Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Von

W. Voigt in Göttingen.*)

(Mit einer Figurentafel.)

Obgleich durch Herrn von Helmholtz und Kirchhoff eine Methode gegeben ist, für den Fall einer ebenen Flüssigkeitsbewegung Probleme zu lösen, bei welchen die Flüssigkeit eine theilweise freie Oberfläche besitzt, sind doch erst wenige Beispiele der Art durchgeführt; es hat daher die folgende Mittheilung, welche eine Anwendung der Kirchhoff'schen Methode auf den Zusammenstoss von mehreren Flüssigkeitsstrahlen bringt, vielleicht einiges Interesse.

Bezeichen φ_1, φ_2 für zwei Flüssigkeiten die Geschwindigkeitspotentiale stationärer Strömungen, so gelten bekanntlich bei ebenen Bewegungen innerhalb der Flüssigkeiten die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{p_1}{\varepsilon_1} = C_1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2\right), \quad \frac{p_2}{\varepsilon_2} = C_2 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2\right),$$

an den freien Oberflächen:

$$\text{(b)} \qquad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}} = 0, \quad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2}} = 0, \quad \overline{p_1} = c_1, \quad \overline{p_2} = c_2,$$

worin p_1, p_2 die Drucke, ε_1, ε_2 die constanten Dichtigkeiten, C_1, C_2 und c_1, c_2 Constanten bezeichnen.

Längs der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten, welche aus Stromcurven gebildet wird, die wir die *singulären* nennen wollen, gilt:

$$\text{(c)} \qquad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}} = \overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}} = 0, \quad \overline{p_1} = \overline{p_2}.$$

Wir wollen den Fall betrachten, dass zwei Strahlen aus dem Unendlichen kommen und im Endlichen zusammentreffen; die Geschwindig-

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1885, Nr. 9.

keiten seien im Unendlichen in den Querschnitten constant G_1 und G_2, im Endlichen variabel V_1 und V_2, an den freien Oberflächen sei der Druck gleich Null; dann giebt die Grenzbedingung $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ die Relation:

$$\varepsilon_1 (G_1^2 - \overline{V}_1^2) = \varepsilon_2 (G_2^2 - \overline{V}_2^2)$$

oder

$$(c') \qquad \varepsilon_1 G_1^2 - \varepsilon_2 G_2^2 = \varepsilon_1 \overline{V}_1^2 - \varepsilon_2 \overline{V}_2^2.$$

Diese Formel zeigt, *dass wenn im Unendlichen die lebendigen Kräfte der Volumeneinheit für beide Strahlen gleich sind, dieselben auch in jedem Punkte der gemeinsamen Grenze gleich sein müssen.*

In diesem Falle kann man also die Bewegungen in beiden Strahlen durch das eine modificirte Geschwindigkeitspotential

$$\Phi$$

umfassen, welches im Gebiet der ersten Flüssigkeit gleich $\sqrt{\varepsilon_1}\,\varphi_1$, in dem der zweiten gleich $\sqrt{\varepsilon_2}\,\varphi_2$ ist und der Bedingung zu genügen hat, dass überall:

$$(1) \qquad \Delta\Phi = 0,$$

in den freien Grenzen aber:

$$(2) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = G^2$$

sein muss; hierbei ist $\varepsilon_1 G_1^2 = \varepsilon_2 G_2^2 = G^2$ gesetzt.

Der Bequemlichkeit wegen wollen wir weiterhin Φ kurz das Geschwindigkeitspotential, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ die Geschwindigkeitscomponenten nennen, obgleich sie sich davon noch durch den Factor $\sqrt{\varepsilon}$ unterscheiden.

Ein specieller, in diesem allgemeinen enthaltener Fall ist der, dass zwei Strahlen *derselben* Flüssigkeit, welche im Unendlichen die gleiche Geschwindigkeit besitzen, zusammenstossen.

Nach einem Grundsatz der Hydrodynamik bleiben Flüssigkeitstheilchen, die sich einmal in der Oberfläche befinden, immer in derselben. Hiernach können die an der Oberfläche beider Strahlen befindlichen nie zu inneren werden, die beiden Strahlen können also nie zu *einem* zusammenfliessen, sondern müssen, indem sie sich theilen, wiederum *zwei* in verschiedenen Richtungen auseinanderfliessende ergeben, von denen der eine in den Raum zwischen den beiden Stossrichtungen, der andere in den gegenüberliegenden fällt. Dieselben vier Stromcurven, welche die Grenzen der stossenden Strahlen bilden, begrenzen in anderer Combination auch die resultirenden Strahlen. Von den im Innern der beiden stossenden Strahlen liegenden Stromcurven muss je eine sich in zwei Zweige theilen, welche nach dem

Zusammenstoss die Grenze zwischen der ursprünglich den verschiedenen Strahlen angehörigen Flüssigkeit bilden. Wir nennen sie, wie schon festgesetzt, die *singulären* Stromcurven. An der Stelle der Verzweigung dieser singulären Stromcurven muss die Geschwindigkeit verschwinden, und daher muss diese Stelle für die singulären Stromcurven beider Flüssigkeiten nach Gleichung (c′) gemeinsam sein. Wir nennen diese Stelle, in welcher die Geschwindigkeit verschwindet und die singulären Stromcurven sich verzweigen, das *Stosscentrum*.

Die obige Betrachtung lässt sich sogleich auf das Problem des Zusammenstosses beliebig vieler aus dem Unendlichen kommenden Flüssigkeitsstrahlen erweitern. Besitzen sie im Unendlichen gleiche lebendige Kraft der Volumeneinheit, so auch überall längs der Curven, in welchen sie sich berühren, und man kann daher in diesem Falle auch für sie ein *gemeinsames* Geschwindigkeitspotential Φ einführen, welches durch die Bedingungen (1) und (2) bestimmt ist. Wir wollen das Problem zunächst in dieser Allgemeinheit in Angriff nehmen und nur die eine Beschränkung einführen, dass die von der Flüssigkeit bedeckte Fläche eine einfach zusammenhängende ist. Damit ist übrigens der Fall nicht ausgeschlossen, dass sich die Grenzen verschiedener Strahlen schneiden, denn man kann in solchen Fällen die Dicke der Flüssigkeit senkrecht zur xy-Ebene unendlich gering und die Strahlen an einander vorbeigeführt denken.

Sei

$$\Omega = \Phi + i\Psi$$

eine Function von $z = x + iy$, so giebt bekannntlich

$$\Psi = \text{Const.}$$

das System der Strömungscurven, welche dem Geschwindigkeitspotential Φ entsprechen.

