

**SULLA FORMULA DI KIRCHHOFF E SUE ESTENSIONI.**

*Nota di P. BURGATTI.*

Il Beltrami in molte sue Memorie insistette sull'importanza fondamentale, specialmente rispetto alla teoria del potenziale e sue estensioni, dei lemmi di Gauss espressi dalle formule

$$(0) \quad \int_s \frac{\partial u}{\partial r} \frac{ds}{r} = \int_{\sigma} u \frac{d \lg \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \sigma_0 u_0 \quad (\text{campo a 2 dims.})$$

$$(0') \quad \int_s \frac{\partial u}{\partial r} \frac{ds}{r^2} = \int_{\sigma} u \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \sigma_0 u_0 \quad (\text{campo a 3 dims.}),$$

in cui i simboli hanno significati ben noti; formule quasi intuitive, perchè scaturiscono direttamente dal processo d'integrazione per coordinate polari. Negli ultimi anni di sua vita, richiamato a quelle idee dalla lettura di una Nota del Gutzmer, riuscì con l'uso diretto di quei lemmi ad eliminare dalla deduzione della formula di Kirchhoff ogni intervento di considerazioni ed elementi non strettamente necessari alla questione; mettendo così in luce la vera origine analitica di quella formula importantissima <sup>1)</sup>.

Prima e dopo lui altri autori s'occuparono dell'estensione di detta formula negli spazi di due o più dimensioni: primo fra tutti il Prof. Volterra, che in due Note pubblicate nel 1892 <sup>2)</sup> mostrò le differenze che esistono tra il caso delle tre variabili e quelli di due o più, e dedusse con metodo molto ingegnoso le formule che fanno perfettamente riscontro a quelle di Kirchhoff.

1) Rend. Acc. Lincei. 1895. "Sull'espressione data da Kirchhoff.....", "Sul teorema di Kirchhoff..".

2) Rend. Acc. Lincei. 1892. "Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi..", e "Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi..".

Ispirandomi alle idee del Beltrami, io mi sono proposto in questa Nota di far scaturire tutte quelle formule da un unico principio analitico molto semplice e quasi intuitivo, e di estenderle alle soluzioni di certe equazioni differenziali del quart'ordine, che si presentano in alcune questioni di fisica matematica.

1. — Indichiamo in generale con  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, r)$  una funzione di  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e di  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$  regolare in un certo campo. Individuando i punti del campo mediante le coordinate polari, denoteremo con  $\frac{du}{dr}$  la derivata di  $u$  rispetto alla  $r$  che comparisce implicitamente anche nelle  $x$ , e con  $\frac{du}{dx_s}$  la derivata di  $u$  rispetto alla  $x_s$  quando si pensa che essa comparisce anche in  $r$ ; mentre i simboli  $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial x_s}$  di derivate parziali saranno adoperati nel senso ordinario <sup>1)</sup>.

Le formule (0) e (0') di Gauss valgono anche quando in  $u$  entra esplicitamente la  $r$ ; allora si scrivono nella forma

$$(1) \quad \int_s \frac{1}{r} \frac{du}{dr} ds = \int_{\sigma} u \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma - \sigma_0 u_0$$

$$(1') \quad \int_s \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} ds = \int_{\sigma} u \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma - \sigma_0 u_0.$$

È noto che il lemma di Gauss si estende allo spazio a  $n$  dimensioni. Per la funzione  $u$  precedente si ha

1) Per le derivate secondo la normale si useranno i due simboli  $\frac{du}{dn}$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , oppure  $\frac{du}{dN}$  e  $\frac{\partial u}{\partial N}$  nel significato seguente:

$$\frac{du}{dn} = \frac{du}{dN} = \sum \frac{du}{dx_s} \frac{dx_s}{dn}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial N} = \sum \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dn}.$$

$$(2) \quad \int_{s_n} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{du}{dr} ds_n = \frac{1}{n-2} \int_{\Omega} u \frac{d \frac{1}{r^{n-2}}}{dN} d\Omega - \Omega_0^{(n)} u_0,$$

essendo  $s_n$  lo spazio interno all'ipersuperficie chiusa  $\Omega$ ;  $x_1^0, x_2^0 \dots$

un punto di  $s_n$ ;  $\Omega_0^{(n)} = \frac{2}{\frac{n-2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}$  per  $n$  pari, e

$$\Omega_0^{(n)} = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1.3.5 \dots n-2} \text{ per } n \text{ dispari.}$$

Ricordiamo inoltre un secondo lemma di Gauss espresso dalla formula

$$(2') \quad \int_{s_n} \frac{du}{dx_s} ds_n = - \int_{\Omega} u \frac{dx_s}{dN} d\Omega,$$

valida anche nel caso che in  $(x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0)$  la funzione diventi infinita come  $\frac{1}{r^{n-1}}$ , o come  $\log r$  se lo spazio è a due dimensioni.

