Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten.

Von

OSKAR PERRON in Tübingen.

---

§ 1.

Einleitung.

Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + p_2(x)y^{(m-2)} + \cdots + p_m(x)y = 0$$

mögen, abgesehen von denen, die etwa identisch verschwinden, die Form haben

$$(2) \qquad p_i(x) = x^{s_i}\mathfrak{P}_i(x),$$

wo die $\mathfrak{P}_i(x)$ Funktionen bedeuten, die für $x = 0$ regulär und von Null verschieden sind; die s_i seien irgend welche ganze Zahlen. Wenn der Nullpunkt eine Stelle der Bestimmtheit sein soll, wenn also *alle* Integrale sich im Nullpunkt bestimmt verhalten, d. h. linear aus Integralen der Form

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty}[c_{\nu 0} + c_{\nu 1}\log x + \cdots + c_{\nu k}(\log x)^k]x^{\varrho+\nu}$$

zusammengesetzt sein sollen, so muß durchweg $s_i \geqq -i$ sein, eine Bedingung, die zugleich notwendig und hinreichend ist; es ist dies der klassische Fall (Fuchs, Frobenius). Beim Beweis dieses Satzes verfährt man bekanntlich so, daß man zunächst für y eine Reihe der Form $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu}$ in die Differentialgleichung einsetzt. Dadurch erhält man eine algebraische Gleichung zur Berechnung von ϱ, und für die Koeffizienten D_ν eine Rekursionsformel, welche vielfach noch einige Anfangskoeffizienten willkürlich läßt. Nun kann man zeigen — und das ist der Schwerpunkt des ganzen Beweises —, daß die Reihe bei beliebiger Wahl der willkürlichen Anfangskoeffizienten in einem gewissen Gebiet um den Nullpunkt konvergiert und daher wirklich ein Integral darstellt.

Ist dagegen der Nullpunkt eine Stelle der Unbestimmtheit, so gibt es im allgemeinen gar kein Integral der obigen Form. Zwar lassen sich ebenfalls derartige Reihen angeben, welche der Differentialgleichung *formal* genügen; diese sind aber bei allgemeiner Wahl der willkürlichen Anfangselemente für alle x divergent. Es handelt sich nun um die Frage, ob nicht bei passender spezieller Wahl trotzdem Konvergenz erzielt werden kann. Herr Helge von Koch hat diese Aufgabe unter einer speziellen Annahme mittels unendlicher Determinanten behandelt und zum Abschluß gebracht, indem es ihm gelang, alle sich bestimmt verhaltenden Integrale aufzufinden.*) Die besondere Annahme besteht darin, daß in der Differentialgleichung der Koeffizient der zweithöchsten Ableitung verschwindet. Obwohl dies zwar immer durch eine geeignete Transformation erzielt werden kann, so hat diese Transformation doch im allgemeinen die Eigenschaft, daß sie Integrale, die sich bestimmt verhalten, in solche transformiert, die sich unbestimmt verhalten, so daß, wenn man die Aufgabe für die transformierte Gleichung gelöst hat, für die ursprüngliche im allgemeinen nichts gewonnen ist.

Ich bringe im folgenden das Problem zur völligen Erledigung, und zwar auf einem ganz andern Weg, der keinerlei spezielle Annahme erfordert und, wie ich glaube, auch einfacher ist. Es handelt sich dabei um einen weiteren Ausbau derjenigen Methode, die ich kürzlich auf Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten angewandt habe.**) Doch ist die gegenwärtige Arbeit von den angeführten unabhängig.

§ 2.

Die Rekursionsformel.

Bezeichnet man mit $-e$ die algebraisch kleinste der Zahlen

$$0,\ s_1+1,\ s_2+2,\cdots,\ s_m+m,$$

so ist $e \geqq 0$, und die Bedingung dafür, daß sich alle Integrale bestimmt verhalten, lautet einfach $e=0$. Da wir aber den Fall im Auge haben, daß der Nullpunkt eine Stelle der Unbestimmtheit ist, werden wir also

$$e > 0 \tag{3}$$

*) „Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires". Acta Mathematica 18 (1894).

**) Über lineare Differenzengleichungen". — „Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten". Beides Acta Mathematica 34 (1910).

voraussetzen.*) Multipliziert man dann die Differentialgleichung (1) mit x^{m+e}, so nimmt sie die „Normalform" an:

$$x^{m+e}y^{(m)} + x^{m-1}Q_1(x)y^{(m-1)} + x^{m-2}Q_2(x)y^{(m-2)} + \cdots + Q_m(x)y = 0,$$

wo nun die $Q_i(x)$ am Nullpunkt regulär sind und daselbst nicht sämtlich verschwinden. Setzt man demgemäß

$$Q_{m-i}(x) = A_{i,0} + A_{i,1}x + A_{i,2}x^2 + \cdots, \tag{4}$$

so geht die Differentialgleichung schließlich über in

$$x^{m+e}y^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} x^i(A_{i,0} + A_{i,1}x + A_{i,2}x^2 + \cdots)y^{(i)} = 0, \tag{5}$$

und von den Zahlen

$$A_{0,0},\ A_{1,0},\ \cdots,\ A_{m-1,0} \tag{6}$$

ist dabei mindestens eine von Null verschieden. Die linke Seite der Gleichung (5) wollen wir der Kürze halber mit $P(y)$ bezeichnen.

Setzt man

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu},$$

so kommt

$$A_{i,h}x^{i+h}y^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu A_{i,h}(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1)\cdots(\varrho+\nu-i+1)x^{\varrho+\nu+h}$$

$$= \sum_{\nu=h}^{\infty} D_{\nu-h}A_{i,h}(\varrho+\nu-h)(\varrho+\nu-h-1)\cdots(\varrho+\nu-h-i+1)x^{\varrho+\nu}.$$

Folglich, indem man dies in den Differentialausdruck $P(y)$ einführt:

$$P\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu}\Big) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(D_\nu f_0(\varrho+\nu) + D_{\nu-1}f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots \\ + D_0 f_\nu(\varrho))x^{\varrho+\nu}, \tag{7}$$

wobei

$$f_h(\varrho) = A_{0,h} + A_{1,h}\varrho + A_{2,h}\varrho(\varrho-1) + \cdots + A_{m-1,h}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+2) \\ \text{für}\quad h \neq e, \tag{8}$$

$$f_e(\varrho) = A_{0,e} + A_{1,e}\varrho + \cdots + A_{m-1,e}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+2) \\ + \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+1). \tag{9}$$

Es ist also $f_e(\varrho)$ ein Polynom m^{ten} Grades von ϱ, während die andern $f_h(\varrho)$ höchstens vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad sind. Einzelne $f_h(\varrho)$ können auch

*) Eine Verwechslung dieser ganzen Zahl e mit der Basis der natürlichen Logarithmen, die in der ganzen Arbeit nicht vorkommt, erscheint ausgeschlossen.

identisch verschwinden; jedenfalls ist aber $f_0(\varrho)$ nicht identisch Null, weil die Zahlen (6) nicht alle verschwinden. Bezeichnet man den Grad von $f_0(\varrho)$ mit $m-j$, so ist also

$$(10)\qquad 1 \leqq j \leqq m;$$

nach Herrn Thomé (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 75) heißt j der charakteristische Index.

Wenn $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu}$ ein Integral der Differentialgleichung sein soll, so muß die rechte Seite von (7) sich identisch auf Null reduzieren; daraus ergibt sich eine Bedingungsgleichung für die Zahl ϱ, sowie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten D_ν. Wir wollen jedoch vorläufig nicht verlangen, daß y ein Integral von (5) ist; vielmehr wollen wir den Exponenten ϱ als variabel annehmen, wobei wir ihn aber auf einen gewissen gleich näher zu bezeichnenden Variabilitätsbereich beschränken. Sodann fordern wir zunächst nur, daß die Koeffizienten von $x^{\varrho+\nu}$ auf der rechten Seite der Gleichung (7) *von einer gewissen Stelle an*, sagen wir für $\nu \geqq N$ verschwinden, wo auch die Zahl N noch genauer zu fixieren ist. Dadurch geht (7) über in:

$$(11)\qquad P\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu}\Big) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \big(D_\nu f_0(\varrho+\nu) + D_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + D_0 f_\nu(\varrho)\big)\, x^{\varrho+\nu},$$

und für die Koeffizienten D_ν ergibt sich die Rekursionsformel:

$$(12)\qquad D_\nu f_0(\varrho+\nu) + D_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + D_0 f_\nu(\varrho) = 0 \qquad (\nu = N, N+1, N+2, \cdots).$$

Als Variabilitätsbereich für die Größe ϱ wählen wir irgend ein ganz im Endlichen gelegenes zweidimensionales Gebiet, welches die $m-j$ Nullstellen der Funktion $f_0(\varrho)$ sämtlich im Innern enthält, am einfachsten einen Kreis von genügend großem Radius mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt; dieses Gebiet, zu dem wir seine Begrenzung hinzurechnen, nennen wir T. Die Zahl N wählen wir dann derart, daß $f_0(\varrho+\nu)$ für $\nu \geqq N$ im ganzen Gebiet T von Null verschieden wird. Dazu genügt es zum Beispiel, wenn wir N mindestens gleich dem doppelten Radius des soeben genannten Kreises annehmen. Doch behalten wir uns vor, nötigenfalls N noch größer zu wählen, wodurch ja die bis jetzt allein verlangte Eigenschaft, daß $f_0(\varrho+\nu) \neq 0$ für $\nu \geqq N$ ist, nicht verloren geht.

§ 3.

Die Transformation der Rekursionsformel.

Nach der soeben getroffenen Festsetzung über die Zahl N ist in der Rekursionsformel (12) der Koeffizient von D_ν im ganzen Gebiet T von Null verschieden. Indem man durch ihn dividiert, geht (12) über in

$$D_\nu + a_1^{(\nu)} D_{\nu-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu-2} + \cdots + a_\nu^{(\nu)} D_0 = 0 \qquad (\nu \geqq N), \tag{13}$$

wobei

$$a_{\nu-\lambda}^{(\nu)} = \frac{f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)}{f_0(\varrho+\nu)} \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, \nu-1). \tag{14}$$

Die Gleichung (13) läßt die N Größen $D_0, D_1, \cdots, D_{N-1}$ ganz willkürlich; die andern D_ν sind dann eindeutig bestimmt. Unsere Hauptfrage lautet nun: *„Kann man die N willkürlichen Größen derart wählen, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu}$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat?“*

Wir werden diese Frage im nächsten Paragraphen bejahen können; zur Vorbereitung müssen wir zunächst die Koeffizienten $a_{\nu-\lambda}^{(\nu)}$ in geeigneter Weise abschätzen. Da die Funktionen $Q_i(x)$ am Nullpunkt regulär sein sollen, so haben die Reihen (4) sämtlich einen von Null verschiedenen Konvergenzradius. Sei daher R eine positive Zahl, derart, daß diese Reihen für $|x| \leqq R$ absolut konvergieren; dabei darf für R jede positive Zahl gewählt werden, die (beliebig wenig) kleiner ist als der kleinste Konvergenzradius der Reihen (4); sind alle Konvergenzradien unendlich, so darf R beliebig groß sein. Da die Reihen (4) dann für $|x| = R$ absolut konvergieren, so ist

$$|A_{ih}| < \frac{M}{R^h},$$

wo M von h nicht abhängt und auch von i unabhängig angenommen werden kann, weil ja i auf eine endliche Anzahl verschiedener Werte beschränkt ist.