Es ist dann auch:

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}. \tag{4}$$

„Nun setzen wir*):

$$\frac{dz}{d\Omega} = \zeta = \xi + i\eta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{5}$$

und betrachten ξ und η als die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, die wir die ζ-Ebene nennen werden; die ξ-Axe soll dabei parallel der x-Axe, die η-Axe parallel der y-Axe gewählt sein. Die Vergleichung der Gleichungen (4) und (5) zeigt dann, dass, wenn man von dem Punkte $\zeta = 0$ nach dem Punkte ζ

*) Kirchhoff, Mechanik p. 291, 1876.

eine gerade Linie zieht, die Länge dieser, also ϱ, das Reciproke der Geschwindigkeit und ihre Richtung die Richtung der Bewegung in dem Punkte z ist".

Da in unserm Problem n Strahlen mit gleichen (reducirten) Geschwindigkeiten aus dem Unendlichen kommen und in's Unendliche gehen, so kann derselbe Werth Ω an n verschiedenen Stellen der z-Ebene stattfinden mit Ausnahme derjenigen Werthe, welche der Geschwindigkeit Null entsprechen und welche an den oben definirten „Stosscentren" eintreten.

Sind n stossende Strahlen vorhanden, so gehen nach dem Zusammenstoss auch n Strahlen in's Unendliche hinaus. Die Anzahl der Stosscentren ist hierbei, wie man leicht durch die Anschauung erkennt, im Maximo $(n-1)$; in diesem Falle sind alle Stosscentren auf der Grenze von nur je zwei Strahlen gelegen. Hängen in einem Stosscentrum $(h+1)$ Strahlen zusammen, so kann man dasselbe als ein h-faches durch Zusammenrücken von h ursprünglich getrennten einfachen Stosscentren entstandenes betrachten. Der Grenzfall ist der nur *eines* $(n-1)$ fachen Stosscentrums.

Denken wir also die Werthe Ω, welche allen Punkten im Innern der Flüssigkeit entsprechen, auf einer Ω-Ebene ausgebreitet, so wird dieselbe n-blättrig zu wählen sein und innerhalb des Bereichs der Flüssigkeit in den $(n-1)$ Punkten, welche den Stosscentren entsprechen und sämmtlich im Endlichen liegen, zusammenhängen. Das letztere Resultat liefert auch direct der von Riemann gegebene Satz*): Ist die Anzahl der Umdrehungen, welche die Grenze eines einfach zusammenhängenden endlichen Bereichs macht, gleich n, so ist die Anzahl der auf ihm liegenden einfachen Verzweigungspunkte gleich $(n-1)$.

Die freien Grenzen des Bereichs der Flüssigkeit sind in der z-Ebene Stromcurven, müssen also in der Ω-Ebene Parallele zur Φ-Axe sein. Wir nehmen an, dass sie im ersten Blatt durch

$$\Psi = +a_1 \quad \Psi = +b_1$$

im zweiten durch

$$\Psi = +a_2 \quad \Psi = +b_2$$

im dritten durch

$$(6) \qquad \Psi = +a_3 \quad \Psi = +b_3$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

im $n$ten durch

$$\Psi = +a_n \quad \Psi = +b_n$$

gegeben seien; Punkte im Innern der Flüssigkeit entsprechen dabei Punkten *zwischen* diesen Geraden, das Gebiet der Flüssigkeit ist also der zwischen ihnen liegende n-fache Streifen. Damit derselbe zusammenhänge muss sein:

*) Riemann's Werke, Edit. H. Weber p. 106, Leipzig 1876.

$$a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ \ldots, a_n > b_n$$

und auch

$$a_2 > b_1,\ a_3 > b_2, \ldots, a_1 > b_n.$$

Da in den freien Grenzen ferner die constante (reducirte) Geschwindigkeit G stattfindet, so müssen sie sich in der ζ-Ebene nach dem Obigen als Theile eines Kreises vom Radius $R = \frac{1}{G}$ um den Coordinatenanfang darstellen; Punkte im Innern der Flüssigkeit entsprechen dabei Punkten *ausserhalb* des Kreises, da die Geschwindigkeit in der Grenze die grösste sein muss, das ganze Gebiet der Flüssigkeit also der ganzen Umgebung des Kreises.

Dabei ist aber Folgendes hervorzuheben.

Die Radienvectoren von 0 nach ζ geben durch ihre Richtung an einer Stelle $\xi = R \cos \vartheta$, $\eta = R \sin \vartheta$ die Richtung der Bewegung, welche an der durch $\zeta = \xi + i\eta$ abgebildeten Stelle z stattfindet. Die sämmtlichen beim Umlaufen der gesammten Flüssigkeit in den Grenzen anzutreffenden Bewegungsrichtungen müssen also beim Umlaufen des Kreises vom Radius R (das beiläufig in entgegengesetzter Richtung geschieht, da das *Innere* der Flüssigkeit der *Umgebung* des Kreises entspricht) durch die Richtungen der Radien wiedergegeben werden. Ist die Anzahl aller sich in's Unendliche erstreckenden (sowohl kommenden als gehenden) Strahlen gleich m, so ist die Summe der bei der Umlaufung angetroffenen Richtungsänderungen der Flüssigkeitsbewegung gleich

$$(m - 2)\pi$$

oder, da, wie oben gezeigt, m eine gerade Zahl $= 2n$ sein muss, weil ebenso viele Strahlen aus Unendlich kommen, wie nach Unendlich gehen müssen,

$$= 2(n-1)\pi.$$

Ebenso gross muss also auch die Summe der Richtungsänderungen bei Umlaufung des Kreises in der ζ-Ebene sein, d. h. die ζ-Ebene muss $(n - 1)$ Blätter besitzen, welche ausserhalb des Kreises vom Radius R in $n - 2$ Punkten zusammenhängen, sodass ein Umlauf längs des Kreises durch alle $(n - 1)$ Blätter führt. Dies folgt aus dem oben citirten Riemann'schen Satz sogleich, wenn man nach der Methode der reciproken Radien die *Umgebung* des Kreises vom Radius R auf das Innere einer Kreisfläche vom Radius $\frac{1}{R}$ abbildet.

Wir betrachten die Abbildung des oben definirten n-fachen Streifens in der Ω-Ebene auf dieser $(n - 1)$ blättrigen ζ-Ebene und wollen sie vermitteln durch die Abbildung auf einer *ein*blättrigen ζ'-Ebene.

