Abelsche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern.

Von

Rudolf Fueter in Karlsruhe.

Einleitung.

In meinen früheren Arbeiten*) habe ich Abelsche Gleichungen in beliebigen Zahlkörpern betrachtet und die Entwicklungen dann auf den Fall der komplexen Multiplikation, d. h. der quadratisch-imaginären Körper, angewandt. In der vorliegenden Untersuchung beschränkte ich mich von vornherein auf den Fall, daß ein quadratisch-imaginärer Körper zugrunde gelegt ist. Es gelang mir dadurch, die Theorie bedeutend zu systematisieren und zu vereinfachen. Außerdem waren verschiedene Lücken und Fehler zu verbessern. Insbesondere sind die im Grad der Gleichungen enthaltenen Primzahlen, die früher nur andeutungsweise behandelt wurden, jetzt vollständig berücksichtigt worden. Es zeigte sich, daß dieselben bedeutend mehr Schwierigkeiten bereiten und eines ziemlichen Apparates von Hilfssätzen bedürfen.

Die Theorie ist soweit gefördert, daß die Körper, die die *komplexe Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen* liefern, völlig beherrscht werden. Damit ist die Grundlage geschaffen, um das interessanteste Problem, dasjenige der *Vollständigkeit*, in Angriff nehmen zu können: *Sind alle in einem quadratisch-imaginären Körper Abelschen Gleichungen in den Körpern der singulären Moduln und der Einheitswurzeln enthalten?* Diese Frage kann nur teilweise bejaht werden, nämlich im Falle eines *ungeraden* Relativgrades. *Jede in einem quadratisch-imaginären Körper Abelsche Gleichung von ungeradem Relativgrad ist durch Einheitswurzeln und singuläre Moduln lösbar.* Die Primzahl 2 dagegen nimmt eine Ausnahmestellung ein**). Der einfache, zu $k(\sqrt{-1})$ relativ-zyklische Körper

*) Die Theorie der Zahlstrahlen, J. f. Math. 130, S. 197 und Bd. 132, S. 255. Vgl. auch: Die Klassenkörper der kompl. Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie, Teubner 1911.

**) Vgl. über die Bedeutung des Problemes Hilbert, Mathematische Probleme. Gött.

$$\sqrt[4]{1+2i}, \quad i=\sqrt{-1}$$

ist z. B. *nicht* Unterkörper der Körper der Einheitswurzeln und singulären Moduln, wie im 5. Kapitel bewiesen wird. Einzig falls die Abelsche Relativgruppe in bezug auf den quadratisch-imaginären Körper sich aus lauter Substitutionen S zusammensetzen läßt, die mit der quadratischen Substitution s des Grundkörpers die Beziehung eingehen

$$sSs = S^{\pm 1}$$

(was bei ungeradem Relativgrad immer möglich ist), sind die Körper in den oben angegebenen enthalten. In den beiden noch möglichen Fällen

$$sSs = S', \quad S' \neq S^{\mu},$$

$$sSs = S^{\pm 1 + 2^{\nu - 1}}, \quad S^{2^\nu} = 1$$

wird dies im allgemeinen nicht mehr der Fall sein. Man muß dann die *Weberschen Teilungskörper* der elliptischen Funktionen zu Hilfe nehmen; *die Vollständigkeit wird somit erst erhalten, wenn die singulären Moduln durch die singulären elliptischen Funktionen mit singulärem Periodenverhältnis ersetzt werden.*

Prinzipiell möchte ich hervorheben, daß die vorliegende Arbeit aufs neue zeigt, wie äußerst wichtig die *Galoissche Gruppe* des vorgelegten Körpers für die *zahlentheoretische* Untersuchung ist. Der entscheidende Schritt in dieser Hinsicht ist durch die fundamentale Arbeit von Hilbert*) über Galoissche Körper gemacht worden. Durch diese Arbeit ist die tiefere Einsicht in das zahlentheoretische Wesen der Zahlkörper ermöglicht worden, indem sie den Zusammenhang mit der Galoisschen Gruppe aufdeckte. Meine Untersuchungen machen beständig von Hilberts Begriffsbildung Gebrauch und setzen deren Kenntnis voraus. Die wichtigsten Sätze betreffen die Trägheits- und Verzweigungsgruppe der Primideale. Sie zeigen, wie den gruppentheoretischen Eigenschaften des Oberkörpers zahlentheoretische Eigenschaften des Grundkörpers entsprechen.

Außerdem werden die Arbeiten Webers über die in Linearformen enthaltenen Primzahlen eines imaginär-quadratischen Körpers wesentlich be-

---

Nachr. 1900, S. 277, Problem 12. Der Ausnahmefall ist in meinen früheren Arbeiten durch einen gruppentheoretischen Fehlschluß übersehen worden (J. f. Math. 130, S. 207). Andererseits ist der von H. Weber: Algebra III (1908), S. 620 ausgesprochene Satz nur für Teiler richtig, die Primidealpotenzen sind, nicht aber für zusammengesetzte Teiler, indem die Bemerkung am Schluß von § 158 (S. 592) nicht stichhaltig ist. Es wird somit wirklich erst die Vollständigkeit erhalten, wenn die Teilungskörper hinzukommen, wie weiterhin gezeigt wird.

*) Hilbert, Gött. Nachr. 1894 S. 224 und „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper", Bericht erst. der deutsch. Math.-Ver. 1897, S. 247. Dieser Bericht wird im folgenden kurz als „Zahlbericht" zitiert werden.

nutzt. Diese schönen Resultate stehen mit der Theorie der relativ-Abelschen Oberkörper in innigstem Zusammenhange und sind von Weber im III. Bande seiner Algebra dargestellt worden. Sie sind grundlegend für meine Betrachtungen und bilden das einzige direkte, transzendente Element der Beweisführung.

Der *Inhalt der Arbeit* ist der folgende: Das *erste* Kapitel beginnt mit der Definition von Ring und Strahl im Grundkörper. Mit dem Strahl steht der aus gewissen Körpern der Einheitswurzeln und singulären Moduln zusammengesetzte Körper in enger Beziehung. Die Eigenschaften dieses Körpers werden, soweit bisher möglich, aus den bekannten Eigenschaften der Körper der Einheitswurzeln und singulären Moduln hergeleitet und die Galoissche Gruppe bestimmt.

Das *zweite* Kapitel behandelt beliebige Oberkörper mit einer Gruppe, wie sie die im 1. Kapitel besprochenen Körper besitzen. Für die in der Relativdiskriminante enthaltenen Primideale wird die Trägheits- und Verzweigungsgruppe näher bestimmt. Dadurch gelingt es, jedem Oberkörper den Führer eines Strahls des Grundkörpers zuzuordnen, so daß beim Zusammensetzen zweier Oberkörper ein Oberkörper entsteht, dem als Führer das kleinste gemeinsame Vielfache der den beiden Körpern zugeordneten Führer zugeordnet ist.

Das *dritte* Kapitel bringt die Einteilung der Klassen des relativ-Abelschen Oberkörpers in Geschlechter. Es wird bewiesen, daß nicht alle möglichen Geschlechter existieren, sondern daß die Anzahl der existierenden gleich ist dem Quotienten aus der Anzahl aller möglichen Geschlechter und dem Relativgrad.

Das *vierte* Kapitel bestimmt die Diskriminante der im 1. Kapitel aufgestellten Körper, d. h. insbesondere der Körper der singulären Moduln.

Das *fünfte* Kapitel behandelt die Frage der Vollständigkeit. Der Satz über die Anzahl der existierenden Geschlechter gibt bei ungeraden Relativgraden ohne weiteres die Antwort. Für die Primzahl 2 sind die Resultate oben schon angeführt. Schließlich werden die Oberkörper kurz besprochen, denen ein Führer zugeordnet ist, der keine ganze rationale Zahl, sondern ein beliebiges Ideal des Grundkörpers ist.

Kapitel I.

Die Grundlagen.

1. Der Ring*). Gegeben sei ein quadratisch-imaginärer Körper $k = k(\sqrt{m})$, wo m ohne quadratischen Teiler angenommen wird;

$$f = l_1^{r_1} l_2^{r_2} \cdots l_n^{r_n}$$

sei eine beliebige positive, ganze rationale Zahl, wo $l_1, l_2, \cdots, l_n$ die voneinander verschiedenen in f enthaltenen Primzahlen bedeuten.

Jede Zahl α von k, deren Nenner einen auch in ihrem Zähler enthaltenen größten gemeinsamen Idealteiler mit f gemein hat, liegt im Ring mit dem Führer f (kurz im Ring f), wenn

$$\alpha \equiv a \pmod{f},$$

wo a irgend eine rationale Zahl ist; α heißt dann Ringzahl.

Zwei zu f prime Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k heißen äquivalent im Ring f, wenn

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = (\alpha),$$

und α so mit einer Einheit multipliziert werden kann, daß eine Ringzahl entsteht. Alle zueinander äquivalenten Ideale bilden eine *Ringklasse;* die Ringklassenanzahl h_r ist endlich; ist h die Klassenanzahl von k, so ergibt sich nach Dedekind**):

$$\frac{h_r}{h} = \frac{\varphi(f)}{\varphi_r(f)} \frac{w_r}{w} = \frac{2}{w} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} l_i^{2(r_i-1)}(l_i-1)\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}(l_i-1)},$$

$$h_r = \frac{2}{w}\left\{\prod_{i=1}^{n} l^{r_i-1}\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right)\right\} h.$$

d bedeute dabei stets die negativ genommene Diskriminante von k.

2. Der Strahl. *Jede Ringzahl α, deren Norm $\equiv 1 \pmod{f}$ ist, liege im Strahl mit dem Führer f* (kurz im Strahl f), *α heißt dann Strahlzahl.*

Die Strahlzahlen reproduzieren sich durch Multiplikation und Division; sie sind zu f prim, d. h. der größte gemeinsame Idealteiler ihres Nenners mit f ist auch der größte gemeinsame Idealteiler ihres Zählers mit f.

---

*) Siehe für die Begriffe Ring und Strahl: R. Fueter: Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation etc., Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 1911, Bd. 20, S. 6 u. ff.

**) Zahlbericht, S. 245.

Zwei zu f prime Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k heißen äquivalent im Strahl mit dem Führer f (oder äquivalent (mod f)), *wenn*

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = (\alpha),$$

und α so mit einer Einheit multipliziert werden kann, daß eine Strahlzahl entsteht. Wir schreiben hierfür kurz

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cong 1 \pmod f.$$

Sind zwei Ideale einem dritten äquivalent (mod f), so sind sie auch untereinander äquivalent (mod f). Alle zueinander (mod f) äquivalenten Ideale bilden deshalb eine *Strahlklasse.* Die Strahlklassenzahl h_s ist endlich; um sie zu berechnen, bedenken wir, daß jede Ringzahl $\equiv a$ (mod f), also ihre Norm $\equiv a^2$ (mod f). Nun gibt es $\varphi_r(f)$ Kongruenzklassen (mod f), die Ringzahlen enthalten. Von diesen sind nur diejenigen Strahlzahlen, für die

$$a^2 \equiv 1 \pmod f.$$

Diese Kongruenz hat $2^{\varrho+\sigma}$ (mod f) inkongruente Lösungen*); dabei ist ϱ die Anzahl der in f enthaltenen voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen; $\sigma = 0$, wenn $f \not\equiv 0 \pmod 4$; $\sigma = 1$, wenn $f \equiv 0 \pmod 4$, $\not\equiv 0 \pmod 8$, und $\sigma = 2$, wenn $f \equiv 0 \pmod 8$. Somit bilden je $2^{\varrho+\sigma}$ Kongruenzklassen eine Strahlklasse, und alle Ringzahlen bilden

$$\frac{\varphi_r(f)}{2^{\varrho+\sigma}} = \frac{1}{2^{\varrho+\sigma}} \prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}(l_i-1)$$

verschiedene Strahlklassen. Die Klasse der Ringzahlen (Hauptringklasse) zerfällt deshalb in $\frac{\varphi_r(f)}{2^{\varrho+\sigma}}$ Strahlklassen, und da jede Ringklasse in gleichviele Strahlklassen zerfällt, so ist

$$\frac{h_s}{h_r} = \frac{1}{2^{\varrho+\sigma}} \prod_{i=1}^{n} l^{r_i-1}(l_i-1),$$

$$h_s = \frac{1}{w \cdot 2^{\varrho+\sigma-1}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} l^{2(r_i-1)}(l_i-1)\left(l_i - \left(\frac{d}{l_i}\right)\right) \right\} h.$$

3. Die Kreiskörper. Die Zahl $Z_1 = e^{\frac{2\pi i}{f}}$ legt einen im Bereich der rationalen Zahlen Abelschen Körper K_1 fest. Derselbe hat folgende Eigenschaften:

---

*) Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., Braunschweig 1894, S. 87.

1) *Der Grad von* K_1 *ist* $\varphi(f)=\prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}(l_i-1)$.*)

2) *Eine zu* f *prime Primzahl* p *zerfällt in* n *Primideale in* K_1, *wenn*

$$p^{\frac{\varphi(f)}{n}} \equiv 1 \pmod f,$$

und wenn keine niedrigere Potenz von p *dieser Bedingung genügt.***)

3) *Die Abelsche Gruppe von* K_1 *ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der zu* f *primen Kongruenzklassen* $(\operatorname{mod} f)$.***)

4) *Die Diskriminante von* K_1 *enthält alle und nur die Primteiler von* f.†) Hiervon bildet 2 eine Ausnahme, wenn es nur einfach in f enthalten ist.

4. Die Körper der singulären Moduln. Es sei f der Führer eines Ringes von k; $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{d}$ resp. $\omega=\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, wenn $m\equiv 1 \pmod 4$, sei mit positiv imaginärem Teil genommen. Dann wird durch $Z_2=j(f\omega)$ ein zu k relativ-Abelscher Körper K_2 festgelegt††); $j(z)$ bedeute die vollständige Invariante der elliptischen Modulfunktionen†††). K_2 hat folgende Eigenschaften:

1) K_2 *ist absolut Galoissch und hat den Relativgrad*

$$h_r=\frac{2}{w}\left\{\prod_{i=1}^{n} l_i^{r_i-1}\left(l_i-\left(\frac{d}{l_i}\right)\right)\right\} h$$

in bezug auf k†*).