Nach (8) ist daher für $\nu - \lambda \neq e$:

$$\begin{aligned}|f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)| &\leqq \sum_{i=0}^{m-1} |A_{i,\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)(\varrho+\lambda-1)\cdots(\varrho+\lambda-i+1)| \\ &< \frac{M}{R^{\nu-\lambda}} m(|\varrho| + \lambda + m)^{m-1}.\end{aligned}$$

Bedeutet also P eine Zahl, die größer ist als alle Werte ϱ des Gebietes T, so folgt auch

$$|f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)| < \frac{Mm}{R^{\nu-\lambda}}(\mathsf{P}+\lambda+m)^{m-1}$$
$$< \frac{L(\lambda+1)^{m-1}}{R^{\nu-\lambda}} \qquad (\nu-\lambda \neq e),$$

wo L eine vielleicht sehr große, aber von ν, λ, ϱ unabhängige Zahl bedeutet. Dagegen wird nach (9):

$$|f_e(\varrho+\nu-e)| = |(\varrho+\nu-e)(\varrho+\nu-e-1)\cdots(\varrho+\nu-e-m+1)$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1} A_{i,e}(\varrho+\nu-e)\cdots(\varrho+\nu-e-i+1)|$$
$$> |(\varrho+\nu-e)(\varrho+\nu-e-1)\cdots(\varrho+\nu-e-m+1)|$$
$$-\frac{M}{R^e}m(|\varrho|+\nu+m)^{m-1}$$
$$> (\nu-e-m-\mathsf{P})^m - \frac{Mm}{R^e}(\mathsf{P}+\nu+m)^{m-1}.$$

Für genügend große ν wird daher

$$|f_e(\varrho+\nu-e)| > \frac{1}{2}\nu^m.$$

Ferner, da $f_0(\varrho)$ vom Grad $m-j$ ist:

$$0 < k\nu^{m-j} < |f_0(\varrho+\nu)| < K\nu^{m-j},$$

wo die Zahlen k, K von ν und auch wieder von ϱ unabhängig sind. Wir denken uns jetzt, wenn dies nicht schon von vornherein der Fall sein sollte, die Zahl N so groß gewählt, daß für $\nu \geqq N$ diese letzten Ungleichungen alle erfüllt sind. Es ergibt sich dann

$$(15) \qquad |a_{\nu-\lambda}^{(\nu)}| = \left|\frac{f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)}{f_0(\varrho+\nu)}\right| < G\frac{(\lambda+1)^{m-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}} \qquad (\text{für } \nu-\lambda \neq e),$$

$$(16) \qquad |a_e^{(\nu)}| = \left|\frac{f_e(\varrho+\nu-e)}{f_0(\varrho+\nu)}\right| > \frac{\nu^j}{G},$$

wo G die größere der Zahlen $\frac{L}{k}$, $2K$ bedeutet, *sodaß also G von ν, λ, ϱ unabhängig ist.* Man beachte auch, daß G ungeändert bleiben darf, wenn wir nachträglich etwa gezwungen werden, die Zahl N noch zu vergrößern.

Nach diesen Vorbereitungen suchen wir der Rekursionsformel (13) die folgende Gestalt zu geben:

$$(17) \quad \begin{cases} D_\nu + c_1^{(\nu-e)} D_{\nu-1} + \cdots + c_e^{(\nu-e)} D_{\nu-e} \\ \quad + b_1^{(\nu-e)}\left(D_{\nu-1} + c_1^{(\nu-e-1)} D_{\nu-2} + \cdots + c_e^{(\nu-e-1)} D_{\nu-e-1}\right) \\ \quad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad + b_{\nu-e}^{(\nu-e)}\left(D_e + c_1^{(0)} D_{e-1} + \cdots + c_e^{(0)} D_0\right) = 0 \end{cases} \quad (\nu \geqq N);$$

also, wenn zur Abkürzung

(18) $$D_\nu + c_1^{(\nu-e)} D_{\nu-1} + c_2^{(\nu-e)} D_{\nu-2} + \cdots + c_e^{(\nu-e)} D_{\nu-e} = E_{\nu-e} \quad (\nu = e, e+1, e+2, \ldots)$$

gesetzt wird:

(19) $$E_{\nu-e} + b_1^{(\nu-e)} E_{\nu-e-1} + b_2^{(\nu-e)} E_{\nu-e-2} + \cdots + b_{\nu-e}^{(\nu-e)} E_0 = 0, \quad (\nu \geqq N).$$

Zur Übereinstimmung von (17) mit (13) ist erforderlich:

(20) $$\begin{cases} c_1^{(\nu-e)} + b_1^{(\nu-e)} = a_1^{(\nu)}, \\ c_2^{(\nu-e)} + b_1^{(\nu-e)} c_1^{(\nu-e-1)} + b_2^{(\nu-e)} = a_2^{(\nu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_e^{(\nu-e)} + b_1^{(\nu-e)} c_{e-1}^{(\nu-e-1)} + \cdots + b_{e-1}^{(\nu-e)} c_1^{(\nu-2e+1)} + b_e^{(\nu-e)} = a_e^{(\nu)}; \end{cases}$$

(21) $$\begin{cases} b_1^{(\nu-e)} c_e^{(\nu-e-1)} + b_2^{(\nu-e)} c_{e-1}^{(\nu-e-2)} + \cdots + b_{e+1}^{(\nu-e)} = a_{e+1}^{(\nu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{\nu-e-1}^{(\nu-e)} c_e^{(1)} + b_{\nu-e}^{(\nu-e)} c_{e-1}^{(0)} = a_{\nu-1}^{(\nu)} \\ b_{\nu-e}^{(\nu-e)} c_e^{(0)} = a_\nu^{(\nu)}. \end{cases}$$

Führt man noch die Größen $c_0^{(\nu)} = 1$ ein, so schreiben sich die Gleichungen (20) folgendermaßen:

(20a) $$c_h^{(\nu-e)} = a_h^{(\nu)} - \sum_{i=1}^{h} b_i^{(\nu-e)} c_{h-i}^{(\nu-e-i)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, e);$$

ferner die Gleichungen (21):

(21a) $$b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)} c_e^{(\lambda)} = a_{\nu-\lambda}^{(\nu)} - \sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(\lambda, e)} b_{\nu-e-\lambda+i}^{(\nu-e)} c_{e-i}^{(\lambda-i)} \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, \nu - e - 1).$$

Da dies nur für $\nu \geqq N$ gilt, so bleiben die c, deren oberer Index kleiner als $N - e$ ist, ganz willkürlich; doch muß stets $c_e^{(\lambda)} \neq 0$ sein. Dann lassen sich nämlich aus (21a), wenn man darin $\nu = N$, $\lambda = 0, 1, \cdots, N - e - 1$ setzt, der Reihe nach die Größen

$$b_{N-e}^{(N-e)}, \; b_{N-e-1}^{(N-e)}, \cdots, b_1^{(N-e)}$$

berechnen. Sodann aus (20a) auch

$$c_1^{(N-e)}, \; c_2^{(N-e)}, \cdots, c_e^{(N-e)}.$$

Wenn dabei $c_e^{(N-e)} \neq 0$ wird, so kann man nun aus (21a) für $\nu = N + 1$ die Größen b mit dem obern Index $N - e + 1$, sodann aus (20a) auch die c mit dem obern Index $N - e + 1$ berechnen. Dieses Rekursionsverfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen, sofern nur die daraus hervorgehenden $c_e^{(\lambda)}$

stets von Null verschieden ausfallen. Mit diesem Vorbehalt läßt sich also die Übereinstimmung von (17) mit (13) erzielen. Wenn man dabei die willkürlich gebliebenen c als in T reguläre Funktionen von ϱ wählt, so sieht man weiter, daß alle $c_h^{(\nu)}$ und $b_h^{(\nu)}$ ebenfalls in T reguläre Funktionen von ϱ werden.

Wir wollen nun weiter beweisen, daß man bei passender Wahl der willkürlich gebliebenen c, d. h. also derjenigen c, deren oberer Index kleiner als $N-e$ ist, es dahin bringen kann, daß im ganzen Gebiet T stets $c_e^{(\lambda)} \neq 0$ ausfällt, und daß außerdem die Ungleichungen gelten:

$$\left| b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)} \right| < 4\,G^2 \frac{(\lambda+1)^{m-1-j}}{R^{\nu-\lambda}\,\nu^{m-j}}, \tag{22}$$

$$\left| c_e^{(\nu-e)} \right| > \frac{1}{2\,G}(\nu-e+1)^j\,, \tag{23}$$

$$\left| c_h^{(\nu-e)} \right| < \frac{3\,G}{R^h}(\nu-e+1)^{j-1} \qquad (h=0,1,\cdots,e-1). \tag{24}$$

Zu dem Zweck bemerken wir zunächst, daß die Ungleichung (24) für $h=0$ selbstverständlich ist, weil definitionsgemäß $c_0^{(\nu-e)}=1$ ist, und weil die Zahl G ihrer Bedeutung nach größer als $\frac{1}{3}$ gedacht werden kann. Wir wählen dann die willkürlichen Größen $c_h^{(0)}, c_h^{(1)}, \cdots, c_h^{(N-e-1)}$ irgendwie als in T reguläre Funktionen von ϱ, am einfachsten als Konstanten, doch mit der Einschränkung, daß

$$\left| c_e^{(\nu-e)} \right| > \left(\frac{1}{2\,G}+\frac{3\,e\,G}{R^e}\right)(\nu-e+1)^j \qquad (\nu=e,e+1,\cdots,N-1) \tag{25}$$

$$\left| c_h^{(\nu-e)} \right| < \frac{3\,G}{R^h}(\nu-e+1)^{j-1} \qquad (h<e;\nu=e,e+1,\cdots,N-1) \tag{26}$$

ist. Dann sind die zu beweisenden Ungleichungen für $\nu<N$ jedenfalls richtig;*) ihre Allgemeingültigkeit beweisen wir durch vollständige Induktion. Nehmen wir also an, die Ungleichungen (23), (24) seien für kleinere Werte von ν bereits als richtig erwiesen, so folgt zunächst aus der letzten Gleichung (21):

$$\left| b_{\nu-e}^{(\nu-e)} \right| = \frac{\left| a_\nu^{(\nu)} \right|}{\left| c_e^{(0)} \right|};$$

also, indem wir die rechte Seite nach (15) und (25) abschätzen:

$$\left| b_{\nu-e}^{(\nu-e)} \right| < \frac{G}{R^\nu\,\nu^{m-j}}\,\frac{1}{\frac{1}{2\,G}+\frac{3\,e\,G}{R^e}} < \frac{2\,G^2}{R^\nu\,\nu^{m-j}} < \frac{4\,G^2}{R^\nu\,\nu^{m-j}}.$$

*) Die Ungleichung (22) fällt für $\nu<N$ natürlich weg, weil die $b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)}$ in (17) nur für $\nu \geqq N$ eine Bedeutung haben.