Ciò posto, consideriamo l'identità

$$\frac{d^2 u}{dx_s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x_s} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial r} \frac{\partial r}{\partial x_s} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_s^2}.$$

Sommando da 1 a  $n$ , e notando che

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial r} \frac{\partial r}{\partial x_s} = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial x_s}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

si trae subito

$$\sum_1^n \frac{d^2 u}{dx_s^2} = \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Ora, denotando con  $f(r)$  una funzione qualunque della sola  $r$ , si ha

$$\sum_1^n \frac{d}{dx_s} \left( f(r) \frac{du}{dx_s} \right) = f'(r) \frac{du}{dr} + f(r) \sum_1^n \frac{d^2 u}{dx_s^2};$$

quindi per la precedente

$$(3) \quad \sum_1^n \frac{d}{dx_s} \left( f(r) \frac{du}{dx_s} \right) = f'(r) \frac{du}{dr} + 2 \frac{f(r)}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ + f(r) \left\{ \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}.$$

Parimenti, osservando che

$$\sum_1^n \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

e che

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r},$$

si trae subito

$$(4) \quad \sum_1^n \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ + \left( \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Sono queste (3) e (4) le due identità fondamentali, dalle quali, come ora vedremo, si deducono le formule di Kirchhoff e di Volterra mediante la diretta applicazione dei lemmi di Gauss.

2. — Sia  $u$  una funzione regolare <sup>1)</sup> insieme a tutte le sue derivate parziali prime di  $x_1, x_2, \dots, x_n, t, r$ , soddisfacente all'equazione

$$(e) \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1) S'intende in un campo  $s_n$  limitato da  $\Omega$ .

per  $r = \text{cost.}$ , e all'equazione

$$(e') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

quando si pensano costanti le  $x$  che vi entrano esplicitamente. Allora l'ultimo termine della (4) è nullo; e l'applicazione ad essa dei lemmi di Gauss dà subito

$$(5) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dN} d\Omega ;$$

formula generale, che per  $u$  indipendente da  $r$  e  $t$  si riduce a quella ben nota  $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} d\Omega = 0$ .

L'esistenza di funzioni  $u$  soddisfacenti all'ipotesi fatte si dimostra immediatamente. Sia  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  un integrale regolare qualunque della (e); sarà anche integrale

$$u = \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n, t + r\xi) \phi(\xi) d\xi .$$

Vediamo se è possibile determinare  $\phi(\xi)$  in guisa che questo  $u$  soddisfi la (e'), quando si pensano le  $x_s$  costanti. Derivando, e facendo una integrazione per parti, si trova facilmente che deve essere

$$\frac{1}{r} \int_{-1}^1 \frac{\partial f}{\partial t} \left\{ (1 - \xi^2) \phi' - 2\xi \phi \right\} d\xi + \frac{n-1}{r} \int_{-1}^1 \xi \frac{\partial f}{\partial t} \phi d\xi = 0$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm 1} (1 - \xi^2) \phi(\xi) = 0 .$$

Ora se poniamo

$$(1 - \xi^2) \phi' + (n-3) \xi \phi = 0 ,$$

ricaviamo per  $\phi$  l'espressione

$$\phi = (1 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} ,$$

che soddisfa alle condizioni imposte. Dunque possiamo prendere

$$u = \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n, t + r\xi) (1 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi;$$

che ben si vede esser regolare. E poichè  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  è una soluzione regolare qualunque di  $\Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ , la (5) esprime una proprietà degli integrali regolari di quella equazione, qualunque sia  $n$ ; proprietà che fu già indicata dal Professor Volterra.