In dieser soll der n-fache Streifen auf einem Kreis vom Radius R'

so wiedergegeben werden, dass im ersten Blatt der Ω-Ebene der Punkt $\Phi = +\infty$ entspricht dem Punkt $\zeta' = R'$ der ζ'-Ebene,

ebenso $\Phi = -\infty$ $\qquad \zeta' = R' e^{i\alpha_1'}$

im zweiten Blatte analog

$$\begin{aligned} \Phi &= +\infty \text{ entspricht } & \zeta' &= R' e^{i\beta_1'} \\ \Phi &= -\infty & \zeta' &= R' e^{i\alpha_2'} \end{aligned}$$

im dritten Blatte

$$\begin{aligned} \Phi &= +\infty & \zeta' &= R' e^{i\beta_2'} \\ \Phi &= -\infty & \zeta' &= R' e^{i\alpha_3'} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

im $n$ten Blatte

$$\begin{aligned} \Phi &= +\infty & \zeta' &= R' e^{i\beta'_{n-1}} \\ \Phi &= -\infty & \zeta' &= R' e^{i\alpha'_n}, \end{aligned}$$

wobei

$$0 < \alpha_1' < \beta_1' < \alpha_2' < \beta_2' < \cdots < \alpha_n' < \beta_n' \quad \text{und} \quad \beta_n' = 2\pi \text{ ist.}$$

Es muss also längs des Kreises vom Radius R' sein:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \Omega &= ia_1 & &\text{für } 0 < \vartheta' < \alpha_1' \\ \Omega &= ib_1 & &\;\;,, \quad \alpha_1' < \vartheta' < \beta_1' \\ \Omega &= ia_2 & &\;\;,, \quad \beta_1' < \vartheta' < \alpha_2' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Omega &= ia_n & &\;\;,, \quad \beta'_{n-1} < \vartheta' < \alpha'_n \\ \Omega &= ib_n & &\;\;,, \quad \alpha'_n < \vartheta' < \beta'_n. \end{aligned}$$

Diesen Bedingungen wird genügt durch die Function:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Omega = \frac{i}{2\pi}\left[(a_1-b_1)\alpha_1' + (b_1-a_2)\beta_1' + (a_2-b_2)\alpha_2' + \cdots + (a_n-b_n)\alpha_n' + 2\pi b_n\right] \\ + \frac{1}{\pi}\left[(a_1-b_1)\, l\left(1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\alpha_1'}\right) + (b_1-a_2)\, l\left(1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\beta_1'}\right)\right. \\ \left. + \cdots + (b_n-a_1)\, l\left(1-\frac{\zeta'}{R'}\right)\right]. \end{aligned}$$

Da bei der conformen Abbildung je ein innerer und ein Randpunkt sich beliebig entsprechend gewählt werden kann und letzterer bereits durch die Annahme, dass dem Punkt $\Phi = +\infty$ im ersten Blatt der Ω-Ebene $\zeta' = +R'$ entspricht, bestimmt ist, so kann nur noch über einen innern Punkt verfügt werden. Dem scheint zu widersprechen, dass bei willkürlich gewählten a_n, b_n noch $(2n-1)$ Grössen α_n, β_n disponibel sind. Indess ist zu beachten, dass die Verfügung über die a_n und b_n keineswegs den abzubildenden n-fachen Streifen in der Ω-Ebene vollständig bestimmt, sondern dazu noch die

Angabe der auf ihm liegenden $(n-1)$ Verzweigungspunkte nach Ort und Art erforderlich ist.

Die Bilder der Verzweigungspunkte in der ζ'-Ebene sind gegeben durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = 0$$

oder

$$(9) \qquad 0 = \frac{(a_1 - b_1)e^{-i\alpha_1'}}{1 - \frac{\zeta'}{R'}\, e^{-i\alpha_1'}} + \frac{(b_1 - a_2)\, e^{-i\beta_1'}}{1 - \frac{\zeta'}{R'}\, e^{-i\beta_1'}} + \cdots$$

Die Gleichung ist vom $(2n-2)$ten Grade, da der Coefficient von $(\zeta')^{2n-1}$ identisch verschwindet. $(n-1)$ Wurzeln müssen Punkte innerhalb des Kreises vom Radius R' ergeben, da nach dem Riemann'schen Satz $(n-1)$ Verzweigungspunkte im Bereich der Flüssigkeit liegen müssen*).

*) Man kann aber diesen Nachweis hier einfach direct führen und somit sich der Anwendung jenes Satzes vollständig entschlagen.

Dazu bedenke man zunächst, dast

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = \Omega'$$

gesetzt eine einwerthige Function von ζ' ist.

Ω' wird unendlich in den $2n$ Punkten $R'e^{i\alpha_1'}$, $R'e^{i\beta_1'}$, ... es muss also ebenso oft verschwinden. Zwei Nullpunkte fallen in's Unendliche, die übrigen im Allgemeinen in's Endliche. Wendet man den Satz, dass das Randintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d(l\Omega')$$

über eine beliebige geschlossene Curve ausgedehnt die Anzahl der umschlossenen Nullpunkte weniger der der umschlossenen Unendlichkeitspunkte giebt, auf einen Kreis an, der um den Punkt $\zeta' = 0$ mit einem unendlich wenig grösseren oder kleineren Radius als R' beschrieben ist, so kann man die Anzahl der auf der Kreisfläche liegenden Nullpunkte von Ω' bestimmen.

Hierzu bemerke man, dass, weil die Grössen a_n, b_n einen zusammenhängenden Streifen in der Ω-Ebene bestimmen sollen,

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= + A_1', & a_2 - b_2 &= + A_2', \ldots \\ -(b_1 - a_2) &= + B_1', & -(b_2 - a_3) &= + B_2', \ldots \end{aligned}$$

sämmtlich positive Grössen sein müssen.

Die Gleichung $\Omega' = 0$ kann also geschrieben werden:

$$0 = \frac{A_1'}{R'e^{i\alpha_1'} - \zeta'} - \frac{B_1'}{R'e^{i\beta_1'} - \zeta'} \pm \cdots = \Phi' + i\Psi'$$

und stellt in ihrem reellen und imaginären Theil Φ' und Ψ' — mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen — die ξ- und η-Componente der Attraction dar, welche an der Stelle ζ' stattfinden würde, wenn in den Punkten $R'e^{i\alpha_1'}$, $R'e^{i\beta_1'}$, ...

Ihre Lage wird bei unserm Problem kaum direct gegeben, sondern nur durch Verfügungen über Breite, Richtung und Lage der Strahlen bestimmt sein. Sie ist bestimmt, wenn $(2n-2)$ reelle Relationen zwischen den a_n, b_n und α_n, β_n gegeben sind; da $(2n-1)$ α_n, β_n verfügbar sind, so bleibt, wie auch nöthig, bei festgesetzten a_n, b_n, noch eine übrig, um einen innern Punkt in den beiden auf einander abgebildeten Flächen sich entsprechen zu lassen*). Wir wollen auf diese Verfügungen erst eingehen, wenn wir allgemein den Weg der Lösung vollständig angegeben haben.

Um die gewonnene Abbildung des $n$fachen Streifens auf dem Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene für unser hydrodynamisches Problem zu verwerthen, verfahren wir folgendermassen.