Demnach ist die Ungleichung (22) für $\lambda = 0$ sicher zutreffend. Wir beweisen ihre Allgemeingültigkeit bei festgehaltenem ν, indem wir annehmen, für kleinere Werte von λ sei sie bereits als richtig erkannt. Dann folgt aus (21 a):

$$\left|b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)}\right| \leqq \frac{\left|a_{\nu-\lambda}^{(\nu)}\right| + \sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(\lambda, e)}\left|b_{\nu-e-\lambda+i}^{(\nu-e)} c_{e-i}^{(\lambda-i)}\right|}{\left|c_e^{(\lambda)}\right|}.$$

Weil hier $\lambda < \nu - e$ ist, können die c bereits nach den Ungleichungen (23), (24) abgeschätzt werden; ferner die b der rechten Seite, weil ihr unterer Index größer als $\nu - e - \lambda$ ist, bereits nach (22). Dadurch ergibt sich:

$$(27)\quad \left|b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)}\right| < \frac{G\dfrac{(\lambda+1)^{m-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}} + \sum_{i=1}^{\mathrm{Min}(\lambda, e)} 4\,G^2 \dfrac{(\lambda-i+1)^{m-1-j}}{R^{\nu-\lambda+i}\nu^{m-j}} \dfrac{3\,G}{R^{e-i}}(\lambda-i+1)^{j-1}}{\dfrac{1}{2\,G}(\lambda+1)^j}.$$

Für $\lambda < N - e$ darf der Nenner auf der rechten Seite wegen (25) sogar durch $\left(\frac{1}{2\,G} + \frac{3\,e\,G}{R^e}\right)(\lambda+1)^j$ ersetzt werden; daher kommt zunächst für $\lambda < N - e$:

$$\left|b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)}\right| < \frac{G\dfrac{(\lambda+1)^{m-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}} + 12\,G^3\dfrac{1}{R^{\nu-\lambda+e}\nu^{m-j}}\sum_{i=1}^{e}(\lambda+1)^{m-2}}{\left(\dfrac{1}{2\,G} + \dfrac{3\,e\,G}{R^e}\right)(\lambda+1)^j}$$

$$= G\frac{(\lambda+1)^{m-1-j}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}} \frac{1 + \dfrac{12\,G^2 e}{R^e(\lambda+1)}}{\dfrac{1}{2\,G} + \dfrac{3\,G\,e}{R^e}}$$

$$< G\frac{(\lambda+1)^{m-j-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}}\, 4\,G \frac{1 + \dfrac{12\,G^2 e}{R^e}}{2 + \dfrac{12\,G^2 e}{R^e}} < 4\,G^2\frac{(\lambda+1)^{m-j-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}}.$$

Für $\lambda < N - e$ ist also (22) richtig. Für $\lambda \geqq N - e$ aber folgt ebenso aus (27):

$$\left|b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)}\right| < G\frac{(\lambda+1)^{m-j-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}} \frac{1 + \dfrac{12\,G^2 e}{R^e(\lambda+1)}}{\dfrac{1}{2\,G}}$$

$$\leqq 2\,G^2\frac{(\lambda+1)^{m-j-1}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}}\left(1 + \frac{12\,G^2 e}{R^e(N-e+1)}\right).$$

Daher ist Ungleichung (22) allgemein erfüllt, da wir die Zahl N von vornherein so groß wählen können, daß

$$\frac{12\,G^2 e}{R^e(N-e+1)} < 1 \tag{28}$$

wird. Aus (20a) folgt dann für $h = e$:

$$\left| c_e^{(\nu-e)} \right| \geqq \left| a_e^{(\nu)} \right| - \sum_{i=1}^{e} \left| b_i^{(\nu-e)} c_{e-i}^{(\nu-e-i)} \right|.$$

Hier dürfen aber nach dem soeben Bewiesenen die b der rechten Seite bereits nach (22) abgeschätzt werden; ebenso die c, da ihr oberer Index kleiner als $\nu - e$ ist, nach (24). Dadurch ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left| c_e^{(\nu-e)} \right| &> \frac{\nu^j}{G} - \sum_{i=1}^{e} 4\,G^2 \frac{(\nu-e-i+1)^{m-1-j}}{R^{i+e}\,\nu^{m-j}} \, \frac{3\,G}{R^{e-i}} (\nu-e-i+1)^{j-1} \\
&> \frac{\nu^j}{G} - \frac{12\,G^3}{R^{2e}\,\nu^{m-j}} \sum_{i=1}^{e} \nu^{m-2} \\
&= \nu^j \left(\frac{1}{G} - \frac{12\,G^3 e}{R^{2e}\,\nu^2} \right) \geqq \nu^j \left(\frac{1}{G} - \frac{12\,G^3 e}{R^{2e} N^2} \right).
\end{aligned}$$

Daher ist auch die Ungleichung (23) erfüllt, wenn nur N so groß gewählt worden ist, daß

$$\frac{12\,G^3 e}{R^{2e} N^2} < \frac{1}{2\,G} \tag{29}$$

wird. Endlich folgt noch aus (20a) für $0 < h < e$

$$\begin{aligned}
\left| c_h^{(\nu-e)} \right| &\leqq \left| a_h^{(\nu)} \right| + \sum_{i=1}^{h} \left| b_i^{(\nu-e)} c_{h-i}^{(\nu-e-i)} \right| \\
&< G \frac{(\nu-h+1)^{m-1}}{R^h\,\nu^{m-j}} + \sum_{i=1}^{h} 4\,G^2 \frac{(\nu-e-i+1)^{m-1-j}}{R^{i+e}\,\nu^{m-j}} \, \frac{3\,G}{R^{h-i}} (\nu-e-i+1)^{j-1} \\
&< G \frac{\nu^{j-1}}{R^h} + \frac{12\,G^3}{R^{e+h}\,\nu^{m-j}} h \nu^{m-2} \\
&< \frac{\nu^{j-1}}{R^h} \left(G + \frac{12\,G^3 e}{R^e\,\nu} \right) \\
&= \frac{(\nu-e+1)^{j-1}}{R^h} \left(\frac{\nu}{\nu-e+1} \right)^{j-1} \left(G + \frac{12\,G^3 e}{R^e\,\nu} \right) \\
&\leqq \frac{(\nu-e+1)^{j-1}}{R^h} \left(\frac{N}{N-e+1} \right)^{j-1} \left(G + \frac{12\,G^3 e}{R^e N} \right).
\end{aligned}$$

Daher ist auch die Ungleichung (24) richtig, sofern nur

$$\left(\frac{N}{N-e+1}\right)^{j-1} < \frac{3}{2}, \tag{30}$$

$$\frac{12\,G^3 e}{R^e N} < G \tag{31}$$

ist. Wir denken uns daher die Zahl N von vornherein so groß gewählt, daß auch diese letzten Forderungen noch erfüllt sind. Dann läßt sich das soeben Bewiesene folgendermaßen aussprechen:

Die Rekursionsformel (13) *läßt sich in die Gestalt* (17) *transformieren, und zwar derart, daß die Koeffizienten b, c den Ungleichungen* (22), (23), (24) *genügen. Außerdem sind*, wie wir bereits bemerkten, *die b, c in T reguläre Funktionen von ϱ.*

§ 4.

Die ausgezeichneten Lösungen der Rekursionsformel.

Wir kehren nun zur Rekursionsformel (19) zurück. Diese läßt die $N-e$ Größen $E_0, E_1, \cdots, E_{N-e-1}$ ganz willkürlich; wir wählen sie irgendwie als in T reguläre Funktionen von ϱ. Dann sind vermöge (19) alle E_ν in T regulär. Durch die Substitution

$$E_\nu = \frac{E'_\nu}{(\vartheta E)^\nu}, \tag{32}$$

wo ϑ eine beliebige, aber im folgenden unverändert festzuhaltende Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet, geht (19) über in

$$\begin{aligned} E'_{\nu-e} + b_1^{(\nu-e)}\vartheta R E'_{\nu-e-1} + b_2^{(\nu-e)}(\vartheta R)^2 E'_{\nu-e-2} + \cdots \\ \cdots + b_{\nu-e}^{(\nu-e)}(\vartheta R)^{\nu-e} E_0' = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Also ist unter Berücksichtigung von (22)

$$\begin{aligned} |E'_{\nu-e}| &\leqq \sum_{\lambda=0}^{\nu-e-1} \left| b_{\nu-e-\lambda}^{(\nu-e)} (\vartheta R)^{\nu-e-\lambda} E'_\lambda \right| \\ &< \sum_{\lambda=0}^{\nu-e-1} 4\,G^2 \frac{(\lambda+1)^{m-1-j}}{R^{\nu-\lambda}\nu^{m-j}} \vartheta^{\nu-e-\lambda} R^{\nu-e-\lambda} |E'_\lambda| \\ &= \frac{4\,G^2}{R^e \vartheta^e \nu^{m-j}} \sum_{\lambda=0}^{\nu-e-1} (\lambda+1)^{m-1-j} \vartheta^{\nu-\lambda} |E'_\lambda| \\ &\leqq \frac{4\,G^2}{(\vartheta R)^e \nu^{m-j}} \sum_{\lambda=0}^{\nu-e-1} (\lambda+1)^{m-1-j} \vartheta^{\nu-\lambda} \cdot \operatorname*{Max}_{\lambda=0}^{\nu-e-\lambda} |E'_\lambda|. \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\frac{1}{\nu^{m-j}}\sum_{\lambda=0}^{\nu-e-1}(\lambda+1)^{m-1-j}\vartheta^{\nu-\lambda}=\varphi_\nu, \tag{34}$$

so kommt

$$|E'_{\nu-e}|<\frac{4G^2}{(\vartheta R)^e}\varphi_\nu \operatorname*{Max}_{\lambda=0}^{\nu-e-1}|E'_\lambda|. \tag{35}$$

Nun läßt sich aber φ_ν wegen $j\leqq m$ noch in folgender Weise abschätzen, wenn k irgend eine zwischen 0 und $\nu-e-1$ gelegene Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned}\varphi_\nu &\leqq \sum_{\lambda=0}^{\nu-e-1}\frac{(\lambda+1)^{m-1-j}\vartheta^{\nu-\lambda}}{(\lambda+1)^{m-j}}\\ &=\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{\vartheta^{\nu-\lambda}}{\lambda+1}+\sum_{\lambda=k+1}^{\nu-e-1}\frac{\vartheta^{\nu-\lambda}}{\lambda+1}\\ &<\vartheta^{\nu-k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)+\vartheta^{e+1}\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{\nu-e}\right)\\ &<\vartheta^{\nu-k}(1+\log(k+1))+\vartheta^{e+1}\log\frac{\nu-e}{k+1}.\end{aligned}$$

Hier kann k irgend eine ganze Zahl im Intervall von 0 bis $\nu-e-1$ bedeuten; wählt man für k speziell diejenige ganze Zahl, welche durch die Ungleichungen

$$\nu-\sqrt{\nu}+1>k\geqq\nu-\sqrt{\nu}$$

eindeutig bestimmt ist und welche ja für große ν ($\nu>(e+2)^2$) gewiß in dem verlangten Intervall liegt, so kommt

$$\varphi_\nu<\vartheta^{\sqrt{\nu}-1}(1+\log\nu)+\vartheta^{e+1}\log\frac{\nu}{\nu-\sqrt{\nu}}.$$