2) *Ein zu* f *primes Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* k *zerfällt in* K_2 *in* n *Primideale, wenn*

$$\mathfrak{p}^{\frac{h_r}{n}} \sim 1$$

und im Ring f *liegt, und wenn keine niedrigere Potenz von* $\mathfrak{p}$ *dieser Bedingung genügt.* Hiervon können eine endliche Anzahl in einer bestimmten Diskriminante enthaltene Primideale ausgeschlossen sein††*).

3) *Die Relativgruppe von* K_2 *in bezug auf* k *ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Ringklassen mit dem Führer* f *von* k†††*).

---

*) Zahlbericht, S. 332. **) Zahlbericht, S. 333.

***) Zahlbericht, S. 337, 338. †) Zahlbericht, S. 332, 333.

††) Weber: Algebra III (1908), S. 423, 427, 441—442. Ist $m\equiv 1 \pmod 4$, so entsprechen dem Ring die Formen 2. Art. Siehe hierüber die frühere Darstellung von Weber: Ellipt. Funkt. und algebr. Zahlen, 1891, S. 338 u. ff.

†††) Weber: Algebra III (1908), S. 153.

†*) Weber: Algebra III (1908), S. 427, 448.

††*) Weber: Algebra III (1908), S. 445 u. ff.

†††*) Weber: Algebra III (1908), S. 448.

Die der Eigenschaft 4 der Kreiskörper entsprechende Aussage von K_2 ist bisher noch nicht bewiesen. Ihr Beweis ist eine der Hauptaufgaben dieser Arbeit.

5. Der aus K_1 und K_2 zusammengesetzte Körper. Adjungiert man zu K_2 den Körper K_1, der zu demselben Führer f gehört, so erhalte man den Körper $K(f)$. Derselbe hat folgende Eigenschaften:

1) *$K(f)$ ist absolut Galoissch und relativ-Abelsch in bezug auf k. Sein Relativgrad in bezug auf k ist*

$$h_s = \frac{1}{w \cdot 2^{\varrho + \sigma - 1}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} l_i^{2(r_i - 1)} (l_i - 1) \left(l_i - \left(\frac{d}{l_i} \right) \right) \right\} h.$$

2) *Ein zu f primes Primideal $\mathfrak{p}$ von k zerfällt in $K(f)$ in n Primideale, wenn*

$$\mathfrak{p}^{\frac{h_s}{n}} \cong 1 \pmod{f},$$

und wenn keine niedrigere Potenz von $\mathfrak{p}$ dieser Bedingung genügt. Hiervon können eine endliche Anzahl in einer bestimmten Diskriminante enthaltene Primideale ausgeschlossen sein.

3) *Die Relativgruppe von $K(f)$ in bezug auf k ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen mit dem Führer f in k.*

Beweis von 1): $K(f)$ ist Galoissch, da K_1 und K_2 absolut Galoissch sind. Weber hat bewiesen, daß die Gleichungen von K_2 bei Adjunktion von Einheitswurzeln nur in der den Geschlechtern des Rings f entsprechenden Weise zerfallen*); d. h. K_2 enthält von Kreiskörpern nur**):

$\sqrt{(-1)^{\frac{l-1}{2}} l}$, wo l jede in fm enthaltene ungerade Primzahl ist;

$\sqrt{-1}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 4$, $m \equiv 1 \pmod 4$;

$\sqrt{-1}, \sqrt{2}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 8$, $m \equiv 1 \pmod 4$;

$\sqrt{2}$ oder $\sqrt{-2}$, wenn $f \equiv 1 \pmod 2$, $m \equiv 2 \pmod 4$;

$\sqrt{-1}, \sqrt{2}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 2$, $m \equiv 2 \pmod 4$;

$\sqrt{-1}$, wenn $m \equiv 3 \pmod 4$;

$\sqrt{-1}, \sqrt{2}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 4$.

---

*) Weber: Algebra III (1908), S. 619. Fueter, Gött. Nachr. 1913, S. 331—334.

**) Weber: Algebra III (1908), S. 513 u. ff. In der hier gegebenen einfachen Form bewiesen in Fueter: Der Klassenkörper der quadratischen Körper etc. Diss. Göttingen 1903, S. 5 u. ff.

Andererseits enthält K_1 nur folgende quadratische Unterkörper:

$\sqrt{(-1)^{\frac{l-1}{2}} l}$, wo l jede in f enthaltene ungerade Primzahl ist;

$\sqrt{-1}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 4$;

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$, wenn $f \equiv 0 \pmod 8$.

Gehen in f ϱ ungerade verschiedene Primzahlen auf, so haben K_1 und K_2 ϱ voneinander unabhängige quadratische Unterkörper gemein. Der Grad von $K(f)$ ist somit höchstens (nach 1) von 3. und 4.) $2\frac{\varphi(f)h_r}{2^\varrho}$. Ist $f \equiv 0 \pmod 2$, $\not\equiv 0 \pmod 4$, so haben K_1 und K_2 keinen weiteren Unterkörper gemein. Ist $f \equiv 0 \pmod 4$, $\not\equiv 0 \pmod 8$, so enthalten K_1 und K_2 noch $k(\sqrt{-1})$ gemein. Der Grad von $K(f)$ ist dann $2\frac{\varphi(f)h_r}{2^{\varrho+1}}$. Ist endlich $f \equiv 0 \pmod 8$, so haben K_1 und K_2 noch $k(\sqrt{2})$ gemeinsam. Der Grad von $K(f)$ ist $2\frac{\varphi(f)h_r}{2^{\varrho+2}}$. In allen Fällen ist der Relativgrad von $K(f)$ in bezug auf k nach 2. wegen der Bedeutung von σ:

$$\frac{\varphi(f)h_r}{2^{\varrho+\sigma}} = h_s.$$

Beweis von 2): Es sei n'' die kleinste Zahl, für die $\mathfrak{p}^{n''}$ im Ring (f) liege; n' die kleinste Zahl, so daß

$$n(\mathfrak{p})^{n'} \equiv 1 \pmod f.$$

Ist dann n_1 das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n'', so ist sicher

$$\mathfrak{p}^{n_1} \cong 1 \pmod f.$$

Andererseits ist n_1 auch die kleinste Zahl, für die diese Bedingung erfüllt ist; denn gäbe es ein $n^* < n_1$, für die

$$\mathfrak{p}^{n^*} \cong 1 \pmod f,$$

so müßte $\mathfrak{p}^{n^*}$ im Ring (f) liegen und

$$n(\mathfrak{p})^{n^*} \equiv 1 \pmod f.$$

n_1 wäre dann nicht das kleinste gemeinsame Vielfache der kleinsten Zahlen n' und n''.

Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ in $K(f)$ in $\frac{h_s}{n_1} = n$ Primideale zerfällt. Es seien Θ_1 und Θ_2 bestimmende Zahlen von (K_1, k) und K_2. Jede Zahl A von $K(f)$ kann dann so mit einer bestimmten von der Diskriminante abhängigen rationalen Zahl u multipliziert werden, daß

$$u \cdot \mathsf{A} = R(\Theta_1, \Theta_2)$$

eine rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten von Θ_1 und Θ_2 wird. Es sei $\mathfrak{p}$ in der rationalen Primzahl p enthalten und zu u prim:

a) $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$, $p = n(\mathfrak{p})$. Da $\mathfrak{p}$ in K_1 in $\frac{\varphi(f)}{n'}$, in K_2 in $\frac{h_r}{n''}$ Primideale zerfällt, so ist

$$\Theta_1^{p^{n'}} \equiv \Theta_1 \pmod p,$$
$$\Theta_2^{p^{n''}} \equiv \Theta_2 \pmod p,$$

somit

$$\mathsf{A}^{p^{n_1}} \equiv \mathsf{A} \pmod p.$$

Da der Relativgrad von $K(f)$ h_s ist, zerfällt somit $\mathfrak{p}$ in $K(f)$ in wenigstens $\frac{h_s}{n_1}$ Primideale. Würde $\mathfrak{p}$ in mehr Primideale zerfallen, so müßte ein $n^* < n_1$ existieren, für welches

$$\mathsf{A}^{p^{n^*}} \equiv \mathsf{A} \pmod p.$$

Da dies für jede Zahl A gelten müßte, so wäre auch

$$\Theta_1^{p^{n^*}} \equiv \Theta_1 \pmod p,$$
$$\Theta_2^{p^{n^*}} \equiv \Theta_2 \pmod p.$$

n_1 wäre dann nicht das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n''.

b) $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, $\mathfrak{p} = (p)$, $n' = n_1$, $n'' = 1$. Dann ist:

$$\Theta_1^{p^{2n_1}} \equiv \Theta_1 \pmod p,$$
$$\Theta_2^{p^{2}} \equiv \Theta_2 \pmod p,$$

somit

$$\mathsf{A}^{p^{2n_1}} \equiv \mathsf{A} \pmod p.$$

(p) zerfällt in $K(f)$ in $\frac{2h_s}{2n_1} = \frac{h_s}{n_1}$ Primideale. Würde (p) in mehr Primideale zerfallen, so müßte ein $n^* < n_1$ existieren, für das

$$\mathsf{A}^{p^{2n^*}} \equiv \mathsf{A} \pmod p,$$

also auch

$$\Theta_1^{p^{2n^*}} \equiv \Theta_1 \pmod p,$$

was der Annahme, daß $n_1 = n'$ die kleinste Zahl sei, die diese Kongruenz befriedige, widerspricht.

Beweis von 3): Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von k, und es seien wieder n' und n'' die kleinsten Exponenten, so daß

$$n(\mathfrak{a})^{n'} \equiv 1 \pmod f,$$
$$\mathfrak{a}^{n''} \sim 1 \text{ im Ring } f.$$

Dann gibt es nach Abschnitt 3. und 4. in K_1 eine Substitution S_1 und in K_2 eine Substitution S_2 der Relativgruppe, so daß aus $S_1{}^{r'} = 1$

und $S_2^{r''} = 1$ stets $r' \equiv 0 \pmod{n'}$, $r'' \equiv 0 \pmod{n''}$ folgt. Ist n das kleinste gemeinsame Vielfache von n' und n'', so ist

$$\mathfrak{a}^n \cong 1 \pmod{f}.$$

Ist

a) *n ungerade*, so kann, da K_1 und K_2 nur quadratische Unterkörper gemein haben können, $S_1^{x_1} S_2^{x_2}$ nur dann $= 1$ sein, wenn $x_1 \equiv 0 \pmod{n'}$, $x_2 \equiv 0 \pmod{n''}$. Somit hat die Substitution $S = S_1 S_2$ von $K(f)$ die Eigenschaft, daß erst ihre n^{te} Potenz die Einheitssubstitution wird.

b) *n gerade*, so kann entweder der gleiche Fall, wie für n ungerade eintreten, der sich gleich erledigt; oder es kann $S_1^{\frac{n}{2}} = S_2^{\frac{n}{2}}$, also $(S_1 S_2)^{\frac{n}{2}} = 1$ werden. Man setze, falls n' durch die höhere oder gleiche Potenz von 2 wie n'' teilbar ist, $S = S_1 S_2^2$. Dann ist sicher $S^n = S_1^n S_2^{2n} = 1$; dagegen $S^{\frac{n}{2}} = S_1^{\frac{n}{2}} S_2^n = S_1^{\frac{n}{2}} \neq 1$.

Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$, dessen n^{te} Potenz erst Strahlzahl wird, läßt sich somit eine Substitution S der Relativgruppe zuordnen, für die aus $S^r = 1$, $r \equiv 0 \pmod{n}$ folgt und $S^n = 1$ ist. Die Relativgruppe ist also Untergruppe der Gruppe der Strahlklassen f in k. Da aber beide denselben Grad h_s haben, so müssen sie holoedrisch isomorph sein.

6. Der absolut Galoissche, zu k relativ-Abelsche Körper. Jeder absolut Galoissche, zu k relativ-Abelsche Körper K kann zusammengesetzt werden aus absolut Galoisschen Körpern, die zu k relativ-Abelsch sind und deren Relativgrad eine Primzahlpotenz l^u ist.

Denn jede Abelsche Gruppe kann aus Abelschen Untergruppen zusammengesetzt werden, deren Grad eine Primzahlpotenz ist. Es sei K_l ein Unterkörper von K, dessen Relativgruppe nur noch eine solche Untergruppe mit dem Relativgrad l^u sei. Dann ist K_l absolut Galoissch. Denn ist S eine Substitution der Relativgruppe und $s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m})$ die Substitution von k, so ist, da K absolut Galoissch:

$$sS = S^* s,$$

wo S^* eine Substitution der Relativgruppe von K zu k. Daraus folgt, wegen $s^2 = 1$,

$$sS^r = S^{*r} s,$$

d. h. S und S^* gehören zu demselben Exponenten, also beide zur Untergruppe mit der Ordnung l^u. Somit ist $s^x S$, wo S alle zur Untergruppe gehörenden Substitutionen durchläuft und $x = 0$ oder 1 ist, die Galoissche Gruppe von K_l, w. z. b. w.

7. Die Unterkörper von $K_l(f)$. $K_l(f)$ sei derjenige Unterkörper von $K(f)$, der nach 6. als Relativgrad die größte in h_s enthaltene Potenz l^u der Primzahl l besitzt und der absolut Galoissch ist.

$K_l(f)$ läßt sich zusammensetzen aus einer Reihe von absolut Galoisschen Körpern, die zu k relativ-zyklisch sind, und deren Relativgrad zu k eine Potenz von l ist.