Wir bilden zunächst den Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene so in einer $(n-1)$-blättrigen ζ''-Ebene auf einen Kreis vom beliebigen Radius R'' um den Coordinatenanfang ab, dass die Punkte des ersteren, welche durch die Wurzeln der Gleichung (9) gegeben sind (d. h. die Bilder der Verzweigungspunkte in der Ω-Ebene) in letzterem übereinander und zwar in den Mittelpunkt fallen. Dass dies *allgemein*

---

die Massen A_1, $-B_1$, A_2, $-B_2$, ... angebracht wären und nach dem Gesetz der (-1)ten Potenz der Entfernung wirkten. Das Integral

$$\int d(l\Omega')$$

wird hiernach

$$= \int d\left[\frac{1}{2}l(\Phi'^2+\Psi'^2)+i\operatorname{arctg}\left(\frac{\Phi'}{\Psi'}\right)\right],$$

und wenn man berücksichtigt, dass $\Phi'^2+\Psi'^2$ das Quadrat der resultirenden Kraft, $\frac{\Psi'}{\Phi'}$ die negative Tangente des Winkels zwischen ihrer Richtung und der ξ-Axe ist, so erkennt man ohne alle Rechnung, dass der reelle Theil des Integrales über eine beliebige geschlossene Curve genommen verschwindet, der imaginäre die Summe aller Richtungsänderungen der resultirenden Kraft bei der Umlaufung der Curve ergiebt.

Für Punkte, welche einem Attractionscentrum unendlich nahe liegen, ist die Kraft nach diesem Centrum hin oder von ihm hinweg gerichtet je nach dem Vorzeichen der daselbst befindlichen Masse. Daher kann man für einen Kreis um den Punkt $\zeta'=0$, der unendlich nahe dem das Flüssigkeitsgebiet begrenzenden liegt, sogleich durch die Anschauung die Grösse der obigen Richtungsänderung finden. Auf der Grenze selbst können keine Nullpunkte liegen, da in der Grenze die Geschwindigkeit gleich G, in den Verzweigungspunkten gleich Null ist.

Liegt der Kreis innerhalb desjenigen vom Radius R' so findet sich der Werth der Richtungsänderung $-(n-1)2\pi$, liegt er ausserhalb $+(n+1)2\pi$; im ersteren Falle umschliesst er nur die Nullpunkte im Innern des Kreises R'; im letzteren Falle auch die $2n$ Unendlichkeitspunkte; beides ergiebt übereinstimmend, dass sich insgesammt $(n-1)$ Nullpunkte auf der Fläche, also auch $(n-1)$ ausserhalb befinden.

*) In der Festsetzung der a_n, b_n liegt nämlich bereits die Bestimmung der Φ-Axe in der Ω-Ebene.

möglich ist erkennt man nach einer mündlichen Bemerkung meines verehrten Freundes H. Weber in Marburg leicht in folgender Weise.

Allgemein kann man ausser einem Randpunkt nur *einen* innern Punkt bei der Abbildung sich entsprechen lassen. Geschieht die Abbildung des einfach zusammenhängenden Bereiches auf einer $(n-1)$ blättrigen Ebene, so sind die $(n-2)$ im Innern liegenden Verzweigungspunkte verfügbar und man kann durch ihre Wahl weitere $(n-2)$ innere Punkte sich entsprechen lassen; es können demnach im Ganzen die Bilder von $(n-1)$ Punkten des einblättrigen Kreises beliebig gewählt werden.

Schliesslich bilden wir durch die Substitution

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta}$$

den Kreis vom Radius R'' in der $(n-1)$ blättrigen ζ'-Ebene ab auf der Umgebung des Kreises vom Radius $R = \frac{1}{R''}$ in der gleichfalls $(n-1)$ blättrigen ζ-Ebene, dass das Bild des Centrums ins Unendliche fällt. Dann ist zugleich der $n$fache Streifen in der Ω-Ebene ebenda so abgebildet, dass die Bilder seiner Verzweigungspunkte, d. h. der Stosscentren, im Unendlichen, die seiner Grenzen auf der Peripherie des Kreises vom Radius R liegen.

Die gewonnene Relation zwischen Ω und ζ giebt dann für jedes System der darin vorkommenden Constanten a_n, b_n und α_n, β_n die Lösung eines Problemes des Stosses für n Flüssigkeitsstrahlen. Nach (5) erhält man durch:

$$z = \int \zeta \, d\Omega + \text{Const.} \tag{10}$$

zu jedem Punkt ζ oder Ω einen entsprechenden z der xy-Ebene; der Grenze des Streifens in der Ω-Ebene und zugleich dem Kreis vom Radius R in der ζ-Ebene entspricht die freie Grenze der Flüssigkeit, ein negativer Umlauf des Kreises ergiebt einen positiven der Grenzen der Flüssigkeit. Wird auf dieser Kreislinie an den Punkten

$$-\vartheta = 0,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2, \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_n$$

(wobei $\beta_n = 2\pi(n-1)$ ist) Ω abwechselnd gleich $+\infty$ und $-\infty$, so geben

$$(\alpha_1 - 0),\ (\beta_1 - \alpha_1),\ (\alpha_2 - \beta_1), \ldots,\ (\beta_n - \alpha_n)$$

die Richtungsänderungen der Strömung längs der $2n$ die freie Grenze der Flüssigkeit bildenden Stromfäden von Unendlichen aus bis wieder in's Unendliche.

$$q = 0,\ \pi - \alpha_1,\ 2\pi - \beta_1,\ 3\pi - \alpha_2, \ldots,\ (2n-1)\pi - \alpha_n,$$

sind daher die Winkel der x-Axe gegen die Radienvectoren nach den unendlich fernen Theilen der Strahlen oder gegen die Richtungen der Strahlen im Unendlichen selbst, diese Richtungen nicht im Sinne der

Strömung, sondern stets in's Unendliche hinaus positiv gerechnet. Ist eine der Differenzen $\alpha_h - \beta_{h-1}$ oder $\beta_h - \alpha_h$ grösser als π so schneidet das entsprechende Stück der Begrenzung sich selbst.

Fig. 1 giebt den Zusammenhang zwischen diesen Richtungen für eine zweiblättrige ζ-Ebene, also für drei zusammenstossende Strahlen das untere Blatt ist schraffirt. Fig. 2 zeigt wie etwa bei gegebenen Constanten diese Flüssigkeitsbewegung verlaufen kann. Die punktirten Linien deuten die singulären Stromcurven an, ihre Schnittpunkte die Stosscentren. Die Gleichungen der singulären Stromcurven erhält man, wenn man in der Formel (10), in welcher $\Omega = \Phi + i\Psi$ ist, dem Ψ successive diejenigen constanten Werthe beilegt, welche den Wurzeln der Gleichung (9)

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = 0$$

entsprechen; die Oerter der Stosscentren geben sich, wenn man über Φ und Ψ demgemäss verfügt.

