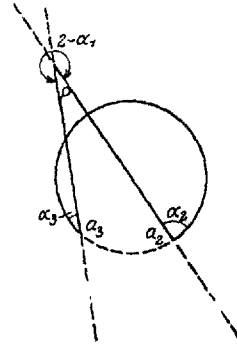


Fig. 11.

In entsprechender Weise wie in diesen Beispielen könnte für alle in den „falschen Kern“ eingehängten einfachparabolischen reduzierten oder nicht reduzierten Dreiecke der oben angegebene Satz bestätigt werden. —

§ 3a zeigte, daß im *doppelparabolischen* Fall von vornherein zwei wesentlich verschiedene Kerne je nach Vorgabe der Dreieckswinkel zu unterscheiden waren. Versucht man doppelparabolische Dreiecke, deren Winkelkombination zum Kern I gehört, in den Kern II einzuhängen oder umgekehrt, so findet man, daß auch diese in den „falschen Kern“ eingehängten Dreiecke, indem sie ausarten, einen Übergang bilden von den Membrandreiecken zu denjenigen eigentlichen, in die man keine Fläche einspannen kann. Während dann etwa die einen bestimmten Wert annehmende Seite beim Durchgang durch das zu Kern I gehörende doppelparabolische Dreieck ein ganzes Vielfaches von  $\pi$  *durchschreitet*, würde sie diesen Wert beim Durchgang durch das zum Kern II gehörende *erreichen*. D. h.:

*Der für einfachparabolische Dreiecke ausgesprochene Satz behält für doppelparabolische Gültigkeit, sofern man ihn auf die beiden wesentlich verschiedenen — also nicht symmetrisch liegenden — doppelparabolischen Kerne bezieht. —*

*Auch in den „falschen Kern“ eingehängte Ausnahmedreiecke sind, wie man leicht sieht, Grenzfälle der einfachzusammenhängenden Dreiecke, doch entsprechen beide Dreiecke der nämlichen Vorzeichenbestimmung in den L'Huilierschen Gleichungen, da sich beim Durchgang durch ein*

zum Kern I' gehörendes Dreieck das Vorzeichen von  $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$  ebensowenig ändert wie beim Durchgang durch ein zum Kern II' gehörendes. Analytisch hängt das damit zusammen, daß man die in (2) vorkommende Quadratwurzel als Produkt von 4 Quadratwurzeln

$$\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0 \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_1 \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_2 \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_3 \pi}{2}}$$

schreiben kann und daß daher an den Ausnahmestellen nicht nur 2, sondern 16 verschiedene Vorzeichenbestimmungen für die Quadratwurzel möglich sind.

Für die doppelparabolischen Dreiecke sind übrigens von diesem Gesichtspunkt aus nicht 2, sondern 4 Möglichkeiten der Vorzeichenbestimmung gegeben. Ob diesen 4 bzw. 16 Möglichkeiten ebensoviel Dreiecksformen entsprechen, von denen dann 3 bzw. 15 innerhalb des Kontinuums der Membrandreiecke den Übergang zu nicht einfachzusammenhängenden Dreiecken bilden würden, soll hier nicht untersucht werden. Unter den 3 bzw. 15 Übergangsdreiecken befindet sich sicherlich das in den „falschen Kern“ eingehängte.

(Eingegangen am 8. Februar 1920.)