Wir denken uns $K(f)$ aufgebaut aus den beiden Körpern K_1 und K_2. Für K_1 ist der Satz evident, da K_1 absolut-Abelsch ist. Um ihn für K_2 zu beweisen, bedenken wir, daß die Relativgruppe von K_2 holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Ringklassen (f) ist. Wir können das Basensystem dieser Klassen so wählen, daß alle Klassen desselben zu Primzahlpotenzexponenten gehören. Nun entspricht jeder Klasse k eine Klasseninvariante $(k) = \Theta$*), die mit $\sqrt{m}$ eine bestimmende Zahl von K_2 ist. Ist S irgendeine Substitution der Relativgruppe und $S\Theta$ die entsprechende konjugierte, so ist**)

$$S\Theta = f(\Theta, \sqrt{m}),$$

$$\Theta = f(S\Theta, -\sqrt{m}) = f(S\Theta, s\sqrt{m}),$$

wo $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x, y mit rationalen Koeffizienten ist. Da Θ einer Relativgleichung mit ganzen *rationalen* Koeffizienten genügt, so ist $s\Theta = \Theta$. Somit

$$s\Theta = \Theta = Sf(\Theta, s\sqrt{m}) = Ssf(\Theta, \sqrt{m}) = SsS\Theta;$$

woraus

$$sS = S^{-1}s \quad \text{und} \quad Ss = sS^{-1}.$$

Wählen wir also als Basensystem der Relativgruppe lauter Substitutionen, die dem oben definierten Basensystem der Ringklassen (f) entsprechen, und bestimmen wir alle Unterkörper, deren Relativgruppe nur noch eine solche Substitution und deren Potenzen ist, so setzt sich aus denselben sicher $K(f)$ zusammen. Andererseits ist aber jeder dieser Unterkörper relativ-zyklisch vom Primzahlpotenzrelativgrade zu k. Wegen $sS = S^{-1}s$ ist jeder aber auch absolut Galoissch. Denn seine Galoissche Gruppe hat denselben Grad, wie er selbst. Nach dem Beweis von Eigenschaft 1) von $K(f)$ können wir noch folgendes Resultat aussprechen:

Alle diese zu k relativ-zyklischen Unterkörper von $K(f)$ haben außer k keinen weiteren Unterkörper gemein, ausgenommen im Falle $l = 2$, wo sie einen weiteren quadratischen Körper gemein haben können.

Dieselben Resultate ergeben sich auch für jeden Körper, der sich aus Unterkörpern der Körper K_1 und K_2 zusammensetzt.

---

*) Weber: Algebra III (1908), S. 435 u. ff.

**) Weber: Algebra III (1908), S. 441

Kapitel II.

Der dem relativ-Abelschen Körper zugeordnete Strahl.

1. Gegeben sei ein zu k relativ-Abelscher, absolut Galoisscher Körper K. Derselbe besitze die gleichen Eigenschaften wie $K(f)$ (siehe Kapitel I, 7.): er sei vom Primzahlpotenzrelativgrade $N = l^u$ und lasse sich aus einer Reihe von relativ-zyklischen, absolut Galoisschen Unterkörpern zusammensetzen. Alle seine Unterkörper, die zugleich absolut Abelsch sind, sollen den Oberkörper K' vom Relativgrade $N' = l^{u'}$, alle übrigen Unterkörper den Oberkörper K'' vom Relativgrade $N'' = l^{u''}$ in bezug auf k bilden. Die Relativgruppe von K' in bezug auf k werde durch die Substitutionen S', von K'' durch die Substitutionen S'' gebildet. Es ist dann

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} sS' &= S's, \\ sS'' &= S''^{-1}s \text{*)}, \end{aligned}$$

wenn

$$s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m}).$$

Satz: *$\mathfrak{l}_1$ sei ein in $l_1 \neq l$ enthaltenes Primideal von k. Wird dann $\mathfrak{l}_1$ in K' die n'^{te}, in K'' die n''^{te} Potenz eines Ideals, so ist*

$$l_1 - 1 \equiv 0 \pmod{n'}, \quad l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right) \equiv 0 \pmod{n''}.$$

Beweis: n' und n'' sind Potenzen von l. Wir nehmen sie so groß an, daß $\mathfrak{l}_1$ nicht die ln'^{te} resp. ln''^{te} Potenz eines Ideals wird. Da K' und K'' absolut Galoissch sind, so muß auch $s\mathfrak{l}_1$ die n'^{te} resp. n''^{te} Potenz eines Ideals werden; somit

$$(l_1) = \mathfrak{L}_1'^{\,\sigma n'} \text{ in } K'; \quad (l_1) = \mathfrak{L}_1''^{\,\sigma n''} \text{ in } K'' \quad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0 \\ \sigma = 2, \left(\frac{d}{l_1}\right) = 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Zerlegung von $\mathfrak{l}_1$ in K' resp. K'' zu studieren, benutzt man am besten die von Weber, Algebra Bd. II (1899), S. 661 u. ff. durchgeführte Verallgemeinerung der Hilbertschen Begriffe:

a) *Die Körper K' und K'' sind die Verzweigungskörper aller in (l_1) enthaltenen Primideale.* Denn der Grad der Verzweigungsgruppe ist eine Potenz von l_1 **), also gleich 1, da $l \neq l_1$.

b) *Die Trägheitskörper K_t' und K_t'' von K' und K'' sind für alle in l_1 enthaltenen Primideale dieselben.* Denn K' und K'' sind relativ-zyklisch zu K_t' und K_t'' ***), wobei dieselben für ein bestimmtes in l_1 enthaltenes

*) Siehe Kapitel V, S. 246 u. ff.

) Weber: Algebra II., S. 664. *) ibid. S. 668.

Primideal $\mathfrak{L}_1^*$ resp. $\mathfrak{L}_1^{**}$ genommen seien. Sind T' und T'' die Grundsubstitutionen der Trägheitsgruppen, so muß

$$T'^{n'} = 1, \quad T''^{n''} = 1$$

und keine niedrigere Potenz von l wird diesen Bedingungen genügen. Außerdem ist nach (α):

$$(\beta) \qquad sT' = T's, \quad sT'' = T''^{-1}s.$$

Da K' und K'' zu k relativ-Abelsch sind, und da für jede Zahl Ω' resp. Ω''

$$\Omega' - T'\Omega' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1^*); \quad \Omega'' - T''\Omega'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1^{**});$$
$$T'\mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{L}_1^*; \qquad T''\mathfrak{L}_1^{**} = \mathfrak{L}_1^{**}$$

ist*), so erkennt man ohne weiteres, daß diese Bedingungen auch für alle relativ-konjugierten Primideale von $\mathfrak{L}_1^*$ resp. $\mathfrak{L}_1^{**}$ erfüllt sind. Sie sind aber auch für $s\mathfrak{L}_1^*$ und $s\mathfrak{L}_1^{**}$ erfüllt; denn wegen (β) ist:

$$s\Omega' - T'(s\Omega') \equiv 0 \ (s\mathfrak{L}_1^*); \quad s\Omega'' - T''^{-1}(s\Omega'') \equiv 0 \ (s\mathfrak{L}_1^{**});$$
$$T'(s\mathfrak{L}_1^*) = s\mathfrak{L}_1^*; \qquad T''^{-1}s\mathfrak{L}_1^{**} = s\mathfrak{L}_1^{**},$$

wo man für $s\Omega$ wieder Ω und für T''^{-1} wieder T'' setzen kann.

c) Es sei $T' = S'^{\nu'}$, $T'' = S''^{\nu''}$, wo S' und S'' Substitutionen der betreffenden Relativgruppe von K' resp. K'' sind; es sollen jedoch keine Substitutionen $\bar{S}'$ und $\bar{S}''$ existieren, sodaß $T' = \bar{S}'^{l\nu'}$, $T'' = \bar{S}''^{l\nu''}$. Dann ist

$$S'^{n'\nu'} = 1; \quad S''^{n''\nu''} = 1; \quad sS' = S's; \quad sS'' = S''^{-1}s.$$

Wir bestimmen die beiden zu k relativ-zyklischen Körper $K'(l_1)$ und $K''(l_1)$, die Unterkörper von K' resp. K'' sind, und deren Relativgruppe durch die Potenzen von S' resp. S'' gegeben werden können. $K'(l_1)$ und $K''(l_1)$ sind absolut Galoissch, und es wird

$$(l_1) = \mathfrak{L}_1'^{\sigma n'} \text{ in } K'(l_1); \quad (l_1) = \mathfrak{L}_1''^{\sigma n''} \text{ in } K''(l_1) \quad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0 \\ \sigma = 2, \left(\frac{d}{l_1}\right) = 0 \end{pmatrix}.$$

α) $\left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0$. Es sei Λ_1' eine durch $\mathfrak{L}_1'$ teilbare Zahl von $K'(l_1)$, Λ_1'' die entsprechende Zahl von $K''(l_1)$. Doch seien $\frac{(\Lambda_1')}{\mathfrak{L}_1'}$, $\frac{(\Lambda_1'')}{\mathfrak{L}_1''}$ zu l_1 prim. Außerdem darf man, da $s\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{L}_1'$, $s'\mathfrak{L}_1'' = \mathfrak{L}_1''$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) \neq 0$ ist, $\Lambda_1' = s\Lambda_1'$, $\Lambda_1'' = s\Lambda_1''$ voraussetzen. Unter Benutzung der symbolischen Potenzen**) wird dann

$$\Lambda_1'^{1-S'} \equiv \Theta' \ (\mathfrak{L}_1'); \quad \Lambda_1''^{1-S''} \equiv \Theta'' \ (\mathfrak{L}_1''),$$

---

*) Weber a. a. O. S. 661 u. ff.

**) Hilbert: Zahlbericht, S. 271.

wo Θ', Θ'' Zahlen der Trägheitskörper sind, d. h. Zahlen der zu k relativzyklischen Unterkörper ν'^{ten} resp. ν''^{ten} Relativgrades sind.*). Bildet man die Relativnormen dieser Trägheitskörper in bezug auf k, so wird:

$$\Lambda_1'^{(1-S')(1+S'+\cdots+S^{\nu'-1})} = \Lambda_1'^{1-T'} \equiv \vartheta' \ (\mathfrak{L}_1');$$
$$\Lambda_1''^{(1-S'')(1+S''+\cdots+S^{\nu''-1})} = \Lambda_1''^{1-T''} \equiv \vartheta'' (\mathfrak{L}_1''),$$

wo ϑ', ϑ'' Zahlen von k sind. Unter Berücksichtigung der gemachten Annahmen folgt

$$s\vartheta' \equiv s\Lambda_1'^{1-T'} \equiv \Lambda_1'^{1-T'} \equiv \vartheta' \ (\mathfrak{L}_1'),$$
$$s\vartheta'' \equiv s\Lambda_1''^{1-T''} \equiv \Lambda_1''^{1-T''-1} \equiv \Lambda_1''^{T''-1} \equiv \frac{1}{\vartheta''} \ (\mathfrak{L}_1'')$$

oder

$$s\vartheta' \equiv \vartheta' \pmod{l_1},$$
$$s\vartheta'' \cdot \vartheta'' \equiv 1 \pmod{l_1}.$$

Da aber

$$\sqrt{m^{l_1}} \equiv \left(\frac{d}{l_1}\right) \sqrt{m} \pmod{l_1},$$

so ist

$$\vartheta'^{l_1-1} \equiv 1 \pmod{l_1},$$

(γ)

$$\vartheta''^{l-\left(\frac{d}{l_1}\right)} \equiv 1 \pmod{l_1}.$$

Andererseits ist

$$\Lambda_1'^{(1-T'^{x_1})} \equiv \vartheta'^{x_1} \ (\mathfrak{L}_1'),$$
$$\Lambda_1''^{(1-T''^{x_2})} \equiv \vartheta''^{x_2} \ (\mathfrak{L}_1'').$$

Sind x_1 und x_2 die kleinsten Zahlen, sodaß

$$\Lambda_1'^{(1-T'^{x_1})} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_1') \quad \text{oder} \quad \Lambda_1' - T'^{x_1}\Lambda_1' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1'^2),$$
$$\Lambda_1''^{(1-T''^{x_2})} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_1'') \quad \text{oder} \quad \Lambda_1'' - T''^{x_2}\Lambda_1'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1''^2),$$

so bestimme man den Grad μ' der Untergruppe $T^{x_1 y}$ $(y = 0, 1, \cdots)$. Zu dieser Untergruppe gehört ein Körper**). δ sei die Differente von Λ_1' in bezug auf ihn; dann ist

$$\delta = \prod_{y=0}^{\mu'-1} (\Lambda_1' - T^{x_1 y}\Lambda_1') \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1'^{2(\mu'-1)}).$$

Ist

$$\Lambda_1'^{\mu'} - \lambda_1 \Lambda_1'^{\mu'-1} + \cdots + (-1)^l \lambda_{\mu'} = 0,$$

die Relativgleichung von Λ_1' in bezug auf denselben, so ist auch

$$\delta = \mu'\Lambda_1'^{\mu'-1} - (\mu'-1)\lambda_1\Lambda_1'^{\mu'-2} + \cdots - (-1)^l \lambda_{\mu'-1}.$$

*) Weber: a. a. O., S. 663.

**) Hilbert: Zahlbericht, S. 250.

Jedes λ_i ist durch $\mathfrak{L}_1'$, also auch durch $\mathfrak{L}_1'^{\mu'}$ teilbar, da es im Unterkörper liegt. Somit wird, da μ' eine Potenz von $l \neq l_1$ ist,

$$\delta \equiv \mu' \Lambda_1'^{\mu'-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{L}_1'^{\mu'}).$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem vorigen, so folgt:

$$\mu' > 2(\mu'-1); \quad \mu' < 2, \quad \mu' = 1.$$

Somit besitzt die Gruppe $T^{x_1 y}$ $(y = 0, 1, \cdots)$ nur die Einheitssubstitution $T^{x_1} = 1$, d. h. $x_1 = n'$. Ebenso beweist man $x_2 = n''$. Deshalb sind n' und n'' die kleinsten Zahlen, sodaß

$$(\delta) \qquad \vartheta'^{n'} \equiv 1 \pmod{l_1}; \quad \vartheta''^{n''} \equiv 1 \pmod{l_1}.$$

Aus (γ) und (δ) aber erkennt man

$$l_1 - 1 \equiv 0 \ (n'), \qquad l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right) \equiv 0 \ (n'').$$

$\beta)$ $\left(\frac{d}{l_1}\right) = 0$. Da $K'(l_1)$ absolut Abelsch ist, so kann man den Beweis für diesen Körper wie unter $\alpha)$ führen; d. h. es muß $l_1 - 1 \equiv 0 \pmod{n'}$ sein.