Wir wollen den vorstehend beschriebenen Weg der Lösung in dem einfachen, immer noch sehr allgemeinen Falle wirklich gehen, dass alle $(n-1)$ Stosscentren zusammenfallen, d. h. die $(n-1)$ Verzweigungspunkte auf dem Kreis vom Radius R' *identisch* werden. Da dieser $(n-1)$ fache Verzweigungspunkt in den Coordinatenanfang von ζ' gebracht werden soll und dies nur auf eine Weise möglich ist, kann man ihn ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich bei der ersten Abbildung dahin fallen lassen. Hierzu ist erforderlich, dass die Gleichung (9) die $(n-1)$ fache Wurzel $\zeta' = 0$ besitzt und dies findet statt, wenn die $(n-1)$ Bedingungen erfüllt sind:

$$(11) \qquad 0 = (a_1 - b_1)e^{-ih\alpha_1'} + (b_1 - a_2)e^{-ih\beta_1'} + \cdots$$

für

$$h = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Dies giebt die $(2n-2)$ reellen Gleichungen*):

$$(12) \qquad \begin{aligned} 0 &= (a_1 - b_1)\cos h\alpha_1' + \cdots \\ 0 &= (a_1 - b_1)\sin h\alpha_1' + \cdots \end{aligned}$$

für

$$h = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Soll dieser $(n-1)$ fache Windungspunkt $\Omega = 0$ entsprechen, was wegen der Willkürlichkeit des Coordinatenanfangs keine Beschränkung ist, so ist noch erforderlich, *dass die b_h sämmtlich negativ* sind und gilt:

$$(13) \qquad 0 = (a_1 - b_1)\alpha_1' + (b_1 - a_2)\beta_1' + \cdots.$$

*) Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, dass bei Erfüllung dieser Relationen die übrigen $(n-1)$ Verzweigungspunkte sämmtlich in's Unendliche fallen.

Es sind also die $(2n-1)$ Grössen α_h', β_h' durch diese $(2n-1)$ Gleichungen bestimmt, wenn die a_h, b_h gegeben sind.

Nun werde gesetzt:

$$\zeta = (\zeta')^{\frac{1}{n-1}}$$

und

$$\zeta'' = \frac{1}{\xi}, \quad \text{also} \quad \zeta = \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

so wird:

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\left[(a_1 - b_1)\, l\left(1 - \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \frac{e^{-i\alpha_1'}}{R'}\right)\right.$$
$$\left. + (b_1 - a_2)\, l\left(1 - \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \frac{e^{-i\beta_1'}}{R'}\right) + \cdots\right].$$

Hierin führen wir noch ein:

$$\alpha_h' = \frac{\alpha_h}{n-1} \quad \beta_h' = \frac{\beta_h}{n-1} \quad R' = \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

und vertauschen die b_h mit $-b_h$, so erhalten wir:

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\left\{(a_1 + b_1)\, l\left[1 \mp \left(\frac{Re^{-i\alpha_1}}{\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]\right. \tag{14}$$
$$\left. - (b_1 + a_2)\, l\left[1 - \left(\frac{Re^{-i\beta_1}}{\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right] \pm \cdots - (b_n + a_1)\, l\left[1 - \left(\frac{R}{\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]\right\}$$

als diejenige Function, welche in dem behandelten Specialfall das Problem löst, wenn man dazu nimmt die Nebenbedingungen:

$$R = \frac{1}{G},$$

$$0 = (a_1 + b_1)\alpha_1 - (b_1 + a_2)\beta_1 + \cdots - b_n 2\pi$$

$$\begin{aligned} 0 = (a_1 + b_1)\cos\frac{h\alpha_1}{n-1} - (b_1 + a_2)\cos\frac{h\beta_1}{n-1} + \cdots \\ + (a_n + b_n)\cos\frac{h\alpha_n}{n-1} - (b_n + a_1) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} 0 = (a_1 + b_1)\sin\frac{h\alpha_1}{n-1} - (b_1 + a_2)\sin\frac{h\beta_1}{n-1} + \cdots \\ + (a_n + b_n)\sin\frac{h\alpha_n}{n-1}, \end{aligned}$$

für

$$h = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Stossen nur 2 Strahlen zusammen, so ist $n = 2$, die ζ-Ebene also einblättrig. Die obigen Formeln ergeben, wenn man dies einführt:

$$
(16)\quad \begin{aligned}
\Omega = \frac{1}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)\,l\left(1-\frac{Re^{-i\alpha_1}}{\zeta}\right) - (b_1+a_2)\,l\left(1-\frac{Re^{-i\beta_1}}{\zeta}\right) \\
&+(a_2+b_2)\,l\left(1-\frac{Re^{-i\alpha_2}}{\zeta}\right) - (b_2+a_1)\,l\left(1-\frac{R}{\zeta}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
(17)\quad \begin{aligned}
0 &= (a_1+b_1)\alpha_1 - (b_1+a_2)\beta_1 + (a_2+b_2)\alpha_2 - 2\pi b_2 \\
0 &= (a_1+b_1)\cos\alpha_1 - (b_1+a_2)\cos\beta_1 + (a_2+b_2)\cos\alpha_2 - (b_2+a_1) \\
0 &= (a_1+b_1)\sin\alpha_1 - (b_1+a_2)\sin\beta_1 + (a_2+b_2)\sin\alpha_2 .
\end{aligned}
$$

Die Gleichung für z wird hiernach wegen

$$z = \int \zeta\, d\Omega + \text{Const.}$$

und falls man verfügt, dass z mit Ω verschwinden, d. h. das Stosscentrum in den Coordinatenanfang fallen soll:

$$
(18)\quad \begin{aligned}
z = \frac{R}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)e^{-i\alpha_1}l(\zeta - Re^{-i\alpha_1}) - (b_1+a_2)e^{-i\beta_1}l(\zeta - Re^{-i\beta_1}) \\
&+(a_2+b_2)e^{-i\alpha_2}l(\zeta - Re^{-i\alpha_2}) - (b_2+a_1)\,l(\zeta - R)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt, wenn man:

$$z = x + iy, \quad \zeta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

setzt:

$$
(19)\quad \begin{aligned}
x = \frac{R}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)\Big[\frac{1}{2}\cos\alpha_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_1)) \\
&\qquad + \sin\alpha_1 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta + R\sin\alpha_1}{\varrho\cos\vartheta - R\cos\alpha_1}\right)\Big] \\
&-(b_1+a_2)\Big[\frac{1}{2}\cos\beta_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\beta_1)) \\
&\qquad + \sin\beta_1 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta + R\sin\beta_1}{\varrho\cos\vartheta - R\cos\beta_1}\right)\Big] \\
&+(a_2+b_2)\Big[\frac{1}{2}\cos\alpha_2 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_2)) \\
&\qquad + \sin\alpha_2 . \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\vartheta + R\sin\alpha_2}{\varrho\cos\vartheta - R\cos\alpha_2}\right)\Big] \\
&-(b_2+a_1)\cdot\frac{1}{2}\,l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos\vartheta)\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = -\frac{R}{\pi}\Big\{(a_1+b_1) & \Big[\frac{1}{2}\sin\alpha_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_1)) \\
& \qquad -\cos\alpha_1 . \operatorname{arctg}\Big(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\alpha_1}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\alpha_1}\Big)\Big] \\
-(b_1+a_2) & \Big[\frac{1}{2}\sin\beta_1 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\beta_1)) \\
& \qquad -\cos\beta_1 . \operatorname{arctg}\Big(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\beta_1}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\beta_1}\Big)\Big] \\
+(a_2+b_2) & \Big[\frac{1}{2}\sin\alpha_2 . l(\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta+\alpha_2)) \\
& \qquad -\cos\alpha_2 . \operatorname{arctg}\Big(\frac{\varrho\sin\vartheta+R\sin\alpha_2}{\varrho\cos\vartheta-R\cos\alpha_2}\Big)\Big] \\
-(b_2+a_1) & \Big[-\operatorname{arctg}\frac{\varrho\sin\vartheta}{\varrho\cos\vartheta-R}\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Nimmt man $\varrho = R$ und lässt ϑ von 0 bis -2π abnehmen, so umläuft man zugleich in *positiver Richtung* die gesammte Flüssigkeit. Die Schwierigkeit, die in der Bestimmung des Werthes des arctg in den Ausdrücken von x und y liegt, umgeht man, indem man in (18) die Logarithmen entwickelt und den imaginären Theil nach der Formel:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\pi-\chi) &= \sum \frac{\sin h\chi}{h} \quad \text{für} \quad 0 < \chi < 2\pi \\
-\frac{1}{2}(\pi+\chi) &= \sum \frac{\sin h\chi}{h} \quad \text{für} \quad 0 > \chi > -2\pi
\end{aligned}
$$

summirt. Man erhält so:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{R}{2\pi}\Big\{(a_1+b_1)\Big[\cos\alpha_1 . l\Big(4\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big) \\
& \qquad \pm \sin\alpha_1\,(\pi\mp(\alpha_1+\vartheta)) \mp \cdots\Big]\Big\} \\
\bar{y} &= \frac{R}{2\pi}\Big\{(a_1+b_1)\Big[-\sin\alpha_1 . l\Big(4\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big) \\
& \qquad \pm \cos\alpha_1\,(\pi\mp(\alpha_1+\vartheta)) \mp \cdots\Big]\Big\}. \text{*)}
\end{aligned} \tag{20}
$$

Das obere Zeichen gilt für $0 < (\alpha_1+\vartheta) < 2\pi$, das untere für $0 > (\alpha_1+\vartheta) > -2\pi$; analog in den anderen Gliedern.

Hiernach erkennt man sogleich, dass beim Passiren des Werthes $\vartheta = -\alpha_1$ springt:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &\text{ um } -R(a_1+b_1)\sin\alpha_1 \\
\bar{y} &\text{ um } -R(a_1+b_1)\cos\alpha_1 .
\end{aligned}
$$

---

*) Hiernach kann nach Formel (17) unter dem Logarithmus der Factor 4 beliebig weggelassen werden.

Es ist also $R(a_1+b_1)=A_1$ die Breite des in der Richtung α_1 aus Unendlich kommenden Stromes.

Ganz ebenso findet sich:

$$R(a_2+b_2)=A_2$$

die Breite des in der Richtung α_2 kommenden,

$$R(b_1+a_2)=B_1, \qquad R(b_2+a_1)=B_2$$

die Breiten der in der Richtung β_1 und β_2 $(=0)$ in's Unendliche fliessenden Strahlen.

Dass $A_1+A_2\equiv B_1+B_2$ ist, sagt also aus, dass ebenso viel Flüssigkeit zu-, wie abfliesst.

Man kann hiernach die Resultate schreiben:

$$(21)\quad \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\pi R}\{A_1 l(\zeta-Re^{-i\alpha_1})-B_1 l(\zeta-Re^{-i\beta_1}) \\ &\quad + A_2 l(\zeta-Re^{-i\alpha_2})-B_2 l(\zeta-R)\} \\ z &= \frac{1}{\pi}\{A_1 e^{-i\alpha_1} l(\zeta-Re^{-i\alpha_1})-B_1 e^{-i\beta_1} l(\zeta-Re^{-i\beta_1}) \\ &\quad + A_2 e^{-i\alpha_2} l(\zeta-Re^{-i\alpha_2})-B_2 l(\zeta-R)\} \end{aligned}$$

$$(21)\quad \begin{aligned} x &= \left\{\frac{A_1}{\pi}\left[\quad\frac{\cos\alpha_1}{2} l(\varrho^2+R^2-2R\varrho\cos(\vartheta+\alpha_1))\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \sin\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{R\sin(\vartheta+\alpha_1)}{\varrho-R\cos(\vartheta+\alpha_1)}\right]\mp\cdots\right\} \\ y &= \left\{\frac{A_1}{\pi}\left[-\frac{\sin\alpha_1}{2} l(\varrho^2+R^2-2R\varrho\cos(\vartheta+\alpha_1))\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \cos\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{R\sin(\vartheta+\alpha_1)}{\varrho-R\cos(\vartheta+\alpha_1)}\right]\mp\cdots\right\}. \end{aligned}$$

Dazu die Bedingungen:

$$(22)\quad \begin{aligned} 0 &= A_1\alpha_1 - B_1\beta_1 + A_2\alpha_2 - 2\pi b_2 R \\ 0 &= A_1\cos\alpha_1 - B_1\cos\beta_1 + A_2\cos\alpha_2 - B_2 \\ 0 &= A_1\sin\alpha_1 - B_1\sin\beta_1 + A_2\sin\alpha_2 \\ 0 &= A_1 - B_1 + A_2 - B_2. \end{aligned}$$

Die zweite und dritte Gleichung hiervon hat den einfachen Sinn, dass die Schwerpunktsgeschwindigkeit der im Unendlichen in gleicher Zeit durch einen Querschnitt zu- und abströmenden Flüssigkeit gleich ist.

Es drückt sich nach diesen Formeln *nicht* Alles vollständig durch die Breiten und Richtungen der Strahlen aus, sondern es bleibt noch eine Grösse (b_2) in den Formeln, die wesentlich von der Lage des Stosscentrums abhängt. Da dieselbe nur in einer Gleichung vorkommt, so kann man sie willkürlich lassen und durch gegebene A, B und α, β bestimmen. Dabei ist nur das Eine zu beachten, dass b_2 sich positiv und kleiner als $\frac{A_2}{R}$ und $\frac{B_2}{R}$ ergeben muss, da $A_2 = (a_2 + b_2)R$, $B_2 = (b_2 + a_1)R$ ist und die a_h und b_h sämmtlich positiv sind; eine Bestimmung über den Zusammenhang zwischen den A, B und α, β giebt die erste Formel aber nicht.