Ma qui possiamo aggiungere una nuova osservazione; e cioè, che nel caso di  $n > 3$  la (5) esprime una proprietà alquanto più generale di quella ora accennata. Infatti, è chiaro che la (5) è valida ancora se si suppone che per  $r=0$  la  $u$  diventa infinita come  $\frac{1}{r^p}$ , essendo  $p < n-2$ ; perchè in tal caso  $r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r}$  è regolare, e tende a zero per  $r=0$ . Allora prendiamo  $u$  come precedentemente, ma supponiamo  $\phi$  funzione di  $\xi$  e  $r$ ; ossia

$$u = \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n, t + r, \xi) \phi(r, \xi) d\xi,$$

e vediamo di determinare  $\phi(r, \xi)$  in guisa che la  $u$ , che per  $r = \text{cost.}$  soddisfa l'equazione (e), soddisfi anche l'equazione (e') quando si pensano costanti le  $x$ . Derivando e sostituendo, e poi notando che con due successive integrazioni per parti risulta

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \phi d\xi &= \frac{2}{r} \int_{-1}^1 \xi \frac{\partial f}{\partial t} \phi d\xi + \\ &+ \frac{1}{r^2} \int_{-1}^1 f \cdot \left\{ (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right\} d\xi, \end{aligned}$$

quando sia

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm 1} (1 - \xi^2) \phi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm 1} (1 - \xi^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0,$$

si trova facilmente che deve essere verificata l'equazione

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 \xi \frac{\partial f}{\partial t} \left( 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{n-3}{r} \phi \right) d\xi + \frac{1}{r^2} \int_{-1}^1 \left( (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \right. \\ \left. - 2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) r \cdot d\xi - \int_{-1}^1 f \cdot \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Se ora si uguagliano a zero i coefficienti di  $f$  e di  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , risulta subito per  $\phi$  la forma

$$\phi = r^{-\frac{n-3}{2}} \cdot \psi(\xi),$$

ove  $\psi$  è una soluzione dell'equazione ipergeometrica <sup>1)</sup>

$$(1 - \xi^2) \psi'' - 2 \xi \psi' + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \psi = 0.$$

Se dunque si sceglie  $\psi$  in guisa che le condizioni sopra enunciate siano soddisfatte, avremo una  $u$  che diventa infinita come  $\frac{1}{r^{n-3}}$  ( $n > 3$ ), e che sostituita nella (5) fornisce una proprietà per ogni  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  soluzione regolare di  $\Delta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

3. — Prendiamo ora l'identità (3), e facciamo  $f(r) = \frac{1}{r}$ ,  $n = 3$ ; si ottiene

$$\sum_1^3 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dx_s} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left( \Delta_1 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

1) L'equazione ipergeometrica  $t(1-t)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)y' - \alpha\beta y = 0$  colla sostituzione  $t = \frac{1-x}{2}$  si riduce a  $(1-x^2)y'' - 2\left(\gamma - \frac{\alpha + \beta + 1}{2}(1-x)\right)y' - \alpha\beta y = 0$ , che per  $\alpha = -\frac{n-3}{2}$ ,  $\beta = \frac{n-1}{2}$ ,  $\gamma = 1$  coincide con l'equazione trovata.

Sia  $u(x_1, x_2, x_3, t, r)$  funzione regolare soddisfacente all'equazione (e) per  $r = \text{cost.}$ , e all'equazione  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$  quando si pensano le  $x$  costanti. Allora l'ultimo termine del secondo membro va a zero; e l'applicazione dei lemmi di Gauss conduce subito alla formula di Kirchhoff.

$$(6) \quad \sigma_0 u_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = \iint \left( u \frac{d}{dn} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) d\sigma + \\ + 2 \int \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dn} \frac{d\sigma}{r}.$$

che si riduce a quella di Green quando  $u$  è indipendente da  $r$  e  $t$ . Alle condizioni imposte alla  $u$  si soddisfa interamente prendendo

$$u = f(x_1, x_2, x_3, t - r),$$

in cui  $f(x_1, x_2, x_3, t)$  è una soluzione regolare qualunque dell'equazione (e).