Infolgedessen strebt φ_ν für $\lim\nu=\infty$ der Null zu, sodaß von einem gewissen ν an jedenfalls φ_ν kleiner ist als $\frac{(\vartheta R)^e}{4G^2}$. Und zwar läßt sich eine Zahl N_1 angeben, derart, daß für $\nu\geqq N_1$ dies im ganzen Gebiet T statthat, da ja φ_ν überhaupt nicht von dem speziellen Wert ϱ in T abhängt. Aus (35) folgt daher für $\nu\geqq N_1$:

$$|E'_{\nu-e}|<\operatorname*{Max}_{\lambda=0}^{\nu-e-1}|E'_\lambda|.$$

Daraus folgt aber ohne weiteres für alle ν

$$|E'_\nu|\leqq\operatorname*{Max}_{\lambda=0}^{N_1-e-1}|E'_\lambda|.$$

Da hier die N_1-e Größen E'_λ auf der rechten Seite als in T reguläre Funktionen von ϱ ein gewisses Maximum nicht überschreiten können, so ergibt sich, daß die E_ν' absolut unter einer Schranke H bleiben, die sowohl von ν als von der Stelle ϱ des Gebietes T unabhängig ist. Aus (32) folgt dann

$$|E_\nu| < \frac{H}{(\vartheta R)^\nu}. \tag{36}$$

Die Gleichung (18) suchen wir nun durch folgenden Ansatz aufzulösen:

$$D_{\nu-e} = p_0^{(\nu-e)} E_{\nu-e} + p_1^{(\nu-e)} E_{\nu-e+1} + p_2^{(\nu-e)} E_{\nu-e+2} + \cdots, \tag{37}$$
$$\nu = e, e+1, e+2, \cdots.$$

Es ist dann auch

$$\text{(37a)} \begin{cases} D_{\nu-e+1} = p_0^{(\nu-e+1)} E_{\nu-e+1} + p_1^{(\nu-e+1)} E_{\nu-e+2} + p_2^{(\nu-e+1)} E_{\nu-e+3} + \cdots, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ D_\nu = p_0^{(\nu)} E_\nu + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2} + \cdots. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen (37), (37a) der Reihe nach mit $c_e^{(\nu-e)}, c_{e-1}^{(\nu-e)}, \cdots, c_1^{(\nu-e)}, 1$, und addiert sie dann, so muß wegen (18) auf der linken Seite der Wert $E_{\nu-e}$ herauskommen. Damit auch die rechte Seite sich auf $E_{\nu-e}$ reduziert, werden wir die $p_\lambda^{(\nu)}$ den folgenden hinreichenden Bedingungen unterwerfen:

$$\text{(38)} \begin{cases} c_e^{(\nu-e)} p_0^{(\nu-e)} = 1, \\ c_e^{(\nu-e)} p_1^{(\nu-e)} + c_{e-1}^{(\nu-e)} p_0^{(\nu-e+1)} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad, \\ c_e^{(\nu-e)} p_\lambda^{(\nu-e)} + c_{e-1}^{(\nu-e)} p_{\lambda-1}^{(\nu-e+1)} + \cdots + c_1^{(\nu-e)} p_{\lambda-e+1}^{(\nu-1)} + p_{\lambda-e}^{(\nu)} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad. \end{cases}$$

Daraus lassen sich bei beliebigem ν alle $p_\lambda^{(\nu-e)}$ für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ sukzessiv berechnen, weil nach (23) ja alle $c_e^{(\nu-e)}$ von Null verschieden sind. Wenn dann die Reihen (37) für $\nu = e, e+1, e+2, \cdots$ konvergieren, so werden sie eine Lösung der Gleichung (18), also auch von (17), oder, was dasselbe sagt, von (13) darstellen.

Um nun die Konvergenz zu beweisen, müssen wir ein zweites Gleichungssystem für die $p_\lambda^{(\nu)}$ aufstellen. Nach (18) ist

$$\begin{array}{l|l} D_\nu + c_1^{(\nu-e)} D_{\nu-1} + \cdots + c_e^{(\nu-e)} D_{\nu-e} = E_{\nu-e} & p_0^{(\nu-e)}, \\ D_{\nu+1} + c_1^{(\nu-e+1)} D_\nu + \cdots + c_e^{(\nu-e+1)} D_{\nu-e+1} = E_{\nu-e+1} & p_1^{(\nu-e)}, \\ D_{\nu+2} + c_1^{(\nu-e+2)} D_{\nu+1} + \cdots + c_e^{(\nu-e+2)} D_{\nu-e+2} = E_{\nu-e+2} & p_2^{(\nu-e)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad. \end{array}$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir der Reihe nach mit den beigeschriebenen Faktoren und addieren sie dann. Dabei wird die rechte

Seite nach (37) gleich $D_{\nu-e}$. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß sich auch die linke Seite auf $D_{\nu-e}$ reduziert, besteht darin, daß die $p_\lambda^{(\nu-e)}$ den Gleichungen genügen:

$$
(39)\quad \begin{cases}
c_e^{(\nu-e)} p_0^{(\nu-e)} = 1\,, \\
c_e^{(\nu-e+1)} p_1^{(\nu-e)} + c_{e-1}^{(\nu-e)} p_0^{(\nu-e)} = 0\,, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
c_e^{(\nu-e+\lambda)} p_\lambda^{(\nu-e)} + c_{e-1}^{(\nu-e+\lambda-1)} p_{\lambda-1}^{(\nu-e)} + \cdots + c_1^{(\nu-2e+\lambda+1)} p_{\lambda-e+1}^{(\nu-e)} + p_{\lambda-\nu}^{(\nu-e)} = 0\,, \\
\cdot\;\cdot
\end{cases}
$$

Nun ist unschwer einzusehen, daß die Gleichungssysteme (38) und (39) völlig äquivalent sind, daß also die aus (38) berechneten $p_\lambda^{(\nu)}$ ganz von selbst auch das System (39) befriedigen. Man braucht zu dem Zweck nur beide Systeme mittels Determinanten nach $p_\lambda^{(\nu-e)}$ aufzulösen; es kommt dann beidemal das gleiche Resultat heraus. Ich habe übrigens in § 3 meiner zitierten ersten Arbeit in den Acta Mathematica die betreffenden Formeln angegeben, worauf hier verwiesen sei.

Nun folgt zunächst aus (39), daß die $p_\lambda^{(\nu-e)}$ in T reguläre Funktionen von ϱ sind. Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf (23)

$$
(40)\qquad \left|p_0^{(\nu-e)}\right| = \frac{1}{\left|c_e^{(\nu-e)}\right|} < \frac{2G}{(\nu-e+1)^j} < 2G\,.
$$

Wir beweisen nun allgemein

$$
(41)\qquad \left|p_\lambda^{(\nu-e)}\right| < 2GJ^\lambda(\lambda!)^{-\frac{1}{e}}\,,
$$

wobei J eine noch zu bestimmende, von ν, λ, ϱ unabhängige Zahl ist. In der Tat gilt diese Ungleichung wegen (40) sicher für $\lambda = 0$. Nehmen wir aber an, sie gelte bereits für alle kleineren Werte von λ, so folgt aus der allgemeinen Gleichung (39)

$$
\left|p_\lambda^{(\nu-e)}\right| = \frac{\left|\sum\limits_{h=\mathrm{Max}(0,e-\lambda)}^{e-1} c_h^{(\nu+\lambda+h-2e)} p_{\lambda-e+h}^{(\nu-e)}\right|}{\left|c_e^{(\nu-e+\lambda)}\right|}
$$

$$
< \frac{\sum\limits_{h=\mathrm{Max}(0,e-\lambda)}^{e-1} \left|c_h^{(\nu+\lambda+h-2e)}\right| 2GJ^{\lambda-e+h}[(\lambda-e+h)!]^{-\frac{1}{e}}}{\left|c_e^{(\nu-e+\lambda)}\right|}\,.
$$

Schätzt man die c wieder nach (23) und (24) ab, so kommt:

$$\left|p_\lambda^{(\nu-e)}\right|$$

$$< \frac{\sum\limits_{h=\mathrm{Max}\,(0,e-\lambda)}^{e-1} \frac{3G}{R^h}(\nu+\lambda+h-2e+1)^{j-1} 2GJ^{\lambda-e+h}(\lambda!)^{-\frac{1}{e}}[\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-e+h+1)]^{\frac{1}{e}}}{\frac{1}{2G}(\nu+\lambda-e+1)^j}$$

$$< \frac{\sum\limits_{h=0}^{e-1} \frac{6G^2}{R^h}(\nu+\lambda-e+1)^{j-1} J^{\lambda-e+h}(\lambda!)^{-\frac{1}{e}}(\lambda+\nu-e+1)^{\frac{e-h}{e}}}{\frac{1}{2G}(\nu+\lambda-e+1)^j}$$

$$< 2G\sum_{h=0}^{e-1}\frac{6G^2}{R^h}J^{\lambda-e+h}(\lambda!)^{-\frac{1}{e}}$$

$$= 2GJ^\lambda(\lambda!)^{-\frac{1}{e}}\sum_{h=0}^{e-1}\frac{6G^2}{R^h}J^{-(e-h)}.$$

Die Ungleichung (41) wird daher allgemein bewiesen sein, sobald feststeht, daß

$$\sum_{h=0}^{e-1}\frac{6G^2}{R^h}J^{-(e-h)} \leqq 1$$

ist. Diese Forderung wird aber, weil die Exponenten von J alle negativ sind, gewiß erfüllt sein, wenn wir nur die Zahl J genügend groß voraussetzen. Es genügt etwa für J die größte der beiden Zahlen

$$1, \quad \sum_{h=0}^{e-1}\frac{6G^2}{R^h}$$

zu wählen, sodaß in der Tat J von ν, λ, ϱ unabhängig ist.

Hiermit ist also (41) bewiesen; aus (36) und (41) folgt aber ohne weiteres, daß die Reihen (37)

$$D_{\nu-e} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda^{(\nu-e)} E_{\nu-e+\lambda} \qquad (\nu = e, e+1, e+2, \cdots) \tag{37}$$

im Gebiet T absolut und gleichmäßig konvergieren, sodaß auch die durch sie definierten Größen $D_{\nu-e}$ in T reguläre Funktionen von ϱ sind. Und zwar ergibt sich die Abschätzung

$$|D_{\nu-e}| < \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2GJ^\lambda(\lambda!)^{-\frac{1}{e}}\frac{H}{(\vartheta R)^{\nu-e+\lambda}}$$

$$= \frac{2GH}{(\vartheta R)^{\nu-e}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda!)^{\frac{1}{e}}}\left(\frac{J}{\vartheta R}\right)^\lambda.$$

Die letzte Summe ist eine von ν und ϱ ganz unabhängige Zahl, sodaß man schließlich erhält

(42)
$$|D_{\nu-e}| < \frac{\mathsf{M}}{(\vartheta R)^{\nu-e}} \qquad (\nu = e, e+1, e+2, \cdots),$$

wo die Zahl M von ν nicht abhängt, und auch nicht von der Stelle ϱ des Gebietes T.