Dagegen darf man nun in $K''(l_1)$ für die Zahl Λ_1'' nicht mehr $\Lambda_1'' = s\Lambda_1''$ voraussetzen. Ist

$$\Lambda_1''^{1-S''} \equiv \Theta'' \ (\mathfrak{L}_1''); \qquad \Lambda_1''^{1-T''} \equiv \vartheta'' \ (\mathfrak{L}_1''),$$

so wird

$$s(\Lambda_1''^{1-T''}) \equiv (s\Lambda_1'')^{1-T''^{-1}} \equiv (s\Lambda_1'')^{T''-1} \equiv s\vartheta'' \ (\mathfrak{L}_1''),$$

$$\left(\frac{\Lambda_1''}{s\Lambda_1''}\right)^{1-T''} \equiv \vartheta'' \cdot s\vartheta'' \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_1'').$$

Denn $\frac{\Lambda_1''}{s\Lambda_1''}$ ist zu $\mathfrak{L}_1''$ prim und für jede solche Zahl ist die $(1 - T'')^{\text{te}}$ symbolische Potenz kongruent 1 (mod $\mathfrak{L}_1''$).

Andererseits beweist man, wie oben, daß n'' die niederste Potenz ist, sodaß $\vartheta''^{n''} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}_1}$.

Aus $\vartheta'' s\vartheta'' \equiv 1$ $(\mathfrak{l}_1)$ folgt wegen $\left(\frac{d}{l_1}\right) = 0$, $\vartheta'' \equiv \pm 1$ $(\mathfrak{l}_1)$. Somit kann n'' nur gleich 2 sein, l_1 ist dann ungerade. Betrachtet man den absolut Galoisschen Körper $K''(l_1)$, so ist derselbe Verzweigungskörper von l_1, da sein Grad $2^{4\nu''}$ ist. In ihm wird (l_1) die vierte Potenz eines Ideals. Die Trägheitsgruppe ist daher vom Grade 4, zyklisch und invariant,*) und Untergruppe von $s^x S''^y$ $(0 \leq x < 2;\ 0 \leq y < \nu' n')$ und enthält s. Dies ist unmöglich. Also ist der Fall $\beta)$ ausgeschlossen in K'' und der Satz in allen Teilen bewiesen. Das letztere Resultat soll noch besonders ausgesprochen werden.

Die in d enthaltenen, zu l primen Primzahlen sind prim zur Relativdiskriminante von K'' in bezug auf k.

---

*) Hilbert: Zahlbericht, S. 251, 263.

2. Die Primzahl l. Hilfssätze. Ist l in der Relativdiskriminante enthalten, so gilt ein ähnlicher Satz, wie der eben bewiesene. Um denselben zu erhalten, brauchen wir eine Reihe von Hilfssätzen, die wir gleich so vollständig hier behandeln wollen, daß die Untersuchungen der folgenden Kapitel auch nicht mehr unterbrochen werden müssen.

Es sei K ein zu k relativ-*zyklischer*, absolut Galoisscher Körper. Die Relativgruppe bestehe aus den Potenzen der Substitution S, wo $sS = S^{\pm 1}s$; der Relativgrad sei die Primzahlpotenz $n = l^u$. Das in (l) enthaltene Primideal $\mathfrak{l}$ von k werde in K die $n_0 = l^{u_0}$te Potenz eines Ideals, nicht aber die ln_0te Potenz eines solchen. Für alle in (l) enthaltenen Primideale ist der Trägheitskörper in bezug auf k derselbe. Somit ist

$$(l) = \mathfrak{L}^{\sigma n_0} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \left(\frac{d}{l}\right) \neq 0 \\ \sigma = 2, \left(\frac{d}{l}\right) = 0 \end{pmatrix}.$$

Der Trägheitskörper ist gleich dem Verzweigungskörper, alles bezüglich k. Denn der Relativgrad der beiden Körper ist ein Teiler von $(l^2 - 1)$, also in unserem Falle $= 1$.*) Die Verzweigungsgruppe besteht aus den Potenzen von $T = S^{\frac{n}{n_0}}$, wo $sT = T^{\pm 1}s$.

I. Hilfssatz: *Ist Λ eine durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl von K, wo $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ zu l prim ist, und ist*

$$\Lambda^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{r+1})$$

für irgend einen Primidealteiler $\mathfrak{L}'$ von (l), so ist diese Bedingung für jeden anderen Primidealteiler erfüllt, und es ist

$r = \sigma$, *falls* $l \geqq 3$ *und* $sT = Ts$;
$r = 1$, *falls* $l > 3$ *und* $sT = T^{-1}s$ *oder* $l = 3$, $\sigma = 1$, $sT = T^{-1}s$;
$r \leqq 3$, *falls* $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$;
$r \leqq 1 + \sigma$, *falls* $l = 2$.

Beweis: Der Körper K werde aus dem Verzweigungskörper sukzessive durch die Körper $K_1, K_2, \cdots, K_{u_0-1}, K_{u_0} = K$, von denen jeder den Relativgrad l zum vorhergehenden hat, aufgebaut.

a) Der Satz werde für $n_0 = l$, $K_1 = K$ bewiesen. Hier ist $(l) = \mathfrak{L}^{\sigma l}$. Es sei

$$\Lambda^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{r+1}),$$

wo $\mathfrak{L}'$ irgend ein Primideal von (l) ist. Da T Substitution der Verzweigungsgruppe ist, so ist $r > 0$. Λ genüge der Relativgleichung:

$$\Lambda^l - \lambda_1 \Lambda^{l-1} + \lambda_2 \Lambda^{l-2} - \cdots \mp \lambda_l = 0$$

*) Weber: a. a. O., S. 667.

in bezug auf den Verzweigungskörper. Dann gilt für die Differente δ von Λ:

$$\delta = l\Lambda^{l-1} - (l-1)\lambda_1\Lambda^{l-2} + \cdots \pm \lambda_{l-1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^{(r+1)(l-1)}).$$

Jedes λ_i ist durch eine Potenz von $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}'^l$ teilbar; somit jeder Summand von δ durch eine andere Potenz von $\mathfrak{L}'$; es muß deshalb jeder Summand wenigstens durch $\mathfrak{L}'^{(r+1)(l-1)}$ teilbar sein. Ist λ_i genau durch $\mathfrak{L}^{x_i l}$ teilbar, so ist

$$(\varepsilon) \qquad \sigma l + l - 1 \geqq (r+1)(l-1); \quad x_i l + l - 1 - i \geqq (r+1)(l-1).$$

Aus der 1. Ungleichung folgt $r \leqq \sigma + \frac{\sigma}{l-1}\cdot$ Für $\sigma = 1$ ist $r = 1$, wenn $l \neq 2$; $r \leqq 2$, wenn $l = 2$. w. z. b. w.

Ist dagegen $\sigma = 2$, so nehme man zunächst $l > 3$, dann wird $r \leqq 2$; also ist im Falle $sT = T^{+1}s$ der Satz bewiesen, da dann $r > 1$, wie leicht ersichtlich. Ist dagegen $sT = T^{-1}s$ und für jedes $\Lambda : \Lambda^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^2) \not\equiv 1\ (\mathfrak{L}'^3)$, so ist für jede Zahl Θ von K

$$\Theta - T\Theta \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^3).$$

Denn jede Zahl Θ ist (mod $\mathfrak{L}$) einer Zahl des Verzweigungskörpers = Trägheitskörpers kongruent, also von der Form $\alpha + \Lambda$. Wir bilden

$$\Lambda_1 = \Lambda \cdot s\Lambda.$$

Dann ist

$$\Lambda_1^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^2) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^3).$$

Denn aus $\Lambda_1^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^3)$ folgte, wegen $\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda^2}\right)^{1-T} \equiv \Theta^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^3)$, auch

$$\Lambda^{2(1-T)} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^3),$$

was für $l > 2$ unmöglich. Setzt man $\Lambda_1^{1-T} = 1 + \Lambda_2$, so ist Λ_2 genau durch $\mathfrak{L}'^2$ teilbar, und es wird

$$1 + s\Lambda_2 = \Lambda_1^{1-T^{-1}},$$

$$1 + Ts\Lambda_2 = \Lambda_1^{T-1} \quad = \frac{1}{1+\Lambda_2},$$

$$Ts\Lambda_2 = -\frac{\Lambda_2}{1+\Lambda_2} = -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1^{1-T}}.$$

Nimmt man beiderseits die Relativnormen in bezug auf den Verzweigungskörper, so folgt, da $l \neq 2$,

$$s\Lambda_2^{1+T+\cdots+T^{l-1}} = -\Lambda_2^{1+T+\cdots+T^{l-1}}.$$

Nun geht l sicher in m auf $\left(\left(\frac{d}{l}\right) = 0\right)$. Somit enthält die Relativnorm von Λ_2 in bezug auf k, $\sqrt{m}$ in ungerader Potenz als Faktor, wobei der andere Faktor eine zu l prime rationale Zahl ist. $\mathfrak{L}'$ müßte daher in Λ_2 in einer ungeraden Potenz enthalten sein, was unmöglich ist. Also $r = 1$, w. z. b. w.

Ist $l=3$, $\sigma=2$, so ist $r \leqq 3$. Man erkennt aber leicht, daß r für alle Λ dasselbe ist und auch für alle Primidealteiler $\mathfrak{L}'$. Im Falle $sT=Ts$ ist zudem r gerade, also $=2$.

Ist $l=2$, $\sigma=2$, so ist $r \leqq 4$; doch kann man auch hier durch Betrachtung von $\Lambda \cdot s\Lambda$ zeigen, daß $r \leqq 3$.

b) Wir nehmen an, der Satz sei für $K_\varkappa$ bewiesen und beweisen ihn für $K_{\varkappa+1}$. In $K_\varkappa$ ist $V=T^{l^\varkappa}$ Einheitssubstitution; $1, V, V^2, \cdots, V^{l-1}$ ist die Relativgruppe von $K_{\varkappa+1}$ in bezug auf $K_\varkappa$. In $K_{\varkappa+1}$ wird $(l)=\mathfrak{L}^{\sigma l^{\varkappa+1}}$. Hat Λ die im Satze angegebene Bedeutung im Körper $K_{\varkappa+1}$, und ist

$$\Lambda^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^i) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{i+1})$$
$$\equiv 1+\Lambda_i,$$

wo Λ_i eine durch $\mathfrak{L}^i$ teilbare Zahl ist, so ist

$$\Lambda^{(1-T)(1+V+\cdots+V^{l-1})} = (1+\Lambda_i)(1+V\Lambda_i)\cdots(1+V^{l-1}\Lambda_i) = 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_l,$$

wenn Λ_i der Relativgleichung

$$\Lambda_i^l - \lambda_1\Lambda_i^{l-1} + \cdots \mp \lambda_l = 0$$

von Λ_i in bezug auf $K_\varkappa$ genügt. Nun ist $\Lambda_1 = \Lambda^{1+V+\cdots+V^{l-1}}$ eine Zahl von $K_\varkappa$, die genau durch $\mathfrak{L}^l$ teilbar ist. Schließt man also zunächst die Fälle $l=2$ und $l=3$, $\sigma=2$ aus und beschränkt sich auf den Fall $sT=T^{-1}s$, so wird, da der Satz für $K_\varkappa$ gilt:

$$\Lambda_1^{1-T} \equiv 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_l \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^l) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Andererseits ist $\mathsf{A} = \frac{\Lambda_i}{\Lambda^i}$ wenigstens zu einem in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Primideal $\mathfrak{L}'$ prim; deshalb wird

$$\mathsf{A} \equiv \alpha + \beta\Lambda + \gamma\Lambda^2 + \cdots + \nu\Lambda^i \ (\mathfrak{L}'^{i+1}),$$

wo $\alpha, \beta, \cdots, \nu$ Zahlen des Verzweigungskörpers von $\mathfrak{L}'$ sind. Somit

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} - T\mathsf{A} &\equiv \beta(\Lambda - T\Lambda) + \gamma(\Lambda^2 - T\Lambda^2) + \cdots + \nu(\Lambda^i - T\Lambda^i) \ (\mathfrak{L}'^{i+1}) \\
&\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{i+1}), \\
\left(\frac{\Lambda_i}{\Lambda^i}\right)^{1-T} &= \mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{i+1}), \\
\Lambda_i^{1-T} &\equiv \Lambda^{i(1-T)} \ (\mathfrak{L}'^{i+1}) \\
&\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^i), \\
\Lambda_i - T\Lambda_i &\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2i}); \quad \Lambda_i - V\Lambda_i \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2i})
\end{aligned}$$

Somit genügt die Differente δ von Λ_i der Kongruenz:

$$\delta = l\Lambda_i^{l-1} - (l-1)\lambda_1\Lambda_i^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2i(l-1)}).$$

Wäre nun $i \geqq l$, so wäre $\Lambda_i - T\Lambda_i$, also umsomehr $\Lambda_i - V\Lambda_i$ wenigstens durch $\mathfrak{L}^{l+1}$ teilbar; λ_i wäre durch $\mathfrak{L}^{2l}$ teilbar und somit

$$\Lambda^{(1+V+\cdots+V^{l-1})(1-T)} = \Lambda_1^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

gegen obige Aussage. Also ist $i < l$ und zu l prim. Jeder Summand des Ausdruckes δ ist dann durch eine andere Potenz von $\mathfrak{L}'$ teilbar, muß also wenigstens durch $\mathfrak{L}'^{2i(l-1)}$ teilbar sein. Ist λ_k genau durch $\mathfrak{L}'^{x_k l}$ teilbar, so ist deshalb:

$$x_k l + i(l-k-1) \geqq 2i(l-1) \quad \text{oder} \quad x_k l \geqq i(l-k-1),$$
$$x_k \geqq i\left(1 + \frac{k-1}{l}\right) \geqq i.$$

Somit

$$\Lambda_1^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{il}),$$

woraus sich, wie vorhin, $i = 1$ ergeben muß. w. z. b. w.