Più generalmente supponiamo  $n \geq 3$ , e nella (3) poniamo  $f(r) = \frac{1}{r^{n-2}}$ ; essa diventa

$$\sum_1^n \frac{d}{dx_s} \left( \frac{1}{r^{n-2}} \frac{du}{dx_s} \right) = - \frac{n-2}{r^{n-1}} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{r^{n-2}} \left( \Delta_1 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Sia  $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t, r)$  una soluzione regolare dell'equazione (e), quando si pensa  $r$  costante, e una soluzione di

$$(e^*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{n-3}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

quando si considerano le  $x$  costanti. In tale ipotesi l'ultimo termine del secondo membro della identità precedente è nullo; e l'applicazione dei lemmi di Gauss conduce alla formula



$$(7) \quad (n-2) \Omega_0^n u(x_1^0 \dots x_n^0, t) = \int_{\Omega} \left( u \frac{d \frac{1}{r^{n-2}}}{dN} - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{du}{dN} \right) d\Omega + \\ + 2 \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dN} d\Omega,$$

che è un'estensione di quella di Kirchhoff, e si riduce a quella di Green quando  $u$  è indipendente da  $r$  e  $t$ . Questa formula è valida per  $n$  dispari; perchè in tal caso si dimostra l'esistenza di funzioni  $u$  soddisfacente alle condizioni imposte. Sia  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  una soluzione regolare qualunque della (c). Mutando  $t$  in  $t-r$ , la funzione

$$u = \sum_{i=0}^s \lambda_i r^i f^{(i)},$$

ove  $\lambda_i = \text{cost.}$  e  $f^{(i)} = \frac{\partial^i f}{\partial t^i} = (-1)^i \frac{\partial^i f}{\partial r^i}$ , è ancora soluzione della (e) per  $r = \text{cost.}$

Vediamo se si possono determinare le  $\lambda_i$  in guisa che sia anche una soluzione di (e'), quando si considerano costanti le  $x$ . Derivando, si ottiene facilmente

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{i=0}^{s-1} \left\{ (i+1) \lambda_{i+1} - \lambda_i \right\} r^i f^{(i+1)} - \lambda_s r^s f^{(s+1)}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \sum_{i=1}^{s-1} \left\{ i(i+1) \lambda_{i+1} - 2i \lambda_i + \lambda_{i-1} \right\} r^{i-1} f^{(i+1)} - \\ - (2s \lambda_s - \lambda_{s-1}) r^{s-1} f^{(s+1)} + \lambda_s r^s f^{(s+2)};$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{K}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{K}{r} (\lambda_1 - \lambda_0) f' + \sum_{i=1}^{s-1} \left\{ (i-K)(i+1) \lambda_{i+1} + \right. \\ \left. + (K-2i) \lambda_i + \lambda_{i-1} \right\} r^{i-1} f^{(i+1)} + \\ + \left\{ (K-2s) \lambda_s + \lambda_{s-1} \right\} r^{s-1} f^{(s+1)} + \lambda_s r^s f^{(s+2)} - \sum_{i=0}^s \lambda_i r^i f^{(i+2)}$$

in cui  $K$  è una costante. Affinchè il secondo membro sia nullo bisogna che risultino soddisfatte le condizioni

$$\lambda_1 = \lambda_0, \quad K - 2s = 0$$

$$(i - K)(i + 1)\lambda_{i+1} + (K - 2i)\lambda_i = 0 \quad \text{per } (i = 1, 2, \dots, s-1);$$

dalle quali si ricava  $K = 2s$ , e in generale

$$\lambda_h = \frac{2^{h-1}}{h} \frac{(s-1)(s-2)\dots(s-h+1)}{(2s-1)(2s-2)\dots(2s-h+1)} \quad (\text{posto } \lambda_s = 1).$$

Nel nostro caso deve essere  $K = 2s = n - 3$ ; ossia  $n$  dispari. Allora  $n = 2m + 1$ , la formula (7) diventa

$$(7') \quad (2m-1)\Omega_0^{(2m+1)} f(x_1^0, \dots, x_n^0, t) = \int_{\Omega} \left( u \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2m-1}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^{2m-1}} \frac{du}{dN} \right) d\Omega + 2 \int_{\Omega} \frac{1}{r^{2m-1}} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dN} d\Omega,$$

in cui

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t-r) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2^{i-1}}{i} \binom{m-1}{i} r^i \frac{\partial^i f}{\partial t^i};$$

la quale, a parte le notazioni, coincide con quella del Professore Volterra.

4. — Consideriamo adesso l'identità (4), e facciamo  $n = 2$ ; si ha

$$\sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left( \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Sia  $u(x_1, x_2, t, r)$  una funzione soddisfacente all'equazione (e) quando si tiene  $r$  costante, e all'equazione

$$(e'') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

quando si considerano costanti le  $x$ . Supponiamo inoltre che per  $r=0$  si abbia

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r} = u_0(x_1^0, x_2^0, t),$$

ove  $u_0$  è regolare e soddisfa ancora alla (e).