Da die $N-e$ Anfangswerte $E_0, E_1, \cdots, E_{N-e-1}$ in T regulär sein sollten, im übrigen aber ganz willkürlich sind, so kann man genau $N-e$ Systeme

$$E_\nu^{(0)},\ E_\nu^{(1)}, \cdots, E_\nu^{(N-e-1)}$$

bilden, die der verlangten Rekursionsformel (19) genügen und die im ganzen Gebiet T linear unabhängig sind; d. h. für keinen Wert ϱ des Gebietes T soll eine für alle ν gültige Gleichung

$$\gamma_0 E_\nu^{(0)} + \gamma_1 E_\nu^{(1)} + \cdots + \gamma_{N-e-1} E_\nu^{(N-e-1)} = 0$$

bestehen. Dazu braucht man nämlich nur die Anfangswerte so zu wählen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} E_0^{(0)} & E_0^{(1)} & \cdots & E_0^{(N-e-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{N-e-1}^{(0)} & E_{N-e-1}^{(1)} & \cdots & E_{N-e-1}^{(N-e-1)} \end{vmatrix}$$

in T keine Nullstelle hat, was beispielsweise dadurch geschehen kann, daß man sie als passende Konstanten wählt. Setzt man dann gemäß (37)

(43)
$$D_\nu^{(i)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda^{(\nu)} E_{\nu+\lambda}^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ i = 0, 1, \cdots, N-e-1 \end{pmatrix},$$

so stellen diese $D_\nu^{(i)}$ nach dem Bewiesenen $N-e$ Lösungen der Rekursionsformel (13) dar, welche obendrein der Ungleichung (42) genügen. Man sieht leicht, daß diese ebenfalls im ganzen Gebiet T linear unabhängig sind. Denn es ist

(44)
$$D_\nu^{(i)} + c_1^{(\nu-e)} D_{\nu-1}^{(i)} + \cdots + c_e^{(\nu-e)} D_{\nu-e}^{(i)} = E_{\nu-e}^{(i)};$$

wenn also an irgend einer Stelle ϱ eine für alle ν gültige Gleichung

$$\gamma_0 D_\nu^{(0)} + \gamma_1 D_\nu^{(1)} + \cdots + \gamma_{N-e-1} D_\nu^{(N-e-1)} = 0$$

bestände, so würde daraus folgen

$$\gamma_0 E_\nu^{(0)} + \gamma_1 E_\nu^{(1)} + \cdots + \gamma_{N-e-1} E_\nu^{(N-e-1)} = 0,$$

während die $E_\nu^{(i)}$ doch linear unabhängig sind.

Die Rekursionsformel (13) läßt die N Größen $D_0, D_1, \cdots, D_{N-1}$ willkürlich; sie besitzt also N linear unabhängige Lösungen. Von diesen haben wir soeben bereits $N-e$ gefunden; es fehlen also noch e Lösungen. Nun sind die e Lösungen der Rekursionsformel

$$D_\nu + c_1^{(\nu-e)} D_{\nu-1} + \cdots + c_e^{(\nu-e)} D_{\nu-e} = 0 \qquad (\nu = e, e+1, e+2, \cdots) \tag{45}$$

a fortiori auch Lösungen von (17), also von (13). Sie sind von den vorhin gefundenen in T offenbar linear unabhängig; denn würde sich eine linear aus ihnen zusammensetzen, so müßte sich nach (44) und (45) auch die Null ebenso aus den $E_{\nu-e}^{(i)}$ zusammensetzen, was jedoch wegen der linearen Unabhängigkeit der $E_{\nu-e}^{(i)}$ nicht möglich ist.

Wir brauchen demnach nur noch die e Lösungen von (45) zu untersuchen. Greifen wir eine beliebige von diesen heraus und fassen einen bestimmten Wert von ϱ ins Auge, so sei ν_0 ein im folgenden festzuhaltender Index, für welchen $D_{\nu_0-e} \neq 0$ ist. Dann hat man

$$\begin{aligned} D_{\nu_0} + c_1^{(\nu_0-e)} D_{\nu_0-1} + \cdots + c_e^{(\nu_0-e)} D_{\nu_0-e} &= 0, \\ D_{\nu_0+1} + c_1^{(\nu_0-e+1)} D_{\nu_0} + \cdots + c_e^{(\nu_0-e+1)} D_{\nu_0-e+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ D_\lambda + c_1^{(\lambda-e)} D_{\lambda-1} + \cdots + c_e^{(\lambda-e)} D_{\lambda-e} &= 0, \end{aligned}$$

wo λ ein beliebig großer Index sei. Diese Gleichungen multiplizieren wir der Reihe nach mit

$$p_0^{(\nu_0-e)}, \quad p_1^{(\nu_0-e)}, \cdots, p_{\lambda-\nu_0}^{(\nu_0-e)}$$

und addieren sie dann. Da die Multiplikatoren p den Gleichungen (39) genügen, so fallen hierbei die Größen $D_{\nu_0-e+1}, D_{\nu_0-e+2}, \cdots, D_{\lambda-e}$ heraus, während D_{ν_0-e} den Koeffizienten 1 erhält. Setzt man dann D_{ν_0-e} auf die rechte Seite, so kommt

$$\begin{aligned} & p_{\lambda-\nu_0}^{(\nu_0-e)} D_\lambda + \left(c_1^{(\lambda-e)} p_{\lambda-\nu_0}^{(\nu_0-e)} + p_{\lambda-\nu_0-1}^{(\nu_0-e)}\right) D_{\lambda-1} + \cdots \\ & + \left(c_{e-1}^{(\lambda-e)} p_{\lambda-\nu_0}^{(\nu_0-e)} + c_{e-2}^{(\lambda-e-1)} p_{\lambda-\nu_0-1}^{(\nu_0-e)} + \cdots + p_{\lambda-\nu_0-e+1}^{(\nu_0-e)}\right) D_{\lambda-e+1} = - D_{\nu_0-e}; \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\sum_{i=0}^{e-1} \omega_i^{(\lambda)} D_{\lambda-i} = - D_{\nu_0-e}, \tag{46}$$

wobei

$$\omega_i^{(\lambda)} = \sum_{h=0}^{i} c_h^{(\lambda+h-e-i)} p_{\lambda-\nu_0+h-i}^{(\nu_0-e)}. \tag{47}$$

Für $\omega_i^{(\lambda)}$ ergibt sich auf Grund der Formeln (24) und (41) die Abschätzung:

$$|\omega_i^{(\lambda)}| < \sum_{h=0}^{i} \frac{3\,G}{R^h}(\lambda + h - e - i + 1)^{j-1} 2\,G J^{\lambda - \nu_0 + h - i}[(\lambda - \nu_0 + h - i)!]^{-\frac{1}{e}}$$

$$< \frac{(2J)^\lambda}{(\lambda!)^{\frac{1}{e}}} \text{ für genügend große } \lambda.$$

Aus (46) folgt daher für große Werte von λ

$$\sum_{i=0}^{e-1} \frac{(2J)^\lambda}{(\lambda!)^{\frac{1}{e}}} |D_{\lambda-i}| > |D_{\nu_0 - e}|.$$

Somit ist mindestens einer der links stehenden Summanden größer als $\frac{1}{e}|D_{\nu_0-e}|$. Daher

$$\operatorname*{Max}_{i=0}^{e-1} |D_{\lambda-i}| > \frac{1}{e}|D_{\nu_0-e}| \frac{(\lambda!)^{\frac{1}{e}}}{(2J)^\lambda} > \frac{(\lambda!)^{\frac{1}{e}}}{(3J)^\lambda} \text{ (für große } \lambda).$$

Dies besagt, daß es unbegrenzt viele Werte von λ gibt (für hinreichend große λ nämlich mindestens einen unter e aufeinander folgenden), für welche

$$|D_\lambda| > \frac{(\lambda!)^{\frac{1}{e}}}{(3J)^\lambda}$$

wird. Damit ist nun, weil die Rekursionsformel (13) gleichbedeutend ist mit (12), der Beweis des folgenden Satzes beendet:

Die Rekursionsformel (12) *hat, wenn nur N genügend groß gewählt ist, genau $N - e$ im ganzen Gebiet T reguläre und linear unabhängige Lösungen, für welche*

$$|D_\nu| < \frac{\mathsf{M}}{(\vartheta R)^\nu}$$

ausfällt, wo M *von ν und ϱ nicht abhängt.*

Ist dagegen D_ν für eine bestimmte Stelle ϱ des Gebietes T eine Lösung, die sich nicht aus diesen $N - e$ (für diese Stelle ϱ) linear zusammensetzt, so gibt es unendlich viele Werte von ν, für welche die mit der vorigen unverträgliche Ungleichung

$$|D_\nu| > g^\nu (\nu!)^{\frac{1}{e}}$$

besteht, wo auch g von ν nicht abhängt.

Die $N - e$ erstgenannten und ihre linearen Zusammensetzungen nennen wir die *ausgezeichneten Lösungen.* Sie sind durch die Formel (43) gegeben.

Dieses Schlußresultat bleibt nun auch im Fall $e = 0$ bestehen, so daß dann *alle* Lösungen *ausgezeichnete* sind. Beim Beweis fällt dann natürlich die

Transformation der Rekursionsformel weg, und die Überlegungen, welche wir an die Rekursionsformel für E_ν anknüpften, lassen sich direkt auf die für D_ν anwenden, sodaß mit der Formel (36) in diesem Fall das Endziel schon erreicht ist. Es ist aber dieser Fall, wie wir schon in § 2 bemerkten, gerade der klassische, und in der Tat wäre die Ausführung des soeben angedeuteten Beweises nur eine einfache Umgestaltung des von Herrn Frobenius gegebenen*).

Wichtig ist noch folgende Bemerkung:

Wenn $\varrho = \varrho_0$ eine spezielle Stelle des Gebietes T, und D_ν eine zu dieser Stelle gehörige ausgezeichnete Lösung ist, so kann man eine im Gebiet T reguläre ausgezeichnete Lösung angeben, welche für $\varrho = \varrho_0$ mit D_ν zusammenfällt.

Beweis. Nach dem Bewiesenen gibt es $N-e$ ausgezeichnete Lösungen, welche im ganzen Gebiet T linear unabhängig und regulär sind; wir bezeichnen sie der Deutlichkeit halber, um auch ihre Abhängigkeit von ϱ hervorzuheben, mit

$$D_\nu^{(0)}(\varrho),\ D_\nu^{(1)}(\varrho), \cdots, D_\nu^{(N-e-1)}(\varrho).$$

Da diese im ganzen Gebiet T linear unabhängig sind, so sind sie es insbesondere auch an der Stelle ϱ_0. Da es aber an keiner Stelle mehr als $N-e$ linear unabhängige ausgezeichnete Lösungen gibt, so muß sich die zur Stelle ϱ_0 gehörige Lösung D_ν linear aus ihnen zusammensetzen; also

$$D_\nu = \gamma_0 D_\nu^{(0)}(\varrho_0) + \gamma_1 D_\nu^{(1)}(\varrho_0) + \cdots + \gamma_{N-e-1} D_\nu^{(N-e-1)}(\varrho_0).$$

Dann ist aber

$$D_\nu(\varrho) = \gamma_0 D_\nu^{(0)}(\varrho) + \gamma_1 D_\nu^{(1)}(\varrho) + \cdots + \gamma_{N-e-1} D_\nu^{(N-e-1)}(\varrho)$$

eine in T reguläre ausgezeichnete Lösung, welche die behauptete Eigenschaft hat.

§ 5.

Die logarithmenfreien Integrale.