Analog gestalten sich die Beweise für $sT = Ts$; $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$; $l = 2$.

II. Hilfssatz: *Es sei* Λ *genau durch* $\mathfrak{L}$ *teilbar,* $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ *zu* $\mathfrak{L}$ *prim; dann ist für jedes in* $\mathfrak{L}$ *enthaltene Primideal* $\mathfrak{L}'$

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{\nu_i}) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{\nu_i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, u_0 - 1),$$

wo

$$\nu_i = \sigma(1 + l + l^2 + \cdots + l^i) \quad \text{für} \quad sT = Ts; \quad \nu_i = 1 + \sigma(l + l^2 + \cdots + l^i)$$

für $sT = T^{-1}s$ *ist. Dabei ist* $l \neq 2$ *vorausgesetzt und der Fall* $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^3)$ *ausgeschlossen.*

Der Satz gilt dann für jede durch $\mathfrak{L}^r$ *teilbare Zahl* Λ_r, *wo* $r \not\equiv 0 \pmod{l}$; *und für jede Zahl* A *von* K *gilt*

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{\nu_i}).$$

Beweis. Es sei

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{\nu_i}) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{\nu_i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, u_0 - 1).$$

a) *Dann ist* $\nu_i \geqq l\nu_{i-1}$.

Denn wenn

$$\Lambda^{1-T^{l^{i-1}}} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{\nu_{i-1}}),$$

so folgt für jede Zahl A

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^{i-1}}} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{\nu_{i-1}}),$$

da sich jede Zahl A in der Form $\alpha + \beta\Lambda + \gamma\Lambda^2 + \cdots \ (\text{mod}\ \mathfrak{L}'^{\nu_{i-1}+\mu})$ darstellen läßt, wo $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ Zahlen des Verzweigungskörpers sind. Also ist, wenn Λ_k eine durch $\mathfrak{L}'^k$ teilbare Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{1-T^{l^{i-1}}} &= 1 + \Lambda_{\nu_{i-1}}, \\
\Lambda^{(1-T^{l^{i-1}})^2} &= 1 + \Lambda_{2\nu_{i-1}}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Lambda^{(1-T^{l^{i-1}})^l} &= 1 + \Lambda_{l\nu_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Da aber

$$\left(1-T^{l^{i-1}}\right)^l = 1 + T^{l^{i-1}} + T^{2l^{i-1}} + \cdots + T^{(l-1)l^{i-1}} - lf\left(T^{l^{i-1}}\right)$$

ist, wo $f(1) = 1$, so folgt

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} = \Lambda^{lf\left(T^{l^{i-1}}\right)}\left(1+\Lambda_{l\nu_{i-1}}\right) = \left(1+\Lambda_{\nu_{i-1}}\right)^{lf\left(T^{l^{i-1}}\right)}\left(1+\Lambda_{l\nu_{i-1}}\right)$$
$$\equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{l\nu_{i-1}}\right).$$

b) Der Satz ist für $i = 0$ durch Hilfssatz I. bewiesen. Wir nehmen an, er gelte für $K_1, K_2, \cdots, K_{u_0-1}$ und beweisen ihn für K_{u_0}. Da u_0 jede Zahl sein kann, ist er dann nach dem Schluß der vollständigen Induktion allgemein bewiesen. Wir beschränken uns ferner auf den Fall $sT = T^{-1}s$, da der absolut Abelsche Fall $sT = Ts$ gleich durchzuführen ist.

ν_i ist stets zu l prim.

Zum Beweise nehme man an Stelle von Λ eine durch $\mathfrak{L}^\sigma$ teilbare Zahl Λ, für die $s\Lambda = \Lambda$. Wäre nun $\nu_{u_0-1} \equiv 0 \pmod{l}$, und

$$\Lambda^l - \lambda_1 \Lambda^{l-1} + \cdots - \lambda_l = 0$$

die Relativgleichung von Λ in bezug auf K_{u_0-1}, so wäre dann

$$\delta = l\Lambda^{l-1} - (l-1)\lambda_1 \Lambda^{l-1} + \cdots + \lambda_{l-1} = \prod_{k=1}^{l-1}\left(\Lambda - T^{kl^{u_0-1}}\Lambda\right) \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{(\nu_{u_0-1}+\sigma)(l-1)}\right).$$

Ist λ_k genau durch $\mathfrak{L}^{\sigma l x_k}$ teilbar, so folgt durch dieselbe Schlußweise, wie schon früher,

$$(\alpha) \quad \sigma l x_k + \sigma(l-1-k) \geqq (\nu_{u_0-1}+\sigma)(l-1) \quad \text{oder} \quad \sigma l x_k \geqq \nu_{u_0-1}(l-1) + \sigma k,$$
$$(k = 1, 2, \cdots, (l-1))$$

oder, da ν_{u_0-1} durch l und $(l-1)$ durch 2 teilbar ist:

$$\sigma x_k \geqq \frac{\nu_{u_0-1}}{l}(l-1) + \sigma \qquad (k = 1, 2, \cdots, (l-1)).$$

Somit ergibt die Relativgleichung

$$\Lambda^l - \lambda_l \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{\nu_{u_0-1}(l-1)+\sigma l+\sigma}\right),$$

$$\Lambda^l - T^{\frac{n_0}{l}}\Lambda^l \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{\nu_{u_0-1}(l-1)+\sigma l+\sigma+\nu_{u_0-1}}\right),$$

$$\Lambda^{l\left(1-T^{\frac{n_0}{l}}\right)} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{\nu_{u_0-1}\cdot l+\sigma}\right).$$

Andererseits ist

$$\Lambda^{l\left(1-T^{\frac{n_0}{l}}\right)} = \left(1+\Lambda_{\nu_{u_0-1}}\right)^l \equiv 1 + \Lambda^l_{\nu_{u_0-1}} \quad \left(\mathfrak{L}^{\sigma n_0+\nu_{u_0-1}}\right)$$
$$\not\equiv 1 \left(\mathfrak{L}^{l\nu_{u_0-1}+\sigma}\right),$$

da genau nach dem unter d) geführten Beweise auch

$$\nu_{u_0-1} \leqq 1 + \sigma(l + \cdots + l^{u_0-1}),$$

also $l\nu_{u_0-1} + \sigma \leqq \sigma n_0 + \nu_{u_0-1}$ gezeigt werden kann. Aus dem Widerspruch folgt, daß ν_{u_0-1} zu l prim ist.

Wäre $\nu_i \equiv 0 \pmod{l}$, $i < u_0 - 1$, so setze man $\nu_i = lq$ und

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} = 1 + \Lambda_{\nu_i} = (1 + \Lambda_q)(1 + \Lambda_q \Lambda_r) \qquad (r > 0),$$

wo Λ_q eine Zahl von K_{u_0-1} ist und r zu l prim angenommen werden darf. Bildet man beiderseits die Relativnormen in bezug auf K_{u_0-1}, so wird

$$\Lambda^{*1-T^{l^i}} = (1 + \Lambda_q)^l (1 + \Lambda_q \lambda_1' + \Lambda_q^2 \lambda_2' + \cdots + \Lambda_q^l \lambda_l'),$$

wo

$$\Lambda_r^l - \lambda_1' \Lambda_r^{l-1} + \cdots - \lambda_l' = 0$$

die Relativgleichung von Λ_r in bezug auf K_{u_0-1} ist. Da r zu l prim ist, folgt wieder durch genau dieselbe Schlußweise wie früher

$$x_k l + r(l - 1 - k) \geqq r(l-1) + \nu_{u_0-1}(l-1),$$

$$x_k l \geqq \nu_{u_0-1}(l-1) + rk,$$

wenn λ_k genau durch $\mathfrak{L}^{x_k l}$ teilbar angenommen ist. Nun ist aber nach a) $\nu_{u_0-1} > ql = \nu_i$; also:

$$x_k l > ql(l-1) + rk \quad \text{oder} \quad x_k > q(l-1) + 1.$$

Somit

$$\Lambda^{*(1-T^{l^i})} \equiv (1 + \Lambda_q^l)^l \equiv 1 + \Lambda_q^l \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{ql^2+l})$$
$$\equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{ql^2}).$$

Nach Annahme gilt aber der Satz schon für Λ^* in K_{u_0-1}. Also ist

$$\Lambda^{*(1-T^{l^i})} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{l[1+\sigma(l+\cdots+l^i)]}) \not\equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{l[2+\sigma(l+\cdots+l^i)]}).$$

Diese beiden Resultate widersprechen sich. w. z. b. w.

c) Aus a) und b) folgt somit

$$\nu_1 \geqq l + 1,$$
$$\nu_2 \geqq l^2 + l + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu_i \geqq l^i + l^{i-1} + \cdots + l + 1.$$

Für $\sigma = 1$ ist der Satz bewiesen, falls auch eine obere Grenze für ν_i gefunden ist, wie es in d) geschehen wird. Es sei also $\sigma = 2$, und zunächst $i < u_0 - 1$, $\Lambda^{1-T^{l^i}} = 1 + \Lambda_{\nu_i}$. Genau wie in b) findet man dann für die Norm Λ^* von Λ in bezug auf K_{u_0-1}:

$$\Lambda^{*1-T^{l^i}} = 1 + \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_l',$$

und, wenn λ_k' genau durch $\mathfrak{L}^{x_k l}$ teilbar ist, da ν_i zu l prim ist,

$$x_k l \geqq \nu_{u_0-1}(l-1) + \nu_i k \qquad (k=1,2,\cdots,(l-1));$$

oder, da

$$\nu_{u_0-1} \geqq l^{u_0-1} + l^{u_0-2} + \cdots + 1, \quad \nu_i \geqq l^i + \cdots + 1:$$

$$x_k l \geqq n_0 - 1 + l^i + l^{i-1} + \cdots + l + 1,$$
$$\geqq n_0 + l^i + l^{i-1} + \cdots + l \qquad (k=1,2,\cdots,(l-1)).$$

Daher wird

$$\Lambda^{*(1-T^{l^i})} \equiv 1 + \lambda_l' \ \left(\mathfrak{L}^{n_0+l^i+l^{i-1}+\cdots+l}\right);$$

λ_l' ist genau durch $\mathfrak{L}^{l\nu_i}$ teilbar. Andererseits ist nach Annahme

$$\Lambda^{*(1-T^{l^i})} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{[1+2(l+\cdots+l^i)]l}\right) \not\equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{[2+2(l+\cdots+l^i)]l}\right).$$

Sobald also $n_0 + l + \cdots + l^i > l(1+2(l+\cdots+l^i))$ ist, was für $i < u_0 - 1$ erfüllt ist, so ist somit $l\nu_i = l[1+2(l+\cdots+l^i)]$, $\nu_i = 1+2(l+\cdots+l^i)$. w. z. b. w. Ist dagegen $i = u_0 - 1$, so ist

$$\nu_{u_0-1} \geqq l\nu_{u_0-2} + 1$$
$$\geqq 2(l^{u_0-1} + \cdots + l^2) + l + 1.$$

Ferner ist ν_{u_0-1} *ungerade*, wie man leicht einsieht*). Also

$$\nu_{u_0-1} = 2(l^{u_0-1} + \cdots + l^2) + l + 2r,$$

wo r eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{l+1}{2}$ sein wird. Wäre $r < \frac{l+1}{2}$, so folgt aus den Ungleichungen (α) von b):

$$2lx_k \geqq 2(n_0 - l^2) + l^2 - l + 2r(l-1) + 2k,$$

$$2x_k \geqq 2\frac{n_0}{l} - (l+1) + 2r + 2\frac{k-r}{l}$$

oder, da $r \leqq \frac{l-1}{2}$,

$$2x_k \geqq 2\frac{n_0}{l} - (l+1) + 2r \quad , \quad \text{wenn} \quad k \leqq \frac{l-1}{2},$$

$$2x_k \geqq 2\frac{n_0}{l} - (l+1) + 2r + 2, \quad \text{wenn} \quad k \geqq \frac{l+1}{2}.$$

Somit ist für alle $k = 1, 2, \cdots, (l-1)$,

$$\lambda_k \Lambda^{l-k} \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{2n_0 - l(l+1) + 2rl + l + 1}\right)$$

und

$$\Lambda^l \equiv \lambda_l \ \left(\mathfrak{L}^{2n_0 - l^2 + 1 + 2rl}\right),$$

$$\Lambda^l - T^{\frac{n_0}{l}} \Lambda^l \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}^{2n_0 - l^2 + 1 + 2rl + \nu_{u_0-1}}\right),$$

$$\Lambda^{l\left(1 - T^{\frac{n_0}{l}}\right)} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{2n_0 - l^2 - l + 1 + 2rl + \nu_{u_0-1}}\right);$$

*) Siehe den Beweis S. 193.

andererseits ist

$$\Lambda^{l\left(1-T^{\frac{n_0}{l}}\right)} = \left(1+\Lambda_{\nu_{u_0-1}}\right)^l \equiv 1 + \Lambda^l_{\nu_{u_0-1}} \left(\mathfrak{L}^{2n_0+\nu_{u_0-1}}\right),$$

also müßte, da

$$l\nu_{u_0-1} < 2n_0 + \nu_{u_0-1}$$

ist,

$$2n_0 - l^2 - l + 1 + 2rl + \nu_{u_0-1} \leqq l\nu_{u_0-1},$$

für

$$\nu_{u_0-1} = 2(l^{u_0-1} + \cdots + l^2) + l + 2r,$$

sein, was unmöglich ist. Somit ist $r \geqq \frac{l+1}{2}$, und

$$\nu_{u_0-1} \geqq 1 + \sigma(l + \cdots + l^{u_0-1}).$$

d) Schließlich bleibt noch zu beweisen, daß ν_i nicht größer als der angegebene Wert sein kann. Wäre nämlich i der größte Exponent, für den

$$\Lambda^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}'^{1+\sigma(1+l+\cdots+l^i)}\right),$$

so wäre die Differente δ von Λ in bezug auf K_i teilbar durch $\mathfrak{L}'^h$, wo

$$h = \frac{n_0}{l^{i+1}}(l-1)[\sigma(l^i+\cdots+l+1)+1] + \frac{n_0}{l^{i+2}}[\sigma(l^{i+1}+\cdots+l+1)+1] + \cdots$$
$$\cdots + (l-1)[\sigma(l^{u_0-1}+\cdots+l+1)+1] + \sigma\frac{n_0}{l^{i+1}}(l-1)$$
$$= \sigma(u_0-i)n_0 - \sigma\left(\frac{n_0}{l^{i+1}} + \cdots + 1\right) + \frac{n_0}{l^i} - 1 + \sigma\frac{n_0}{l^{i+1}}(l-1).$$

Ist andererseits

$$\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}} - \lambda_1\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}-1} + \cdots - \lambda_{\frac{n_0}{l^i}} = 0$$

die Relativgleichung von Λ in bezug auf K_i, so muß

$$\delta = \frac{n_0}{l^i}\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}-1} - \cdots \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^h)$$

oder

$$\frac{n_0}{l^i}\Lambda^{\frac{n_0}{l^i}-1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}'^h)$$

Somit ist

$$h \leqq \sigma(u_0-i)n_0 + \sigma\left(\frac{n_0}{l^i} - 1\right).$$

Setzt man den Wert von h ein, so findet man leicht

$$\frac{n_0}{l^i} \leqq \sigma\left(2\frac{n_0}{l^{i+1}} + \frac{n_0}{l^{i+2}} + \cdots + l\right);$$

da $l=2$, und $l=3$, $\sigma=2$ ausgeschlossen sind, ist diese Ungleichung unmöglich. Somit sind die gefundenen Werte für ν_i die größtmöglichen w. z. b. w.