Allora l'ultimo termine dell'identità precedente è nullo; e coll'applicazione dei lemmi di Gauss si trova subito.

$$(8) \quad \sigma_0 u_0 = \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dn} d\sigma.$$

Per mostrare l'esistenza di funzioni  $u$  soddisfacenti alle condizioni imposte, indichiamo con  $f(x_1, x_2, t)$  una soluzione regolare qualunque della (e); la funzione

$$u = \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, t + r\xi) \phi(r, \xi) d\xi$$

è ancora una soluzione di quella equazione. Vediamo di determinare  $\phi$  in guisa che sia anche soluzione della (e''), quando si considerano costanti le  $x$ . Procedendo come si è fatto nella prima parte del § 2, si trova che deve essere

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \left( (1 - \xi^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - 2\xi \phi \right) + 2\xi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \xi \phi = 0$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm 1} (1 - \xi^2) \phi = 0.$$

Dalla prima si ricava

$$\phi = \log r \cdot \psi(\xi) + \Phi(\xi);$$

e dalla seconda

$$(1 - \xi^2) \psi' - \xi \psi = 0, \quad (1 - \xi^2) \Phi' = \xi \Phi = -2\xi \psi;$$

ossia

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{e} \quad \Phi = \frac{\log(1 - \xi^2)}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

La condizione del limite è soddisfatta; e si ha infine

$$(9) \quad u = \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, t + r\xi) \log \{r(1 - \xi^2)\} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Queste  $u$  soddisfano a tutte le condizioni imposte; essendo anche

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u}{\lg r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r} = \pi f(x_1^0, x_2^0, t).$$

L'insieme delle (8) e (9) costituisce la formula di Volterra per l'equazione delle onde cilindriche; formula che fa riscontro a quella di Kirchhoff.

Per  $n$  pari e maggior di 2, prendiamo ancora l'identità

$$\sum_1^{2m} \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) = \frac{1}{r^{m-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{2m-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left\{ \Delta_1 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2m-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}.$$

e supponiamo che  $u(x_1, x_2, \dots, x_{2m}, t, r)$  sia una soluzione dell'equazione (e) per  $r = \text{cost.}$ , e una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2m-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

quando si considerano costanti le  $x_s$ . Ammettiamo inoltre che sia

$$-(2m-2) \lim_{r \rightarrow 0} r^{2m-2} u = \lim_{r \rightarrow 0} r^{2m-1} \frac{\partial u}{\partial r} = u_0(x_1^0, \dots, x_{2m}^0, t),$$

con  $u_0$  soddisfacente alla (e) rispetto alle variabili  $x^0$ .

In questa ipotesi l'ultimo termine dell'identità è nullo, e l'applicazione dei lemmi di Gauss conduce subito alla formula

$$(8') \quad \Omega_0^{2m} u_0 = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dn} d\Omega,$$

dello stesso tipo della (8). Le  $u$  soddisfacenti alle ipotesi fatte

esistono; basta infatti applicare  $m - 1$  volte l'operazione  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  alla (9) estesa alle  $2m$  variabili <sup>1)</sup>.

5. — Il metodo semplicissimo ora adoperato per ritrovare formule note, si presta ancora a molte e varie estensioni della formula di Kirchhoff. Qui voglio considerare soltanto quelle che per le applicazioni possono avere maggior importanza.

Sia  $u$  una funzione regolare di  $x_1, x_2, x_3, t$  e  $r$ ; sussiste la solita identità

$$\sum_1^3 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right).$$

Indichiamo con  $v$  un'altra funzione come la  $u$ ; ma in essa consideriamo costante la  $r$  che vi comparisce esplicitamente. Allora è evidente l'identità

$$\sum_1^3 \frac{d}{dx_s} \left( r \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) = \frac{\partial v}{\partial r} + r \Delta_2 v,$$

in cui abbiamo scritto  $\frac{\partial v}{\partial r}$  in luogo di  $\frac{\partial v}{\partial r}$ , perchè qui rappresenta la derivata di  $v$  rispetto a  $r$ , in quanto la  $r$  comparisce solo implicitamente nelle  $x$ . Supponiamo che sia

$$v = \left( \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)_{r = \text{cost.}}^2);$$

poi moltiplichiamo la 2ª identità per  $\frac{1}{2}$ , e sommiamola con la prima. Si ottiene subito

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + \frac{1}{2} \sum_1^3 \frac{d}{dx_s} \left( r \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) = \\ = - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot v) + \\ + \frac{r}{2} \left( \Delta_2 u - \frac{\partial^2 \Delta_2 u}{\partial r^2} \right). \end{aligned}$$

1) Vedi la Nota citata del Volterra.