Wir kehren nun zur Differentialgleichung (5) zurück. Wenn

$$y = x^\varrho \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu \tag{48}$$

ein Integral sein soll, so müssen die Koeffizienten D_ν außer der Rekursionsformel (12) nach Gleichung (11) auch noch die Bedingungen

$$D_\nu f_0(\varrho+\nu) + D_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + D_0 f_\nu(\varrho) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{49}$$

*) „Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen". Journal für die reine und angewandte Mathematik 76.

erfüllen. Daher kommt insbesondere für $\nu = 0: D_0 f_0(\varrho) = 0$. Denkt man sich aber den Exponenten ϱ in (48) so fixiert, daß $D_0 \neq 0$ ist, so folgt $f_0(\varrho) = 0$. Von jetzt an sei daher ϱ eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$. Da jede Wurzel dem Gebiet T angehört, so können wir die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf diesen Wert ϱ anwenden. Wenn also D_ν eine nicht ausgezeichnete Lösung der Rekursionsformel (12) ist, so hat man unendlich oft: $|D_\nu| > g^\nu (\nu!)^{\frac{1}{e}}$, sodaß die Reihe (48) den Konvergenzradius Null hat und daher gewiß kein Integral darstellt.

Für die $N - e$ ausgezeichneten Lösungen ist dagegen $|D_\nu| < \frac{M}{(\vartheta R)^\nu}$, sodaß die Reihe mindestens in einem Kreis vom Radius ϑR konvergiert. Da aber ϑ beliebig nahe bei 1 liegen darf, und da R auch nur beliebig wenig kleiner zu sein braucht wie der kleinste Konvergenzradius der Reihen (4), so besagt dies, daß der Konvergenzradius der Reihe (48) mindestens gleich ist dem kleinsten Konvergenzradius der Reihen (4). Mit andern Worten: der Konvergenzkreis von (48) reicht mindestens bis zum nächstgelegenen singulären Punkt der Differentialgleichung.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich nun, daß jedes Integral der Form (48) sich linear zusammensetzen muß aus den $N - e$ Funktionen

$$(50) \qquad y_i = x^\varrho \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu^{(i)} x^\nu \qquad (i = 0, 1, \cdots, N - e - 1),$$

wo wieder mit $D_\nu^{(i)}$ die $N - e$ ausgezeichneten Lösungen (für die betreffende Stelle ϱ) bezeichnet sind. Setzt man demgemäß

$$(51) \qquad y = \gamma_0 y_0 + \gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_{N-e-1} y_{N-e-1},$$

so kommt

$$(52) \qquad D_\nu = \gamma_0 D_\nu^{(0)} + \gamma_1 D_\nu^{(1)} + \cdots + \gamma_{N-e-1} D_\nu^{(N-e-1)}.$$

Führt man dies in (49) ein, so ergeben sich zur Berechnung der Koeffizienten γ_i die Bedingungsgleichungen

$$(53) \qquad \gamma_0 G_\nu^{(0)} + \gamma_1 G_\nu^{(1)} + \cdots + \gamma_{N-e-1} G_\nu^{(N-e-1)} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \cdots, N - 1),$$

wobei zur Abkürzung

$$(54) \qquad D_\nu^{(i)} f_0(\varrho + \nu) + D_{\nu-1}^{(i)} f_1(\varrho + \nu - 1) + \cdots + D_0^{(i)} f_\nu(\varrho) = G_\nu^{(i)}$$

gesetzt ist. In (53) haben wir N lineare homogene Gleichungen für die $N - e$ Unbekannten $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{N-e-1}$. Die Matrix ihres Koeffizientensystems ist

$$(55) \qquad \left\| \begin{matrix} G_0^{(0)}, & G_0^{(1)}, & \cdots, & G_0^{(N-e-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{N-1}^{(0)}, & G_{N-1}^{(1)}, & \cdots, & G_{N-1}^{(N-e-1)} \end{matrix} \right\|.$$

Bezeichnet man den Rang dieser Matrix mit r, so gibt es genau $N-e-r$ linear unabhängige Auflösungen γ_i, und folglich ebensoviel Integrale der Form (48). *Wir können so, indem wir für ϱ der Reihe nach alle Wurzeln der algebraischen Gleichung $f_0(\varrho)=0$ nehmen, sämtliche Integrale der Form* (48) *bestimmen.*

In der Praxis freilich wird es meist unmöglich sein, den Rang der Matrix (55) genau festzustellen, weil die Größen $G_\nu^{(i)}$ von den $D_\nu^{(i)}$ abhängen, welche ihrerseits durch komplizierte Grenzprozesse definiert und praktisch nicht zu berechnen sind. Darum ist es wichtig zu bemerken daß man auf algebraischem Weg wenigstens eine obere Grenze für den Rang r ermitteln kann. Ergänzt man nämlich die Matrix (55) zu einer Determinante, indem man noch e Kolonnen mit lauter Nullen anfügt, so ist der Rang dieser Determinante ebenfalls r. Sie ist aber augenscheinlich das Produkt der beiden folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} f_0(\varrho) & & & \\ f_1(\varrho) & f_0(\varrho+1) & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{N-1}(\varrho) & f_{N-2}(\varrho+1) & \cdots & f_0(\varrho+N-1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(0)} & D_1^{(0)} & \cdots & D_{N-1}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_0^{(N-e-1)} & D_1^{(N-e-1)} & \cdots & D_{N-1}^{(N-e-1)} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Wenn nun r' der Rang des ersten Faktors ist, so hat bekanntlich auch das Produkt höchstens den Rang r', also ist $r \leqq r'$. Diese Zahl r' ist in jedem Fall unschwer zu ermitteln, und *es gibt dann mindestens $N-e-r'$ Integrale der Form* (48).

Dies Resultat benutzen wir zum Beweis des folgenden speziellen Satzes:

Satz 1. *Wenn die Koeffizienten $P_i(x)$ der Differentialgleichung*

$$x^s y^{(m)} + P_1(x) y^{(m-1)} + P_2(x) y^{(m-2)} + \cdots + P_m(x) y = 0$$

am Nullpunkt regulär sind, so sind mindestens $m-s$ Integrale am Nullpunkt regulär.

Beweis. Ist

$$P_i(x) = a_{i,0} x^{s_i} + a_{i,1} x^{s_i+1} + a_{i,2} x^{s_i+2} + \cdots, \quad a_{i,0} \neq 0, \ s_i \geqq 0,$$

so wollen wir die Gleichung zunächst auf die Normalform bringen. Zu dem Zweck multiplizieren wir sie mit x^{m+e-s}, wobei

$$-e = \mathrm{Min}\,(0,\ s_1 - s + 1,\ s_2 - s + 2, \cdots, s_m - s + m).$$

Dadurch kommt:

$$x^{m+e} y^{(m)} + x^{m-1}(a_{1,0}\, x^{s_1-s+1+e} + \cdots) y^{(m-1)} + x^{m-2}(a_{2,0} x^{s_2-s+2+e} + \cdots) y^{(m-2)} \\ + \cdots + (a_{m,0} x^{s_m-s+m+e} + \cdots) y = 0.$$

Dies ist die Normalform; bringt man sie mit (5) zur Deckung, so erhält man

$$A_{i,h} = 0 \text{ für } h < s_{m-i} - s + m - i + e,$$

also *a* fortiori, weil $s_{m-i} \geqq 0$ ist:

$$A_{i,h} = 0 \text{ für } h + i < m + e - s.$$

Nach der Definition der Funktionen $f_h(\varrho)$ in (8) und (9) ist dies aber gleichbedeutend mit

$$f_h(i) = 0 \text{ für } h + i < m + e - s.$$

Setzt man daher in der Determinante

$$\begin{vmatrix} f_0(\varrho) & & & \\ f_1(\varrho) & f_0(\varrho+1) & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{N-1}(\varrho) & f_{N-2}(\varrho+1) & \cdots & f_0(\varrho+N-1) \end{vmatrix}$$

speziell $\varrho = 0$, so enthalten ihre $m + e - s$ ersten Zeilen lauter Nullen Eine von Null verschiedene Unterdeterminante kann daher höchstens $N - (m + e - s)$ Zeilen haben, also ist der Rang $r' \leqq N - (m + e - s)$, oder

$$N - e - r' \geqq m - s.$$

Da aber mindestens $N - e - r'$ Integrale der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$ existieren müssen, so gibt es deren auch mindestens $m - s$. W. z. b. w.

Natürlich gilt Satz 1 auch, wenn man statt des Nullpunktes irgend eine andere im Endlichen gelegene Stelle ins Auge faßt. Weiter beweisen wir

Satz 2. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung*

$$P_0(x) y^{(m)} + P_1(x) y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x) y = 0$$

seien in einem zusammenhängenden Bereich B regulär, und $P_0(x)$ habe in B nur s Nullstellen, jede ihrer Multiplizität entsprechend gezählt. Dann gibt es mindestens $m - s$ Integrale, die im ganzen Bereich B regulär sind

Beweis: An einer regulären Stelle ζ des Bereiches B sei

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$$

ein Fundamentalsystem, sodaß jedes Integral die Form

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots + c_m \eta_m$$

hat, wo $c_1, \cdots, c_m$ Konstanten sind. Die Ordnungszahlen der Nullstellen von $P_0(x)$ im Bereich B seien $i_1, i_2, \cdots$, sodaß nach Voraussetzung

$$i_1 + i_2 + \cdots = s$$

ist. Nun führe man das allgemeine Integral y vom Punkt ζ aus innerhalb des Bereiches B, der ja zusammenhängend sein soll, in die erste Nullstelle von $P_0(x)$. Da diese von der i_1^{ten} Ordnung ist, so bleiben nach Satz 1 mindestens $m-i_1$ Integrale dort regulär, welche sich offenbar durch i_1 homogene lineare Relationen zwischen den Konstanten c_i charakterisieren lassen. Ebenso bleiben in der zweiten Nullstelle $m-i_2$ Integrale regulär, welche sich also durch i_2 analoge Relationen charakterisieren lassen usw. Betrachtet man schließlich die Integrale, deren Konstanten $c_1, \cdots, c_m$ allen $i_1+i_2+\cdots=s$ Relationen zugleich genügen, so bleiben diese in sämtlichen Nullstellen, also im ganzen Bereich B regulär. Die genannten s Relationen lassen aber mindestens $m-s$ der Größen $c_1, \cdots, c_m$ willkürlich, sodaß man in der Tat mindestens $m-s$ linear unabhängige Integrale erhält, welche in B überall regulär sind. W. z. b. w.

Ein Spezialfall von Satz 2 ist

Satz 3. *Sind die Koeffizienten der Differentialgleichung*

$$P_0(x)y^{(m)}+P_1(x)y^{(m-1)}+\cdots+P_m(x)y=0$$

ganze (rationale oder transzendente) Funktionen, und hat $P_0(x)$ nur s Nullstellen, so sind mindestens $m-s$ Integrale im Endlichen überall regulär, also ganze Funktionen.

Diesen Satz habe ich für den Fall, daß die $P_i(x)$ ganze *rationale* Funktionen sind, auch schon in den Acta Mathematica, in der zweiten der zitierten Arbeiten, sowie im Journal für die reine u. angew. Mathematik 137, S. 60 bewiesen.

§ 6.

Die mit Logarithmen behafteten Integrale.