Mit genau denselben Mitteln beweist man im Falle $l=3$, $\sigma=2$, $sT=T^{-1}s$ die

1. Ergänzung: $3^{i+1}-2 \leqq \nu_i \leqq 3^{i+1}$, $l=3$, $\sigma=2$.

Wenn für ein $i: \nu_i = 3^{i+1}$, so ist diese Relation auch für alle größeren i erfüllt.

Ist schließlich $l=2$, so zeigt man

$$\text{a) } \nu_i \leqq \sigma n_0; \quad \text{b) } \nu_{i+1} \geqq 2\nu_i; \quad \text{c) } \nu_i \leqq \sigma 2^{i+1},$$

woraus die

2. Ergänzung: $\sigma 2^{i+1} - 2\sigma + 1 \leqq \nu_i \leqq \sigma 2^{i+1} - (\sigma - 1)$, $l=2$.

ν_i ist bei $\sigma=2$ ungerade. Wenn für ein i die obere Summe von ν_i erreicht ist, so wird sie auch für alle größeren i erreicht.

III. Hilfssatz: *Wenn $\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{kn_0})$, wo $k>0$, so ist*

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{kn_0+\sigma(l+\cdots+l^i)}\right), \qquad \textit{falls} \quad sT=Ts,$$

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{kn_0+l+\sigma(l^2+\cdots+l^i)}\right), \quad \textit{falls} \quad sT=T^{-1}s,$$

für alle $i<u_0$. Dabei ist $l \neq 2$ vorausgesetzt.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $sT=T^{-1}s$ und schließen zunächst auch $l=3$, $\sigma=2$ aus. Es sei λ eine genau durch $\mathfrak{L}^{kn_0}=\mathfrak{l}^k$ teilbare Zahl von k. Dann darf man setzen:

$$\mathsf{A}^{1-T} = (1+\lambda\alpha)(1+\lambda\Lambda),$$

wo α im Verzweigungskörper liegt, und Λ wenigstens durch $\mathfrak{L}$ teilbar ist. Daraus folgt:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv (1+\lambda\alpha)^l \left(1+\lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^\iota\Lambda + \lambda^2 \sum_{\substack{\iota\\ \varkappa}\}=0}^{l-1} T^\iota\Lambda\, T^\varkappa\Lambda + \cdots\right)$$

$$\equiv 1+\lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^\iota\Lambda \quad \left(\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}\right).$$

Setzt man $\Lambda_1 = \sum_{\iota=0}^{l-1} T^\iota\Lambda$, so ist nach Hilfssatz II

$$\Lambda_1 - T\Lambda_1 = \Lambda - T^l\Lambda \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{\sigma l+2}).$$

Wäre Λ_1 durch $\mathfrak{L}^q$ teilbar, wo q zu l prim, so wäre

$$\Lambda_1 - T\Lambda_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{q+1}) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{L}^{q+2}),$$

also

$$q+1 \geqq \sigma l + 2, \quad q \geqq \sigma l + 1.$$

Ist dagegen $q \equiv 0(l)$, so ist Λ_1 wenigstens durch $\mathfrak{L}^l$ teilbar. Sicher folgt deshalb in beiden Fällen:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{kn_0+l}).$$

Somit gilt der obige Satz für $i=1$. Wir nehmen ihn deshalb für $1, 2, 3, \cdots, i-1$ als bewiesen an und beweisen ihn für i. Dann ist

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^{i-1}}} \equiv 1 + \lambda \sum_{\iota=0}^{l^{i-1}-1} T^{\iota}\Lambda \quad (\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}) \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{kn_0+l+\sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})}\right).$$

$\Lambda_1 = \sum_{\iota=0}^{l^{i-1}-1} T^{\iota}\Lambda$ ist daher durch $\mathfrak{L}^{l+\sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})}$ teilbar. Da $\mathfrak{L}^l$ ein Ideal von K_{u_0-1} ist, können wir deshalb immer

$$\Lambda_1 = \Lambda_l + \Lambda_q$$

setzen, wo Λ_l ein durch $\mathfrak{L}^{l+\sigma(l^2+\cdots+l^{i-1})}$ teilbare Zahl von K_{u_0-1} ist, die auch 0 sein kann, und $q > l + \sigma(l^2 + \cdots + l^{i-1})$ und zu l prim angenommen werden darf. Somit:

$$\Lambda_1 - T\Lambda_1 = \Lambda - T^{l^{i-1}}\Lambda = (\Lambda_l - T\Lambda_l) + (\Lambda_q - T\Lambda_q).$$

Nun ist nach Hilfssatz II $\Lambda - T^{l^{i-1}}\Lambda$ durch $\mathfrak{L}^{2+\sigma(l+\cdots+l^{i-1})}$ teilbar, und nach Hilfssatz I $\Lambda_l - T\Lambda_l$ durch $\mathfrak{L}^{l(2+\sigma(l+\cdots+l^{i-2}))}$; also auch

$$\Lambda_q - T\Lambda_q \equiv 0 \quad \left(\mathfrak{L}^{\sigma(l+l^2+\cdots+l^{i-1})+(2-\sigma)2}\right);$$

weil aber q zu l prim ist, kann $\Lambda_q - T\Lambda_q$ höchstens durch $\mathfrak{L}^{q+1}$ teilbar sein, d. h.

$$q+1 \geqq \sigma(l+\cdots+l^{i-1}) + (2-\sigma)2,$$
$$q \geqq (3-2\sigma) + \sigma(l+\cdots+l^{i-1}).$$

Deshalb folgt weiter:

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} &\equiv (1+\lambda\Lambda_1)^{1+T^{l^{i-1}}+\cdots+T^{(l-1)l^{i-1}}} \\ &\equiv (1+\lambda\Lambda_l+\lambda\Lambda_q)^{1+T^{l^{i-1}}+\cdots+T^{(l-1)l^{i-1}}} \quad (\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}) \\ &\equiv 1 + \lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^{\iota l^{i-1}}\Lambda_l + \lambda\sum_{\iota=0}^{l-1} T^{\iota l^{i-1}}\Lambda_q \quad (\mathfrak{L}^{(k+1)n_0}).\end{aligned}$$

Kürzt man die beiden Summen rechts mit Λ' und Λ'' ab und nimmt die erstere genau durch $\mathfrak{L}^{q'l}$, die andere genau durch $\mathfrak{L}^{q''}$ teilbar an, so ist, wegen:

$$\Lambda' - T^{l^{i-1}}\Lambda' = \Lambda_l - T^{l^i}\Lambda_l, \quad \Lambda'' - T^{l^{i-1}}\Lambda'' = \Lambda_q - T^{l^i}\Lambda_q,$$

wenn q' und q'' zu l prim wären:

$$q'+1+\sigma(l+\cdots+l^{i-1}) \geqq (1+\sigma(l+\cdots+l^i))+1+\sigma(l+\cdots+l^{i-2}),$$
$$q''+1+\sigma(l+\cdots+l^{i-1}) \geqq q+1+\sigma(l+\cdots+l^i) \geqq (4-2\sigma)+2\sigma(l+\cdots+l^{i-1})+\sigma l^i,$$

also sicher:

$$lq' > l + \sigma(l^2+\cdots+l^i),$$
$$q'' > l + \sigma(l^2+\cdots+l^i),$$

d. h.

$$\mathsf{A}^{1-T^{l^i}} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{kn_0+l+\sigma(l^2+\cdots+l^i)}\right).$$

Es sei also q' resp. q'' durch l teilbar. Sind dann $\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_l'$ resp. $\lambda_1'', \lambda_2'', \cdots, \lambda_l''$ die elementarsymmetrischen Funktionen von $T^{\iota l^{i-1}} \Lambda_l$ resp. $T^{\iota l^{i-1}} \Lambda_q$ $(\iota = 0, 1, 2, \cdots, l-1)$, so ist $\lambda_1' = \Lambda'$, $\lambda_1'' = \Lambda''$. Ist nun $\lambda_\varkappa'$ resp. $\lambda_\varkappa''$, durch $\mathfrak{L}^{l q_\varkappa'}$ resp. $\mathfrak{L}^{q_\varkappa''}$ teilbar, so beweist man genau wie oben, daß entweder $q_\varkappa'$ resp. $q_\varkappa''$ durch l teilbar sind, oder daß

$$q_\varkappa' \geqq [1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-2})]\varkappa + \sigma l^i$$

resp.

$$q_\varkappa'' \geqq [(3 - 2\sigma) + \sigma(l + \cdots + l^{i-1})]\varkappa + \sigma l^i.$$

Nun ist aber nach Hilfssatz II:

$$\begin{aligned}\prod_{\iota=1}^{l-1} (\Lambda_l - T^{\iota l^{i-1}} \Lambda_l) &= l \Lambda_l^{l-1} - (l-1)\lambda_1' \Lambda_l^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1}' \\ &\equiv 0 \quad \left(\mathfrak{L}^{(l-1)[2 + 2\sigma(l + \cdots + l^{i-2}) + \sigma l^{i-1}]l}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{\iota=1}^{l-1} (\Lambda_q - T^{\iota l^{i-1}} \Lambda_q) &= l \Lambda_q^{l-1} - (l-1)\lambda_1'' \Lambda_q^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1}'' \\ &\equiv 0 \quad \left(\mathfrak{L}^{(l-1)(1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-1}) + q)}\right).\end{aligned}$$

Die Glieder mit $\lambda_\varkappa'$ resp. $\lambda_\varkappa''$, für die $q_\varkappa'$ resp. $q_\varkappa''$ zu l prim sind, sind sicher durch den Modul teilbar, wegen der vorigen Ungleichungen, fallen also fort. Die noch übrig bleibenden Summanden sind alle durch verschiedene Potenzen von $\mathfrak{L}$ teilbar, müssen also jeder für sich, durch den Modul teilbar sein, woraus für $\varkappa = 1$:

$$\begin{aligned} q_1' + (1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-2}))(l-2) &\geqq (l-1)(2 + 2\sigma(l + \cdots + l^{i-2}) + \sigma l^{i-1}), \\ q_1'' + q(l-2) &\geqq (l-1)(1 + \sigma(l + \cdots + l^{i-1}) + q)\end{aligned}$$

oder (da q_1' resp. q_1'' durch l teilbar angenommen ist):

$$q_1' l \geqq l + \sigma(l^2 + \cdots + l^i),$$

$$q_1'' \geqq l + \sigma(l^2 + \cdots + l^i),$$

d. h. in jedem Fall

$$\mathsf{A}^{1 - T^{l^i}} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{k n_0 + l + \sigma(l^2 + \cdots + l^i)}\right).$$

Für $l = 3$, $\sigma = 2$ wird der Satz entsprechend bewiesen.