Nach der Ableitung sind A_1, A_2 die Breiten der aus Unendlich kommenden $B_1 B_2$ der in's Unendliche gehenden Strahlen. Für die Discussion ist es bei der im Uebrigen gewählten Bezeichnung bequemer, diese Bedeutungen zu *vertauschen*. Dies ist erlaubt, d. h. *die ganze Flüssigkeitsbewegung kann einfach umgekehrt werden*, weil wenn man in der Ω-Ebene das Coordinatensystem mit dem entgegengesetzten vertauscht, also die Bewegungsrichtung umkehrt (da wachsende Φ in abnehmende verwandelt werden) z nichts weiter als das Vorzeichen ändert, also die Gestalt der Flüssigkeit erhalten bleibt und das ganze Bild nur um 180^0 gedreht wird. Da es aber auf die absolute Lage der Erscheinung nicht ankömmt, können wir diese Drehung auch ignoriren.

Die Bedingungen, um die es sich handelt, schreiben wir, indem wir alle Breiten durch $B_2 = B$ ausdrücken:

$$(23)\quad \begin{aligned} 1 &= \frac{A_1}{B} - \frac{B_1}{B} + \frac{A_2}{B} \\ 1 &= \frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\cos\beta_1 + \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 \\ 0 &= \frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\sin\beta_1 + \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 \\ 2\pi\frac{b_2 R}{B} &= \frac{A_1}{B}\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\beta_1 + \frac{A_2}{B}\alpha_2. \end{aligned}$$

Es giebt dabei:

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < 2\pi.$$

Man bemerkt: Sind alle drei Richtungswinkel α_1, β_1, α_2 gegeben, so sind die Verhältnisse der Breiten A, B vollständig bestimmt.

Es wird nämlich:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{\sin(\alpha_2 - \beta_1) - (\sin\alpha_2 - \sin\beta_1)}{\Delta}$$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}{\Delta}$$

$$\frac{A_2}{B} = \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1) - (\sin\beta_1 - \sin\alpha_1)}{\Delta}$$

wenn:

$$\Delta = \sin(\alpha_2 - \beta_1) + \sin(\beta_1 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

ist.

Einen physikalischen Sinn geben natürlich nur die Fälle, welche die A und B sämmtlich positiv werden lassen.

Die gewöhnliche Fragestellung wird die sein, dass das Verhältniss der Breiten $\frac{B_1}{B}$ der stossenden Strahlen und ihre gegenseitige Richtung, also β_1 gegeben ist, und die Breiten A_1, A_2 und Richtungen α_1, α_2 der resultirenden Strahlen gesucht werden.

Hier reichen die drei ersten Gleichungen (23) zur Bestimmung nicht aus, sondern es giebt unendlich viele Lösungen. Bestimmt wird das Problem erst, wenn noch eine der Grössen für die *resultirenden* Strahlen gegeben ist, oder über $b_2 R$, d. h. über *die Lage des Stosscentrums* in der Flüssigkeit verfügt ist. Im letzteren Falle werden die Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten transcendent. Ist im ersteren, hiernach günstigeren Falle α_1 gegeben, so wird:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{B_1(1-\cos\beta_1)}{B_2(1-\cos\alpha_1)+B_1(1-\cos(\beta_1-\alpha_1))};$$

alles Uebrige ergiebt sich hieraus leicht.

Die Rolle, welche $b_2 R$ bei dem Problem spielt, übersieht man am deutlichsten in dem Falle *gleich breiter*, in entgegengesetzter Richtung zusammenstossender Strahlen. Dann ergiebt sich wegen:

$$B_1 = B, \qquad \beta_1 = \pi$$

sogleich:

$$B_1 = A_1 = A_2, \qquad \alpha_2 = \pi + \alpha_1$$

und aus der vierten Formel (23) folgt:

$$\frac{Rb_2}{B}\pi = \alpha_1 .$$

Es wird also $\frac{Rb_2}{B} = 0$ oder 1 wenn $\alpha_1 = 0$ oder π ist; im Falle, dass die Strahlen *aneinander* hingehen, rückt also das Stosscentrum in die Oberfläche; je mehr der Stoss central ist, um so näher liegt es der Mitte der Strahlen. Analoges gilt auch für den directen Stoss zweier ungleich breiter Strahlen.

Dies ist mit der directen Anschauung in vollkommenem Einklang. Ueberraschend ist aber, dass die Theorie auch für den *schiefen* Stoss in gleicher Weise eine verschiedene Lage des Stosscentrums und demgemäss bei demselben gegenseitigen Richtungswinkel einen verschiedenen Verlauf der Erscheinung zulässt. Man kann sich von der Nothwendigkeit dieser Thatsache etwas Rechenschaft geben, indem man überlegt, dass wenn man ursprünglich *entgegengesetzt* gerichtete stossende Strahlen um einen unendlich kleinen Winkel gegeneinander neigt, nothwendig auch nur eine *unendlich kleine* Aenderung der ganzen resultirenden Bewegung eintreten muss und hiernach bei *verschiedenen* in *verschiedener* Weise excentrisch stossenden Paaren durch diese kleine

Neigung nicht die *gleiche* Bewegung entstehen kann, sondern eine Verschiedenheit bestehen bleiben muss, wenngleich die verschiedenen Paare gleiche Breite und gleiche Richtung der stossenden Strahlen besitzen.

Es muss also die stationäre Bewegung bei dem Zusammentreffen mehrerer Flüssigkeitsstrahlen von den Umständen beim ersten Beginn dieser Bewegung abhängig sein. Etwas Aehnliches hat sich auch in andern Gebieten der Hydrodynamik ergeben.

Wir wollen schliesslich ein einfaches Beispiel in Rücksicht auf das eben Erörterte ausführlicher behandeln.

Es sei gegeben

$$B_1 = B, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

d. h. der Zusammenstoss zweier gleich breiter Strahlen unter rechtem Winkel. Dann geben die 4 Bedingungen:

$$(24) \qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{A_1 + A_2}{B} \\ 1 &= \frac{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}{B} \\ 1 &= \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{B} \\ \frac{R b_2}{B} &= \frac{A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2}{2\pi B} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

also:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{1}{2 - (\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{1 - 3\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}.$$

Ferner:

$$\Omega = \frac{B}{\pi R}\left\{\frac{A_1}{B} l(\zeta - R e^{-i\alpha_1}) + \frac{A_2}{B} l(\zeta - R e^{-i\alpha_2}) - l\big((\zeta - R)(\zeta + iR)\big)\right\},$$

$$(25) \qquad \begin{aligned} \bar{x} = +\frac{B}{2\pi}\Big\{&\Big[\frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 . l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big) + \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 . l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_2}{2}\Big) - l\Big(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\Big)\Big] \\ &+ \Big[\pm\frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 . (\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \pm \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 . (\pi \mp (\alpha_2+\vartheta)) \mp \Big(\pi \mp \Big(\frac{\pi}{2}+\vartheta\Big)\Big)\Big]\Big\}, \\ \bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\Big\{&+\Big[\frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 . l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big) + \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 . l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_2}{2}\Big) - l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{2}\Big)\Big] \\ &+ \Big[\mp\frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 . (\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \mp \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 . (\pi \mp (\alpha_2+\vartheta)) \pm (\pi \mp \vartheta)\Big]\Big\} \end{aligned}$$