Wir denken uns ϱ jetzt wieder im Gebiete T variabel. Für die in T regulären ausgezeichneten Lösungen $D_\nu^{(i)}$ der Rekursionsformel (12) ist dann

$$\left|D_\nu^{(i)}\right| < \frac{\mathsf{M}}{(\vartheta R)^\nu} \qquad (i=0,1,\cdots,N-e-1),$$

wo M von ν und ϱ nicht abhängt. Daher sind die Reihen

$$(56) \qquad y_i=\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu^{(i)} x^{\varrho+\nu} \qquad (i=0,1,\cdots,N-e-1)$$

für $|x| \leqq \vartheta^2 R$ und im ganzen Gebiet T gleichmäßig konvergent. Da außerdem die $D_\nu^{(i)}$ in T reguläre Funktionen von ϱ sind, so sind auch die Reihen y_i als Funktionen von ϱ im Innern von T regulär und dürfen beliebig oft gliedweise nach ϱ differenziert werden. Man erhält so

$$(57) \qquad \frac{\partial^k y_i}{\partial \varrho^k}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{d^k D_\nu^{(i)}}{d\varrho^k}+\binom{k}{1}\frac{d^{k-1} D_\nu^{(i)}}{d\varrho^{k-1}}\log x+\cdots+D_\nu^{(i)}(\log x)^k\right)x^{\varrho+\nu}.$$

Hieraus ersieht man, daß für eine in T reguläre ausgezeichnete Lösung D_ν nicht nur die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$, sondern auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{dD_\nu}{d\varrho} x^\nu, \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^2 D_\nu}{d\varrho^2} x^\nu, \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^3 D_\nu}{d\varrho^3} x^\nu, \cdots$$

für $|x| \leqq \vartheta^2 R$ und im Innern von T konvergieren.*)

Bedeutet wieder $P(y)$ den Diffentialausdruck des § 2, so ist nach (11), weil die $D_\nu^{(i)}$ der Rekursionsformel (12) genügen,

$$P(y_i) = \sum_{\nu=0}^{N-1} G_\nu^{(i)} x^{\varrho+\nu}, \tag{58}$$

wobei wieder

$$G_\nu^{(i)} = D_\nu^{(i)} f_0(\varrho+\nu) + D_{\nu-1}^{(i)} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + D_0^{(i)} f_\nu(\varrho). \tag{59}$$

Daher auch, wenn $\gamma_1, \cdots, \gamma_{N-e-1}$ irgendwelche Konstanten sind:

$$P\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i y_i\Big) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \Big(\sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i G_\nu^{(i)}\Big) x^{\varrho+\nu}. \tag{60}$$

Wenn also für einen bestimmten Wert von ϱ die γ_i sich derart bestimmen lassen, daß

$$\sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i G_\nu^{(i)} = 0 \qquad \text{für } \nu = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{61}$$

wird, so ist $\sum \gamma_i y_i$ ein Integral, wie wir auch schon im vorigen Paragraphen sahen.

---

*) Dies läßt sich auch so beweisen: Ist ϱ_0 ein innerer Punkt von T, so konstruiere man um ϱ_0 als Mittelpunkt einen Kreis, der ganz in T liegt; sein Radius sei a. Dann besteht in diesem Kreis eine Taylorsche Entwicklung:

$$D_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k D_\nu}{d\varrho^k}\right)_{\varrho=\varrho_0} (\varrho - \varrho_0)^k$$

und nach einem bekannten Satze ist

$$\left| \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k D_\nu}{d\varrho^k}\right)_{\varrho=\varrho_0} a^k \right| \leqq \mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{M}$ das Maximum von $|D_\nu|$ auf dem genannten Kreis bedeutet. Dieses ist aber, weil der Kreis ganz in T liegt, kleiner als $\frac{\mathsf{M}}{(\vartheta R)^\nu}$. Daher kommt

$$\left| \left(\frac{d^k D_\nu}{d\varrho^k}\right)_{\varrho=\varrho_0} \right| < \frac{k!}{a^k} \frac{\mathsf{M}}{(\vartheta R)^\nu},$$

woraus wieder die Konvergenz der obigen Reihen folgt.

Durch Differentiation der Gleichung (60) nach ϱ folgt aber weiter, da die Reihenfolge der Differentiatonen nach x und ϱ offenbar vertauscht werden darf:

$$
(62)\qquad \left\{\begin{aligned} P\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{\partial y_i}{\partial\varrho}\Big) &= \frac{\partial}{\partial\varrho}P\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i y_i\Big)\\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1}\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{d\,G_\nu^{(i)}}{d\varrho}+\log x\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i G_\nu^{(i)}\Big)x^{\varrho+\nu}.\end{aligned}\right.
$$

Wenn man daher für einen bestimmten Wert von ϱ die γ_i derart bestimmen kann, daß außer den Gleichungen (61) auch noch die folgenden erfüllt sind:

$$
(63)\qquad \sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{d\,G_\nu^{(i)}}{d\varrho}=0 \qquad \text{für } \nu=0,1,\cdots,N-1,
$$

so ist

$$
\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{\partial y_i}{\partial\varrho}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{d\,D_\nu^{(i)}}{d\varrho}+\log x\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i D_\nu^{(i)}\Big)x^{\varrho+\nu}
$$

ebenfalls ein Integral. Die Anzahl dieser Integrale ist gleich der Anzahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (61), (63), also gleich $N-e-r_1$, wenn r_1 den Rang der Matrix

$$
\left\|\begin{matrix} G_0^{(0)} & G_0^{(1)} & \cdots & G_0^{(N-e-1)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ G_{N-1}^{(0)} & G_{N-1}^{(1)} & \cdots & G_{N-1}^{(N-e-1)}\\ \dfrac{d\,G_0^{(0)}}{d\varrho} & \dfrac{d\,G_0^{(1)}}{d\varrho} & \cdots & \dfrac{d\,G_0^{(N-e-1)}}{d\varrho}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \dfrac{d\,G_{N-1}^{(0)}}{d\varrho} & \dfrac{d\,G_{N-1}^{(1)}}{d\varrho} & \cdots & \dfrac{d\,G_{N-1}^{(N-e-1)}}{d\varrho}\end{matrix}\right\|
$$

für den betreffenden Wert von ϱ bedeutet.

Durch nochmalige Differentiation nach ϱ ergibt sich aus (62):

$$
\begin{aligned} &P\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial\varrho^2}\Big)\\ &=\sum_{\nu=0}^{N-1}\Big(\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{d^2 G_\nu^{(i)}}{d\varrho^2}+2\log x\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i\frac{d\,G_\nu^{(i)}}{d\varrho}+(\log x)^2\sum_{i=0}^{N-e-1}\gamma_i G_\nu^{(i)}\Big)x^{\varrho+\nu}.\end{aligned}
$$

Wenn sich daher für einen bestimmten Wert von ϱ die γ_i derart wählen lassen, daß außer (61) und (63) auch noch die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i \frac{d^2 G_\nu^{(i)}}{d\varrho^2} = 0 \qquad \text{für } \nu = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{64}$$

erfüllt sind, so ist auch

$$\sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial \varrho^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i \frac{d^2 D_\nu^{(i)}}{d\varrho^2} + 2 \log x \sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i \frac{d D_\nu^{(i)}}{d\varrho} + (\log x)^2 \sum_{i=0}^{N-e-1} \gamma_i D_\nu^{(i)} \Big) x^{\varrho+\nu}$$

ein Integral. Die Anzahl dieser Integrale ist gleich $N - e - r_2$, wenn r_2 der Rang derjenigen Matrix ist, welche aus dem Koeffizientensystem der Gleichungen (61), (63), (64) für den betreffenden Wert von ϱ gebildet ist.

In dieser Weise kann man fortfahren, und wir wollen jetzt beweisen, daß man dabei immer bloß die Nullstellen von $f_0(\varrho)$, also eine endliche Anzahl von Werten ϱ zu prüfen braucht, und daß man auf diese Art auch wirklich *alle* sich bestimmt verhaltenden Integrale erhält.

Zu dem Zweck sei zunächst D_ν irgend eine in T reguläre ausgezeichnete Lösung von (12). Dann ist

$$D_\nu f_0(\varrho+\nu) + D_{\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + D_0 f_\nu(\varrho) = 0 \qquad \text{für } \nu \geqq N$$

oder kürzer

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} D_\lambda f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = 0 \quad \text{für } \nu \geqq N. \tag{65}$$

Differenziert man l mal nach ϱ, so kommt

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \frac{d^i D_\lambda}{d\varrho^i} f_{\nu-\lambda}^{(l-i)}(\varrho+\lambda) = 0 \quad \text{für } \nu \geqq N, \tag{66}$$

wo der obere Index bei dem Funktionszeichen f Differentiation bedeutet.

Nun sei

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_{\nu,0} (\log x)^k + c_{\nu,1} (\log x)^{k-1} + \cdots + c_{\nu,k-1} \log x + c_{\nu,k}) x^{\varrho+\nu} \tag{67}$$

irgend ein am Nullpunkt sich bestimmt verhaltendes Integral, sodaß also die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,i} x^\nu \qquad i = 0, 1, \cdots, k$$

einen von Null verschiedenen Konvergenzradius haben. Wir nehmen an, daß die k^{te} Potenz des Logarithmus wirklich auftritt, sodaß nicht alle $c_{\nu,0}$ verschwinden; ferner denken wir uns den Exponenten ϱ so fixiert, daß von den Zahlen

$$c_{0,0},\ c_{0,1},\ \cdots,\ c_{0,k}$$

mindestens eine von Null verschieden ist.

Um jetzt die Rekursionsformeln aufzufinden, welchen die $c_{\nu,i}$ genügen müssen, damit der Ausdruck y die Differentialgleichung $P(y) = 0$ formal erfüllt, schreiben wir (67) in der Gestalt:

$$y = \frac{\partial^k}{\partial \varrho^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu.0}\, x^{\varrho+\nu} + \frac{\partial^{k-1}}{\partial \varrho^{k-1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,1}\, x^{\varrho+\nu} + \cdots + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,k}\, x^{\varrho+\nu},$$

wobei nach der Differentiation wieder der spezielle Wert ϱ einzusetzen ist. Daher kommt

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} P(y) &= P\Big(\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial^{k-i}}{\partial \varrho^{k-i}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,i}\, x^{\varrho+\nu}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P\Big(\frac{\partial^{k-i}}{\partial \varrho^{k-i}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,i}\, x^{\varrho+\nu}\Big). \end{aligned}\right.$$

Nach Formel (7) ist aber

$$P\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,i}\, x^{\varrho+\nu}\Big) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,i} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)\, x^{\varrho+\nu}.$$

Also, da auch jetzt wieder Vertauschung der Differentiationsfolge und gliedweise Differentiation gestattet ist:

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{\partial^{k-i}}{\partial \varrho^{k-i}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,i}\, x^{\varrho+\nu}\Big) &= \frac{\partial^{k-i}}{\partial \varrho^{k-i}} P\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,i}\, x^{\varrho+\nu}\Big) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial \varrho^{k-i}} \big(f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)\, x^{\varrho+\nu}\big) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,i} \sum_{r=i}^{k} \binom{k-i}{k-r} x^{\varrho+\nu} (\log x)^{k-r} f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (68) ein, so kommt endlich

$$\begin{aligned} P(y) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{r=i}^{k} c_{\lambda,i} \binom{k-i}{k-r} x^{\varrho+\nu} (\log x)^{k-r} f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda) \\ &= \sum_{r=0}^{k} (\log x)^{k-r} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\varrho+\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{r} c_{\lambda,i} \binom{k-i}{k-r} f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda). \end{aligned}$$

Damit y ein Integral der Gleichung $P(y) = 0$ ist, muß $P(y)$ identisch verschwinden; also erhält man

$$(69)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{r} c_{\lambda,i} \binom{k-i}{k-r} f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda) = 0 \qquad \binom{\nu = 0, 1, 2, \cdots}{r = 0, 1, \cdots, k}.$$

Dies sind die gesuchten Rekursionsformeln zur Berechnung der Koeffizienten $c_{\lambda,i}$. Speziell für $\nu = 0$ kommt

$$\sum_{i=0}^{r} c_{0,i}\binom{k-i}{k-r} f_0^{(r-i)}(\varrho) = 0 \qquad (r = 0, 1, \cdots, k),$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned}
&c_{0,0} f_0(\varrho) = 0,\\
&c_{0,0} k f_0'(\varrho) + c_{0,1} f_0(\varrho) = 0,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&c_{0,0} f_0^{(k)}(\varrho) + c_{0,1} f_0^{(k-1)}(\varrho) + \cdots + c_{0,k} f_0(\varrho) = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß ϱ eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$ sein muß. Denn andernfalls würde aus der ersten dieser Gleichungen folgen $c_{0,0} = 0$, sodann aus der zweiten $c_{0,1} = 0, \cdots$; endlich aus der letzten auch $c_{0,k} = 0$, während doch von den Zahlen $c_{0,0}, c_{0,1}, \cdots, c_{0,k}$ mindestens eine von Null verschieden sein sollte. Von jetzt an sei daher ϱ wieder eine Wurzel der Gleichung $f_0(\varrho) = 0$.