Ergänzung: *Für* $\sigma = 1$, $l = 2$ *ist* $\mathsf{A}^{1 - T^{2^i}} \equiv 1$ $\left(\mathfrak{L}^{k n_0 + \nu_i - 1}\right)$, *wenn* $i \neq \varkappa$, *wo* $\varkappa$ *der Index ist, für den* $\nu_{\varkappa - 1} = 2^\varkappa - 1$, $\nu_\varkappa = 2^{\varkappa + 1}$, *dagegen ist*

$$\mathsf{A}^{1 - T^{2^\varkappa}} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{k n_0 + \nu_\varkappa - 2}\right).$$

Für $\sigma = 2$, $l = 2$ *ist bei gleicher Bedeutung von* $\varkappa$:

$$\mathsf{A}^{1 - T^{2^i}} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{k n_0 + \nu_i - 2i - 1}\right) \text{ für } i \leqq \varkappa;$$

$$\mathsf{A}^{1 - T^{2^i}} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{k n_0 + \nu_i - 2\varkappa - 1}\right) \text{ für } i > \varkappa.$$

IV. Hilfssatz: *Ist* $\mathfrak{L}_\varkappa = \mathfrak{L}^{\frac{n_0}{l^\varkappa}}$ *ein Ideal von* $K_\varkappa$ *und ist* $\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$ *eine genau durch* $\mathfrak{L}_\varkappa^{\nu_{\varkappa-1}}$ *teilbare Zahl von* $K_\varkappa$, *wo* $\nu_{\varkappa-1}$ *die frühere Bedeutung (siehe Hilfssatz* II) *hat, so ist:*

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i \Lambda_{\nu_{\varkappa-1}} \begin{cases} \equiv 0 \pmod{l^\varkappa} \not\equiv 0 \pmod{l^\varkappa \mathfrak{l}}, \text{ falls } sT = Ts, \\ \equiv 0 \ (\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma-(\sigma-1)}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma+2-\sigma}}, \text{ falls } sT = T^{-1}s. \end{cases}$$

Jede andere elementarsymmetrische Funktion λ_k *der* $T^i\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$, *mit Ausnahme von* λ_l $(\varkappa > 1)$, *ist durch* $l^{\varkappa+1}$, *resp.* $\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma+1}$ *teilbar;* λ_l $(\varkappa > 1)$ *ist wenigstens durch* $l^\varkappa$ *resp.* $\mathfrak{l}^{\varkappa l-(\sigma-1)}$ *teilbar. Dabei ist* $l = 3$, $\sigma = 2$, $sT = T^{-1}s$, *und* $l = 2$ *ausgeschlossen.*

Beweis. Wir kürzen $\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$ mit Λ ab; Λ genüge der Relativgleichung in bezug auf den Verzweigungskörper:

$$\Lambda^{l^\varkappa} - \lambda_1 \Lambda^{l^\varkappa-1} + \cdots - \lambda_{l^\varkappa} = 0.$$

Die Relativdifferente $\delta(\Lambda)$ ist nach Hilfssatz II, da $\nu_{\varkappa-1}$ zu l prim ist, durch $\mathfrak{L}_\varkappa^h$ genau teilbar, wo

$$\begin{aligned} sT = Ts:\quad h &= l^\varkappa(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1) + l^{\varkappa-2}(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+\sigma(l+1)) + \cdots \\ &\quad \cdots + (l-1)(\nu_{\varkappa-1}+\sigma(l^{\varkappa-1}+\cdots+1)) \\ &= \nu_{\varkappa-1}(l^\varkappa-1) + \varkappa\sigma l^\varkappa - \sigma(1+l+\cdots+l^{\varkappa-1}); \\ sT = T^{-1}s:\ h &= l^{\varkappa-1}(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1) + l^{\varkappa-2}(l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1+\sigma l) + \cdots \\ &\quad \cdots + (l-1)(\nu_{\varkappa-1}+1+\sigma(l+\cdots+l^{\varkappa-1})) \\ &= \nu_{\varkappa-1}(l^\varkappa-1) + \sigma\varkappa l^\varkappa - (\sigma-1)l^\varkappa - (1+\sigma(l+\cdots+l^{\varkappa-1})). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\delta = l^\varkappa \Lambda^{l^\varkappa-1} - (l^\varkappa-1)\lambda_1 \Lambda^{l^\varkappa-2} + \cdots + l_{l^\varkappa-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_\varkappa^h).$$

Da $\nu_{\varkappa-1}$ zu l prim ist, ist jedes Glied durch eine andere Potenz von $\mathfrak{L}_\varkappa$ teilbar. Ist $(l^\varkappa - k)\lambda_k$ genau durch $\mathfrak{L}^{x_k l^\varkappa} = \mathfrak{l}^{x_k}$ teilbar, so folgt:

$$\begin{aligned} sT=Ts:&\quad l^\varkappa x_k + (l^\varkappa-1-k)\nu_{\varkappa-1} \geqq (l^\varkappa-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa - \sigma(1+\cdots+l^{\varkappa-1}), \\ sT=T^{-1}s:&\quad l^\varkappa x_k + (l^\varkappa-1-k)\nu_{\varkappa-1} \geqq (l^\varkappa-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa - (\sigma-1)l^\varkappa \\ &\qquad -(1+\sigma(l+\cdots+l^{\varkappa-1})) \end{aligned}$$

oder, wegen des Wertes von $\nu_{\varkappa-1}$:

$$\begin{aligned} sT=Ts:&\quad l^\varkappa x_k \geqq (k-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa, \\ sT=T^{-1}s:&\quad l^\varkappa x_k \geqq (k-1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa - (\sigma-1)l^\varkappa. \end{aligned}$$

Wenigstens in einer Ungleichung muß das Gleichheitszeichen auftreten. Man sieht, daß dies nur für $k = 1$ eintreten kann; somit

$$\begin{aligned} sT = Ts:&\quad x_1 = \varkappa\sigma, \\ sT = T^{-1}s:&\quad x_1 = \varkappa\sigma - (\sigma-1). \end{aligned}$$

Dagegen ist für $k > 1$:

$$sT = Ts: \quad x_k \geqq \varkappa\sigma + 1,$$
$$sT = T^{-1}s: \; x_k \geqq \varkappa\sigma + 2 - \sigma.$$

Daraus schließt man, wenn k zu l prim ist, wie z. B. für $k = 1$, daß λ_k selbst durch $\mathfrak{l}^{x_k}$ teilbar ist. Ist dagegen $k = l^i q$, wo q zu l prim ist und $0 < i < \varkappa$, so ist

$$\begin{aligned} sT = Ts: \; l^\varkappa x_k &\geqq (l^i q - 1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa \\ &\geqq (l^i - 1)\nu_{\varkappa-1} + \varkappa\sigma l^\varkappa \\ &\geqq (l^{\varkappa+i-1} + \cdots + l^\varkappa)\sigma + \varkappa\sigma l^\varkappa, \\ x_k &\geqq \sigma(1 + l + \cdots + l^{i-1}) + \varkappa\sigma, \\ x_k - i\sigma &\geqq \sigma(1 + l + \cdots + l^{i-1} - i) + \varkappa\sigma. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen kann nur für $q = 1$ eintreten. Daraus erkennt man, daß λ_k für $q = 1$, $i = 1$ wenigstens durch $\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma} = l^\varkappa$, für alle übrigen Fälle wenigstens durch $\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma+\sigma} = l^{\varkappa+1}$ teilbar ist. Entsprechend für $sT - T^{-1}s$. w. z. b. w.

1. Ergänzung: $l = 3$, $\sigma = 2$. *Wenn* $\Lambda^{1-T} \equiv 1 (\mathfrak{L}^3)$, *so ist*

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{3^\varkappa - 1} T^i \Lambda_{\nu_{\varkappa-1}} \equiv 0 \;\; (\mathfrak{l}^{2\varkappa+1}),$$

und ebenso für jede andere elementarsymmetrische Funktion. Ist dagegen $\Lambda^{1-T} \not\equiv 1 \;\; (\mathfrak{L}^3)$, *so gilt der obige Satz.*

2. Ergänzung: $l = 2$. *Der obige Satz gilt, falls*

$$\nu_{\varkappa-1} = \sigma 2^\varkappa - (2\sigma - 1).$$

In jedem anderen Fall ist sicher für $sT = T^{-1}s$:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{2^\varkappa - 1} T^i \Lambda_{\nu_{\varkappa-1}} \equiv 0 \;\; (\mathfrak{l}^{\sigma\varkappa - (\sigma-1)}).$$

V. Hilfssatz: *Die Spur jeder Zahl von* $K_\varkappa$ *in bezug auf den Verzweigungskörper ist wenigstens durch*

$$\mathfrak{l}^{\varkappa\sigma}(sT = Ts) \; \textit{resp.} \; \mathfrak{l}^{\varkappa\sigma-(\sigma-1)}(sT = T^{-1}s)$$

teilbar.

Beweis. Man kann den Beweis von Hilfssatz IV statt für $\Lambda_{\nu_{\varkappa-1}}$ auch für Λ_r führen, wo Λ_r eine genau durch $\mathfrak{L}_\varkappa^{\;r}$ teilbare Zahl von $K_\varkappa$ ist, und r zu l prim ist. Dann folgt wieder

$$x_1 \geqq \varkappa\sigma \;\text{ resp. }\; x_1 \geqq \varkappa\sigma - (\sigma - 1).$$

Also ist der Satz für alle Λ_r bewiesen. Nun kann man aber jeder Zahl A von $K_\varkappa$ die Form geben*)

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2} + \cdots + \Lambda_{q_\varkappa},$$

wo α im Verzweigungskörper, Λ_{q_i} eine genau durch $\mathfrak{L}_i'^{q_i}$ teilbare Zahl von K_i und $q_i \not\equiv 0\ (l)$ ist. Somit

$$\sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i \mathsf{A} = l^\varkappa \alpha + l^{\varkappa-1} \sum_{i=0}^{l-1} T^i \Lambda_{q_1} + l^{\varkappa-2} \sum_{i=0}^{l^2-1} T^i \Lambda_{q_2} + \cdots + \sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i \Lambda_{q_\varkappa}$$

oder nach dem eben Bewiesenen:

$$\sum_{i=0}^{l^\varkappa-1} T^i \mathsf{A} \equiv 0 \ \left(\mathfrak{l}^{\sigma\varkappa} \text{ resp. } \mathfrak{l}^{\sigma\varkappa-(\sigma-1)}\right).$$

Der Satz gilt somit stets.

VI. Hilfssatz: *Ist $sS = S^{-1}s$ und A irgend eine zu l prime Zahl von K_1, so kann man stets eine zu l prime Zahl r angeben, sodaß die r^{te} Potenz der Relativnorm von A in bezug auf k im Ring mit dem Führer $\mathfrak{l}^2$ liegt. Dabei ist $l = 3$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^3)$ und $l = 2$ ausgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\mathsf{A} = \alpha + \Lambda^*$, wo α im Verzweigungskörper liegt, Λ^* durch $\mathfrak{L}$ teilbar, und $l = \mathfrak{L}^{l\sigma}$ ist. Man bestimme r_1 so prim zu l, daß α^{r_1} einer ganzen rationalen Zahl $a\ (\text{mod}\ \mathfrak{L}'^l)$ kongruent wird, wo $\mathfrak{L}'$ ein in $\mathfrak{L}$ enthaltenes Primideal ist. Man setze

$$\mathsf{A}^{r_1} = a + \Lambda,$$

wo Λ durch $\mathfrak{L}'$ teilbar ist und die Relativgleichung

$$\Lambda^l - \lambda_1 \Lambda^{l-1} + \cdots - \lambda_l = 0$$

in bezug auf den Verzweigungskörper besitze. Dann wird

$$\alpha_l = \mathsf{A}^{r_1(1+T+\cdots+T^{l-1})} = a^l + a^{l-1}\lambda_1 + \cdots + \lambda_l.$$

Wäre $\Lambda \equiv 0\ (\mathfrak{L}'^l)$, so würde ohne weiteres $\alpha_l \equiv a^l\ (\mathfrak{L}'^{2l})$ folgen, was den Satz ergibt. Ist also Λ durch $\mathfrak{L}'^r$ teilbar, wo $r < l$, so folgt wieder, wenn λ_i genau durch $\mathfrak{L}'^{x_i l}$ teilbar ist,**)

$$x_i l \geqq l + i - 1 \quad \text{oder} \quad x_i \geqq 2 \quad \text{für} \quad i > 1.$$

Somit:

$$\alpha_l \equiv a^l + \lambda_1 a^{l-1} + \lambda_l \equiv a^l + \lambda_1 + \lambda_l \ (\text{mod}\ \mathfrak{L}'^{2l}),$$

da λ_1 und λ_l wenigstens durch $\mathfrak{L}'^l$ teilbar sind. Wenn $r > 1$, so ist λ_1 und λ_l aber auch durch $\mathfrak{L}'^{2l}$ teilbar. In diesem Falle und wenn $\lambda_1 + \lambda_l$ durch $\mathfrak{L}^{2l}$ teilbar ist, wird

---

*) Siehe Kapitel III, S. 223.

**) Siehe dieses Kapitel die Gleichungen (ε) S. 193.

$$\alpha_l \equiv a^l, \quad N(\mathsf{A})^{r_1} \equiv a^l \ (\mathfrak{l}^2),$$

und

$$N(\mathsf{A})^r \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^2).$$

Man kann also annehmen, daß $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}'}$ zu $\mathfrak{L}'$ prim sei. Man setze

$$\Lambda^{1-S} = \beta(1+\Lambda'),$$

$$\Lambda^{1-T} = \beta^{1+S+\cdots+S^{\frac{n}{n_0}-1}}\left(1+\sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i\Lambda' + \cdots\right),$$

wo β im Verzweigungskörper liegt, also $\beta^{1+\cdots+S^{\frac{n}{n_0}-1}} = \beta^*$ in k. Da

$$\Lambda^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'),$$

wird $\beta^* \equiv 1 \ (l)$. Man setze

$$\Lambda'' = \sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i\Lambda' + \cdots, \quad \Lambda^{1-T} = \beta^* \ (1+\Lambda'').$$

Besitzt Λ'' die Relativgleichung

$$\Lambda''^{\,l} - \lambda_1''\Lambda''^{\,l-1} + \cdots - \lambda_l'' = 0,$$

und bildet man in $\Lambda^{1-T} = \beta^*(1+\Lambda'')$ die Relativnorm in bezug auf den Verzweigungskörper, so folgt, wie oben,

$$1 = \beta^{*l}(1+\lambda_1''+\cdots+\lambda_l''),$$

$$\lambda_1''+\lambda_l'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Andererseits ist auch $\lambda_1'' = S\lambda_1''$, wie man sofort erkennt. Setzt man $\frac{\Lambda}{\Lambda''} = \bar{\alpha} + \Lambda^*$, wo $\bar{\alpha}$ im Verzweigungskörper liegt und Λ^* durch $\mathfrak{L}'$ teilbar ist, so wird

$$\lambda_1 \equiv \bar{\alpha}\lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$\lambda_l \equiv \bar{\alpha}^l\lambda_l'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$\lambda_1+\lambda_l \equiv \bar{\alpha}\lambda_1''+\bar{\alpha}^l\lambda_l'' \equiv (\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l)\,\lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$\alpha_l = \Lambda^{r_1(1+T+\cdots+T^{l-1})} \equiv a^l + (\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l)\lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l}),$$

$$N(\mathsf{A})^{r_1} \equiv a^{\frac{n}{n_0}} + a^{\left(\frac{n}{n_0}-1\right)l}\lambda_1''\sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l) \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Wenn aber $\left(\frac{d}{l}\right) = +1$ oder $=0$, so ist $\bar{\alpha}^l \equiv S^k\bar{\alpha} \ (\mathfrak{L}'^l)$, also:

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}^l) \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^l),$$

$$N(\mathsf{A})^{r_1} \equiv a^{\frac{n}{n_0}l} \ (\mathfrak{L}'^{2l}), \text{ w. z. b. w.}$$