2) Con ciò s'intende che si deve tenere  $r$  costante ogni qualvolta si opera su  $v$  con derivazione o integrazione.

Sia ora  $f(x_1, x_2, x_3, t)$  una soluzione regolare dell'equazione

$$(10) \quad \Delta_2 \left( \Delta_2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0;$$

e poniamo

$$u = f(x_1, x_2, x_3, t - r).$$

È manifesto che questa  $u$  soddisfa l'equazione

$$\Delta_2 u - \frac{\partial^2 \Delta_2 u}{\partial r^2} = 0;$$

per conseguenza l'ultimo termine dell'identità precedente si annulla, e l'applicazione ad essa dei lemmi di Gauss conduce immediatamente alla formula

$$\begin{aligned} \sigma_0 u_0 = \int_{\sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left( v \frac{\partial r}{\partial n} - r \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma + \\ + \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma, \end{aligned}$$

che costituisce l'estensione di quella di Kirchhoff alle soluzioni dell'equazione (10). Per  $u$  indipendente da  $t$  e da  $r$  essa si riduce alla formula di Green per le funzioni biarmoniche <sup>1)</sup>.

6. — Passiamo ora al caso delle due variabili. Sia  $u = u(x_1, x_2, r, t)$ ; sussiste l'identità già usata al § 4,

$$\sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left( \Delta_2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Indichiamo inoltre con  $v$  una funzione come la  $u$ ; ma in essa consideriamo costante la  $r$  che vi compare esplicitamente. Avremo l'identità evidente

$$\sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) = 2r \frac{\partial v}{\partial r} + r^2 \Delta_2 v,$$

1) A proposito dell'equazione (10) vedi le ultime ricerche del Prof. Somigliana sulla dinamica dei mezzi isotropi; principalmente " Della propagazione delle onde.... " Nuovo Cimento 1906.

in cui  $\frac{\delta v}{\delta r}$  ha il significato già detto di sopra. Facciamo

$$v = \left( \Delta_1 u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r = \text{cost.}};$$

poi sommiamo la prima identità colla seconda moltiplicata per  $\frac{1}{4}$ : si ottiene la nuova identità

$$\begin{aligned} \sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + \frac{1}{4} \sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{2r} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 v) + \frac{r^2}{4} \left( \Delta_1 u - \frac{\partial^2 \Delta_2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_1 u}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Sia ora  $f(x_1, x_2, t)$  una soluzione regolare (insieme a quelle derivate che occorrerà considerare) dell'equazione

$$(10') \quad \Delta_1 f - \frac{\partial^2 \Delta_2 f}{\partial t^2} = 0;$$

e poniamo

$$u = \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, t + r\xi) \log r (1 - \xi^2) \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Per quanto si è detto al § 4 risulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \log r (1 - \xi^2) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}};$$

e quindi, come si vede facilmente,

$$\Delta_1 u - \frac{\partial^2 \Delta_2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_1 u}{\partial r} = \Delta_1 f - \frac{\partial^2 \Delta_2 f}{\partial t^2} = 0.$$

allora l'identità precedente si riduce a

$$\begin{aligned} \sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + \frac{1}{4} \sum_1^2 \frac{d}{dx_s} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{2r} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 v). \end{aligned}$$

Tenendo ora presente (vedi § 4) che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r} = \pi f(x_1^0, x_2^0, t),$$

e che

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 v = 0,$$

perchè nella  $v$  la  $r$  è considerata costante, coll'applicazione dei lemmi di Gauss si ha immediatamente

$$\begin{aligned} \pi \sigma_0 f(x_1^0, x_2^0, t) &= \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dn} d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\sigma} \left( v \frac{\partial r^2}{\partial n} - r^2 \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Questa formula è l'estensione di quella di Kirchhoff alle soluzioni regolari dell'equazione (10').

Roma, 31 Maggio 1907.

---