Für $r = 0$ lautet die Gleichung (69) speziell

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,0} f_{\nu-\lambda}(\varrho + \lambda) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

und besagt daher, daß die $c_{\nu,0}$ gewiß eine Lösung der Rekursionsformel (12) sein müssen, und zwar, damit die Reihe $\sum c_{\nu,0}\, x^\nu$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat, eine *ausgezeichnete* Lösung. Wir setzen demgemäß

$$c_{\nu,0} = D_{\nu,0}. \tag{70}$$

Dies bezieht sich auf die bestimmte Stelle ϱ (Nullstelle von $f_0(\varrho)$). Nun gibt es aber, wie wir am Schluß von § 4 bewiesen haben, eine in T reguläre ausgezeichnete Lösung, welche an der bestimmten Stelle ϱ sich gerade mit $D_{\nu,0}$ deckt; wir bezeichnen diese im ganzen Bereich T mit $D_{\nu,0}$, sodaß $D_{\nu,0}$ jetzt auch nach ϱ differenziert werden kann. Nach (66) ist dann, wenn man speziell $l = 1$ setzt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} D_{\lambda,0} f'_{\nu-\lambda}(\varrho + \lambda) + \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{dD_{\lambda,0}}{d\varrho} f_{\nu-\lambda}(\varrho + \lambda) = 0 \qquad \nu \geqq N.$$

Andererseits besagt die Gleichung (69) für $r = 1$:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,0} k f'_{\nu-\lambda}(\varrho + \lambda) + \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,1} f_{\nu-\lambda}(\varrho + \lambda) = 0.$$

Subtrahiert man hiervon die vorige Gleichung, nachdem man sie mit k multipliziert hat, so kommt wegen $c_{\lambda,0} = D_{\lambda,0}$:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu}\left(c_{\lambda,1} - k\,\frac{dD_{\lambda,0}}{d\varrho}\right)f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = 0\,. \qquad \nu \geqq N.$$

Daraus folgt, daß

$$c_{\nu,1} - k\,\frac{dD_{\nu,0}}{d\varrho}$$

eine Lösung von (12) sein muß. Da aber die Reihe $\sum c_{\nu,1}x^{\nu}$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius haben soll, und da von der Reihe $\sum \frac{dD_{\nu,0}}{d\varrho}x^{\nu}$, wie wir Seite 24 bemerkten, das gleiche gilt, so muß es eine *ausgezeichnete* Lösung sein, wozu wir aber jetzt auch die triviale Lösung $D_{\nu} = 0$ für alle ν rechnen müssen. Wir setzen demgemäß

$$(71) \qquad c_{\nu,1} - k\,\frac{dD_{\nu,0}}{d\varrho} = D_{\nu,1}.$$

Auch dies bezieht sich wieder auf die bestimmte Stelle ϱ, die wir im Auge haben. Wie vorhin können wir aber auch jetzt eine in T reguläre ausgezeichnete Lösung angeben, die sich an dieser Stelle gerade mit $D_{\nu,1}$ deckt. Wir bezeichnen sie dann im ganzen Bereich T mit $D_{\nu,1}$, so daß wir von $D_{\nu,1}$ auch die Ableitungen nach ϱ bilden können.

Wir zeigen jetzt, daß ganz allgemein

$$(72) \qquad c_{\nu,i} = \sum_{s=0}^{i}\binom{k-s}{i-s}\frac{d^{i-s}D_{\nu,s}}{d\varrho^{i-s}} \qquad \binom{i=0,1,\cdots,k}{\nu=0,1,2\cdots}$$

sein muß, wo $D_{\nu,s}$ in T reguläre ausgezeichnete Lösungen sind (eventuell $D_{\nu,s} = 0$ für alle ν), in welche nach der Differentiation der spezielle Wert ϱ einzusetzen ist.

In der Tat ist diese Formel für $i = 0, 1$ durch (70) und (71) bereits bewiesen. Nimmt man aber an, sie sei richtig für $i < r(\leqq k)$, so läßt sich zeigen, daß sie auch für $i = r$, also allgemein gilt. Zu dem Zweck isolieren wir in der Formel (69) von der Summe nach i den Term für $i = r$; dadurch ergibt sich

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,r}f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = -\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,i}\binom{k-i}{k-r}f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda)\,.$$

Auf die $c_{\lambda,i}$ der rechten Seite darf aber, weil $i < r$ ist, bereits die Formel (72) angewandt werden, wodurch man erhält:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,r}f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = -\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\sum_{s=0}^{i}\binom{k-s}{i-s}\frac{d^{i-s}D_{\lambda,s}}{d\varrho^{i-s}}\binom{k-i}{k-r}f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda).$$

Nun ist identisch

$$\binom{k-s}{i-s}\binom{k-i}{k-r}=\binom{k-s}{r-s}\binom{r-s}{i-s}.$$

Dadurch geht die letzte Formel über in

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,r} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = -\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\sum_{i=s}^{r-1}\binom{k-s}{r-s}\binom{r-s}{i-s}\frac{d^{i-s}D_{\lambda,s}}{d\varrho^{i-s}} f_{\nu-\lambda}^{(r-i)}(\varrho+\lambda),$$

oder, indem man in der inneren Summe den Summationsindex i ersetzt durch $i+s$:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,r} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{k-s}{r-s}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{r-s-1}\binom{r-s}{i}\frac{d^{i}D_{\lambda,s}}{d\varrho^{i}} f_{\nu-\lambda}^{(r-s-i)}(\varrho+\lambda).$$

Nach (66), angewandt für $l=r-s$, darf aber für $\nu\geqq N$ die innere Doppelsumme der rechten Seite ersetzt werden durch

$$-\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{d^{r-s}D_{\lambda,s}}{d\varrho^{r-s}} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda),$$

sodaß man erhält

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} c_{\lambda,r} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda) = \sum_{s=0}^{r-1}\binom{k-s}{r-s}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{d^{r-s}D_{\lambda,s}}{d\varrho^{r-s}} f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)\qquad(\nu\geqq N),$$

oder endlich, was dasselbe ist:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu}\left(c_{\lambda,r}-\sum_{s=0}^{r-1}\binom{k-s}{r-s}\frac{d^{r-s}D_{\lambda,s}}{d\varrho^{r-s}}\right) f_{\nu-\lambda}(\varrho+\lambda)=0\qquad(\nu\geqq N).$$

Daher muß auch

$$c_{\nu,r}-\sum_{s=0}^{r-1}\binom{k-s}{r-s}\frac{d^{r-s}D_{\nu,s}}{d\varrho^{r-s}}$$

wieder eine Lösung von (12) sein für die betreffende Stelle ϱ, und zwar, weil die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu,r}x^{\nu},\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d^{r-s}D_{\nu,s}}{d\varrho^{r-s}}x^{\nu}$$

einen von Null verschiedenen Konvergenzradius haben, eine *ausgezeichnete* Lösung. Bezeichnen wir sie mit $D_{\nu,r}$, wobei wir $D_{\nu,r}$ auch wieder als reguläre Funktion in T annehmen dürfen, so ergibt sich

$$c_{\nu,r} = \sum_{s=0}^{r-1} \binom{k-s}{r-s} \frac{d^{r-s} D_{\nu,s}}{d\varrho^{r-s}} + D_{\nu,r}$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \binom{k-s}{r-s} \frac{d^{r-s} D_{\nu,s}}{d\varrho^{r-s}},$$

also gerade die Formel (72) für $i = r$. Dadurch ist ihre Allgemeingültigkeit bewiesen.

Wir schreiben nun die Formel (67) in der bequemeren Gestalt

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} c_{\nu,i} (\log x)^{k-i} x^{\varrho+\nu},$$

und setzen für die $c_{\nu,i}$ die in (72) berechneten Werte ein; es kommt dann:

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{s=0}^{i} \binom{k-s}{i-s} \frac{d^{i-s} D_{\nu,s}}{d\varrho^{i-s}} (\log x)^{k-i} x^{\varrho+\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \sum_{i=s}^{k} \binom{k-s}{i-s} \frac{d^{i-s} D_{\nu,s}}{d\varrho^{i-s}} (\log x)^{k-i} x^{\varrho+\nu}.$$

Hier kann aber die Summe nach i ausgewertet werden: Ersetzt man nämlich ihren Summationsindex i durch $i + s$, so geht sie über in

$$\sum_{i=0}^{k-s} \binom{k-s}{i} \frac{d^{i} D_{\nu,s}}{d\varrho^{i}} (\log x)^{k-s-i} x^{\varrho+\nu}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-s} \binom{k-s}{i} \frac{d^{i} D_{\nu,s}}{d\varrho^{i}} \frac{\partial^{k-s-i} x^{\varrho+\nu}}{\partial\varrho^{k-s-i}} = \frac{\partial^{k-s} (D_{\nu,s} x^{\varrho+\nu})}{\partial\varrho^{k-s}}.$$

Setzt man dies oben ein, so kommt

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{\partial^{k-s} (D_{\nu,s} x^{\varrho+\nu})}{\partial\varrho^{k-s}}$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \frac{\partial^{k-s}}{\partial\varrho^{k-s}} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu,s} x^{\varrho+\nu}.$$

Denn daß die Reihe $\sum D_{\nu,s} x^{\varrho+\nu}$ gliedweise nach ϱ differenziert werden darf, wurde bereits S. 23 hervorgehoben.

Diese letzte Formel besagt nun, daß *jedes Integral, das sich im Nullpunkt bestimmt verhält, linear zusammengesetzt ist aus Integralen der speziellen Form*

$$\frac{\partial^{k-s}}{\partial \varrho^{k-s}} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^{\varrho+\nu},$$

wo D_ν eine in T reguläre ausgezeichnete Lösung von (12) *bedeutet.* Das sind aber gerade diejenigen Integrale, welche wir zu Beginn dieses Paragraphen sämtlich ermittelt haben, womit gezeigt ist, daß man auf diesem Wege in der Tat *alle* sich bestimmt verhaltenden Integrale findet.