Das obere Zeichen gilt in den 6 Gliedern, wenn resp. $(\alpha_1 + \vartheta)$, $(\alpha_2 + \vartheta)$, ϑ und $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$ zwischen 0 und 2π, das untere, wenn es zwischen 0 und -2π liegt. Bei einem Umlauf der Flüssigkeit in positiver Richtung nimmt ϑ von 0 bis -2π ab, die Zeichenwechsel treten also bei

$$0, \; -\alpha_1, \; -\frac{\pi}{2}, \; -\alpha_2, \; -2\pi \quad \text{ein.}$$

Wir wollen einige einfache Specialfälle untersuchen und durch Figuren eine ungefähre Vorstellung von dem Verlaufe der Flüssigkeitsbewegung zu geben versuchen. Nach dem Vorstehenden ist eine der beiden Grössen α_1 und α_2 beliebig zu wählen. Wegen der allgemeinen Relation

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 = 2\pi$$

muss dabei aber sein:

$$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < 2\pi.$$

1) Sei zunächst:

$$\alpha_1 = 0$$

so folgt:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A_1 = A_2 = B; \quad a_1 = a_2 = \frac{B}{R}, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

Die letzteren Werthe zeigen, dass der Streifen in der Ω-Ebene in beiden Blättern übereinanderfällt und ganz oberhalb der Φ-Axe liegt; der Verzweigungspunkt liegt auf der Begrenzung. Dieser Fall ist also nicht möglich, er giebt kein Problem des Stosses; wir haben uns vorzustellen, dass dabei die beiden unter $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander geneigten (normal zur z-Ebene gemessen unendlich dünnen) Strahlen übereinander hinwegfliessen ohne sich zu treffen.

Nimmt man α_1 unendlich klein, so wird:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \qquad A_1 = B_2(1 + \alpha_1),$$

$$A_2 = B_2(1 - \alpha_1), \qquad b_2 = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right) \alpha_1 B_2$$

der Verzweigungspunkt liegt also auf dem Streifen. Dieser Fall ist durch Fig. 3 angedeutet.

2) Setzt man

$$\alpha_2 = \pi$$

so wird $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, also α_1 nahe $0{,}2\pi$. Zugleich folgt:

$$A_1 = \frac{5}{3} B, \quad A_2 = \frac{1}{3} B,$$

$$a_1 = 0{,}92 \frac{B}{R}, \quad a_2 = 0{,}25 \frac{B}{R}, \quad b_1 = 0{,}75 \frac{B}{R}, \quad b_2 = 0{,}083 \frac{B}{R};$$

die letzteren Werthe sind nur angenährt. Die Gestalt des Streifens in der Ω-Ebene ist in Fig. 4 gegeben.

Was die Flüssigkeitsbewegung selbst anbetrifft so bietet der Umstand eine Schwierigkeit, dass wegen $\beta_2 = 2\pi$, $\alpha_2 = \pi$ zwei entgegengesetzte fliessende Strahlen sich parallel der x-Axe in's Unendliche erstrecken. Ihre gegenseitige Lage erhellt aus der Gleichung

$$\bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\left\{ l\left(\frac{\sin\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{2}}\right)^2 \mp \frac{4}{3}(\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \pm \frac{1}{3}(\pi \mp (\pi+\vartheta)) \pm (\pi \mp \vartheta) \right\}.$$

Hierin ist bereits benutzt, dass $\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$ ist.

Für $\vartheta = 0$ erhält man

$$\bar{y} = +\frac{B}{2\pi}\left\{ l(5) + \frac{(\pi - 4\alpha_1)}{3} + \pi(1 \mp 1) \right\}.$$

Der Strahl B liegt also im Unendlichen zwischen diesen beiden Ordinaten.

Für $\vartheta = \pi$ aber folgt:

$$\bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\left\{ l(2) - \frac{(\pi - 4\alpha_1)}{3} + \pi\left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Hiernach werden die beiden parallelen Strahlen etwa so liegen wie die Figur 4 angiebt, nämlich im Unendlichen mit ihren benachbarten Grenzen um etwa 0,37 B von einander entfernt.

3) Setzt man

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

so resulirt:

$$\alpha_2 = \frac{5\pi}{4},\quad A_1 = \frac{B}{2-\sqrt{2}} = 1{,}71\,B,\quad A_2 = B\,\frac{3-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2{,}29\,B,$$

$$a_1 = 0{,}855\,\frac{B}{R},\qquad a_2 = 0{,}145\,\frac{B}{R},$$

$$b_1 = 0{,}855\,\frac{B}{R},\qquad b_2 = 0{,}145\,\frac{B}{R}.$$

Der Streifen in der Ω-Ebene liegt, wie Fig. 5 zeigt, symmetrisch um die Φ-Axe und den Verzweigungspunkt. Die Flüssigkeitsstrahlen selbst sind in ihrer Gestalt leicht vorzustellen und ebenda angedeutet.

4). Setzt man

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$

so wird $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, α_1 also nahe $0{,}3\pi$, ferner

$$A_1 = \frac{5}{3}B,\qquad A_2 = \frac{1}{3}B,$$

$$a_1 = 0{,}75\,\frac{B}{R},\quad a_2 = 0{,}083\,\frac{B}{R},\quad b_1 = 0{,}92\,\frac{B}{R},\quad b_2 = 0{,}25\,\frac{B}{R}.$$

Der Fall ist das Gegenbild zu 2) wie die Fig. 6 weiter darlegt.

5) Setzt man endlich $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so erhält man den zweiten Grenzfall, welcher (1) entspricht. Es wird

$$\alpha_2 = 2\pi, \quad A_1 = A_2 = B, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = b_2 = \frac{B}{R}.$$

Fig. 7 giebt das zugehörige Bild.

Die singulären Stromcurven und die Stosscentren sind nur nach Schätzung eingezeichnet. Ihre genaue Bestimmung ist schwierig. Sie werden erhalten, wenn man in der Formel (25) für Ω den imaginären Theil gleich Null setzt und die dieser Gleichung genügenden Paare ϱ und ϑ in die allgemeinen Gleichungen (21) für x und y einführt. Eine Discussion der Gestalt dieser Curven dürfte ohne höchst umständliche Rechnungen selbst in den einfachsten Specialfällen nicht möglich sein.

Göttingen, Sommer 1885.