Wenn $\left(\frac{d}{l}\right) = -1$, so ist $\bar{\alpha}^l \equiv s S^k \bar{\alpha}$ $(\mathfrak{L}'^l)$, also

$$\alpha^* = \sum_{i=0}^{\frac{n}{n_0}-1} S^i(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^l)$$

eine Zahl, für die $s\alpha^* \equiv -\alpha^*$. Dann ist aber

$$N(\mathsf{A})^{r_1} - sN(\mathsf{A})^{r_1} \equiv \alpha^* \cdot a^{\left(\frac{n}{n_0}-1\right)l}(\lambda_1'' + s\lambda_1'') \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Es erübrigt also noch, $\lambda_1'' + s\lambda_1''$ zu untersuchen. Dazu betrachte man

$$\begin{aligned} \Lambda^{1-T} &= \beta^*(1+\Lambda''), \\ (s\Lambda)^{1-T^{-1}} &= s\beta^*(1+s\Lambda''), \\ (s\Lambda)^{T-1} &= s\beta^*(1+Ts\Lambda''), \\ \left(\frac{\Lambda}{s\Lambda}\right)^{1-T} &= \beta^* s\beta^*(1+\Lambda'')(1+Ts\Lambda''), \end{aligned}$$

woraus, da $\frac{\Lambda}{s\Lambda} = \Omega$ zu $\mathfrak{L}'$ prim ist, und $\beta^* \equiv 1$ $(\mathfrak{L}'^l)$:

$$Ts\Lambda'' \equiv -\frac{\Lambda''}{1+\Lambda''} \ (\mathfrak{L}'^2),$$

$$s\lambda_1'' = s \cdot \sum_{i=0}^{l-1} T^i \Lambda'' \equiv -\sum T^i \frac{\Lambda''}{1+\Lambda''} \ (\mathfrak{L}'^{2l}).$$

Nun genügt aber $\bar{\Lambda} = \frac{\Lambda''}{1+\Lambda''}$ der Relativgleichung

$$\bar{\Lambda}^l - \lambda_1''\bar{\Lambda}^{l-1}(1-\bar{\Lambda}) + \cdots - \lambda_l''(1-\bar{\Lambda})^l = 0,$$

woraus:

$$(1+\lambda_1''+\lambda_l'')\bar{\Lambda}^l - \lambda_1''\bar{\Lambda}^{l-1}(1-\bar{\Lambda}) - \lambda_l''(1-\bar{\Lambda})^l \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2l+1}),$$

$$\bar{\Lambda}^l - \frac{\lambda_1''}{1+\lambda_1''+\lambda_l''}\Lambda^{l-1} - \lambda_l'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2l+1}),$$

oder, da $\lambda_1'' + \lambda_l''$ durch $\mathfrak{L}'^{2l}$ teilbar ist:

$$\sum_{i=0}^{l-1} T^i\bar{\Lambda} = \sum_{i=0}^{l-1} T^i \frac{\Lambda''}{1+\Lambda''} \equiv \lambda_1'' \ (\mathfrak{L}'^{2l});$$

also ist

$$s\lambda_1'' \equiv -\lambda_1'' \quad \text{oder} \quad \lambda_1'' + s\lambda_1'' \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2l})$$

oder

$$N(\mathsf{A})^r - sN(\mathsf{A})^r \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{2l})$$

also auch

$$\equiv 0 \ (\mathfrak{l}^2) \text{ w. z. b. w.}$$

1. Ergänzung: *Wenn $l = 3$, $\sigma = 2$, so ist die Norm in bezug auf k der $(1-s)^{\text{ten}}$ symbolischen Potenz jeder Zahl von K_1, die zu (l) prim ist, im Ring mit dem Führer 3.*

Denn es ist $\mathsf{A}^{1-s} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^2)$, da s eine Substitution der absoluten Verzweigungsgruppe ist. Daraus ergibt sich ohne weiteres für die Norm in bezug auf den Verzweigungskörper:

$$(\mathsf{A}^{1-s})^{1+T+T^2} \equiv 1\ \ (\mathfrak{L}^6)$$

oder für die Norm in bezug auf k:

$$N(\mathsf{A}^{1-s}) \equiv 1\ \ (3)\ \ \text{w. z. b. w.}$$

Wir kehren zum Körper $K(K', K'')$ von 1. zurück.

3. Es soll der Satz bewiesen werden:

Satz: *Die Verzweigungsgruppe der in* (l) *enthaltenen Primideale des Körpers* K' *resp.* K'' *ist zyklisch, wenn* $l \neq 2$.

Wir gehen von dem Gegenteil aus. Gäbe es in K' resp. K'' zwei zum Verzweigungskörper relativ-zyklische Körper K_1 und K_2 vom Relativgrade l, sodaß im Oberkörper $K(K_1, K_2)$ vom Relativgrad l^2:

$$(l) \equiv \mathfrak{L}^{\sigma l^2}\ \ \left(\sigma = 1,\ \left(\frac{d}{l}\right) \neq 0;\ \sigma = 2,\ \left(\frac{d}{l}\right) = 0\right),$$

wo $\mathfrak{L}$ aus lauter voneinander verschiedenen Primidealen zusammengesetzt ist, so nehme man eine durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl Λ; $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ sei zu $\mathfrak{L}$ prim. Um unnötige Fallunterschiede zu vermeiden, schließen wir den Fall $sT = Ts$, $\sigma = 2$ aus.

a) Es seien T_1 und T_2 die Grundsubstitutionen von K_1 und K_2 relativ zum Verzweigungskörper. Man setze

$$\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_1 \equiv 1\ \ (\mathfrak{L}).$$

Ist $\mathfrak{L}'$ ein Primideal von $\mathfrak{L}$ und (Λ_1) genau durch $\mathfrak{L}'^r$ teilbar, so würde durch Bildung der Relativnorm von Λ in bezug auf K_1 folgen

$$\Lambda^{(1+T_2+\cdots+T_2^{l-1})(1-T_1)} = \Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1\ \ (\mathfrak{L}'^r).$$

Nach Hilfssatz I ist deshalb $r \leqq l$, wenn $l = 3$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}'^3)$ zunächst ausgeschlossen wird. Es sei

$$\Lambda_1^l - \lambda_1' \Lambda_1^{l-1} + \cdots - \lambda_l' = 0$$

die Relativgleichung von Λ_1 in bezug auf K_1, dann ist

$$\Lambda^{*1-T_1} = 1 + \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_l'.$$

Somit dürfen nicht alle λ_i' durch $\mathfrak{L}^{l+1}$ teilbar sein. Nun ist aber

$$\Lambda_1^{1-T_2} \equiv 1\ \ (\mathfrak{L}),\qquad \Lambda_1 - T_2\Lambda_1 \equiv 0\ \ (\mathfrak{L}'^{r+1})$$

also:

$$\delta = \prod_{i=1}^{l-1}(\Lambda_1 - T_2^i\Lambda_1) = l\Lambda_1^{l-1} - \lambda_1'(l-1)\Lambda_1^{l-2} + \cdots + \lambda_{l-1}' \equiv 0\ \ (\mathfrak{L}'^{(r+1)(l-1)}).$$

Wenn $r < l$, so folgen hieraus, wie früher, die Ungleichungen:

$$x_i' l \geqq l - 1 + ri \geqq l - 1 + r,$$

wenn λ_i' genau durch $\mathfrak{L}'^{x_i' l}$ teilbar ist. Also ist nur $r = 1$ möglich.

Wäre aber $r = l$, so folgt aus $\Lambda - T_1 \Lambda \equiv 0$ $(\mathfrak{L}'^{l+1})$ und der Relativgleichung

$$\Lambda^l - \lambda_1 \Lambda^{l-1} + \cdots + \lambda_{l-1} \Lambda - \lambda_l = 0$$

von Λ in bezug auf K_2, wie oben,

$$x_i l \geqq l^2 - l + i.$$

Einmal muß hier das Gleichheitszeichen auftreten, was nur für $i = 0$ eintreten könnte. Somit ist auch dieser Fall zu verwerfen und $r = 1$ bewiesen. Dies zeigt man für jedes $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$.

Ist Λ_r eine durch $\mathfrak{L}^r$ teilbare Zahl, wo $r \not\equiv 0 \pmod{l}$ und $\frac{(\Lambda_r)}{\mathfrak{L}^r}$ zu $\mathfrak{L}$ prim ist, so ist $\frac{\Lambda_r}{\Lambda^r} = \Omega$ eine zu $\mathfrak{L}$ prime Zahl, für die $\Omega^{1-T_1} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^2)$. Somit ist auch

$$\begin{aligned} \Lambda_r^{1-T_1} \equiv \Lambda^{r(1-T_1)} &\not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^2) \\ &\equiv 1 \ (\mathfrak{L}), \end{aligned}$$

denn

$$\Lambda^{r(1-T_1)} \equiv 1 + r\Lambda_1 \ (\mathfrak{L}^2) \quad \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^2).$$

Resultat: *Ist Λ_r eine durch $\mathfrak{L}^r$ teilbare Zahl, wo $\frac{(\Lambda_r)}{\mathfrak{L}^r}$ zu $\mathfrak{L}$ prim ist, so ist*

$$\Lambda_r^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}) \quad \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^2)$$

falls $r \not\equiv 0 \pmod{l}$ für jedes in $\mathfrak{L}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{L}'$. Dieser Satz gilt für jede Substitution T der Verzweigungsgruppe von $K(K_1, K_2)$

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} \quad \{0 \leqq x_i < l\},$$

mit Ausnahme von $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

b) Es sei $T_1 = S_1^{\nu_1}, T_2 = S_2^{\nu_2}$, wo S_1, S_2 Substitutionen der Relativgruppe von $K(K_1, K_2)$ in bezug auf k sind, dagegen seien T_1 und T_2 nicht die $l\nu_1$. resp. $l\nu_2$. Potenzen solcher Substitutionen. Dann kann man unter K_1 speziell den relativ-zyklischen Körper mit der Relativgruppe

$$S_1^{x_1} \ (0 \leqq x_1 < l\nu_1),$$

unter K_2 denjenigen mit der Relativgruppe

$$S_2^{x_2} \ (0 \leqq x_2 < l\nu_2)$$

verstehen. $K(K_1, K_2)$ hat dann die Relativgruppe $S_1^{x_1} S_2^{x_2}$ $(0 \leqq x_i < l\nu_i)$. Es habe Λ die frühere Bedeutung und $\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_1$. Dann ist

$$\Lambda^{(1-S_1)(1-T_1)} = 1 + \frac{\Lambda_1 - S_1 \Lambda_1}{1 + S_1 \Lambda_1}.$$

Nun ist aber $\Lambda^{1-S_1} = \Omega$ eine zu $\mathfrak{L}$ prime Zahl, somit:

$$\Omega^{1-T_1} = \Lambda^{(1-T_1)(1-S_1)} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}^2),$$
$$\Lambda_1 - S_1\Lambda_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^2),$$
$$\Lambda_1^{\,1-S_1} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}).$$

Die Zahl $\frac{(\Lambda_1 s \Lambda_1)^{\sigma \frac{l+1}{2}}}{l}$, die wir wieder mit Λ abkürzen, hat deshalb die Eigenschaften

1. $\Lambda \equiv 0 \ (\mathfrak{L}^\sigma)$; 2. $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}^\sigma}$ zu $\mathfrak{L}$ prim; 3. $\Lambda = s\Lambda$; 4. $\Lambda^{1-S_1} \equiv 1 \ (\mathfrak{L})$.

Setzt man $\Lambda^{1-S_1} = 1 + \Lambda_1$, so ist $\frac{(\Lambda_1)}{\mathfrak{L}}$ zu $\mathfrak{L}$ prim und

$$\Lambda^{1-T_1} = (1+\Lambda_1)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}}.$$

Wird durch Λ_i eine genau durch $\mathfrak{L}^i$ teilbare Zahl bezeichnet

$$\left(\frac{(\Lambda_i)}{\mathfrak{L}^i} \text{ zu } \mathfrak{L} \text{ prim}\right),$$

so folgt sukzessive:

$$\Lambda^{(1-T_1)^2} = \left(1 + \frac{\Lambda_1 - T_1\Lambda_1}{1 + T_1\Lambda_1}\right)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}} = (1+\Lambda_2)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Lambda^{(1-T_1)^{l-1}} = \left(1 + \frac{\Lambda_{l-2} - T_1\Lambda_{l-2}}{1 + T_1\Lambda_{l-2}}\right)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}} = (1+\Lambda_{l-1})^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}}.$$

Wenn also T irgend eine Substitution der Verzweigungsgruppe bedeutet, so wird

$$\Lambda^{(1-T)(1-T_1)^{l-1}} = (1+\Lambda_l)^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}},$$
$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv (1+\Lambda_l^{\,l})^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}} \ (\mathfrak{L}^{l^2+1}),$$
$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}^{l^2+1}). \qquad (\varphi)$$

Jede Zahl ist (mod $\mathfrak{L}$) einer Zahl des Trägheits- resp. Verzweigungskörpers kongruent*), somit auch $\frac{\Lambda_l^{\,l}}{\lambda}$, wo λ eine durch $\mathfrak{L}^{l^2}$ teilbare Zahl von k ist $\left(\lambda = l,\ \left(\frac{d}{l}\right) \neq 0;\ \lambda = \sqrt{m},\ \left(\frac{d}{l}\right) = 0\right)$. Somit ist $\Lambda_l^{\,l}$ einer Zahl des Verzweigungskörpers (mod $\mathfrak{L}^{l^2+1}$) kongruent. Außerdem kann man S_1 so gewählt denken, daß die stets zyklische Relativgruppe des Trägheitskörpers zum Zerlegungskörper*) in $S_1^{x_1}$ $(0 \leqq x_1 < \nu_1)$ enthalten ist. Dann ist $(1+\Lambda_l^{\,l})^{1+S_1+\cdots+S_1^{\nu_1-1}}$ einer Zahl des Zerlegungskörpers (mod $\mathfrak{L}^{l^2+1}$) kongruent. Ist $\mathfrak{L}'$ ein Primideal von $\mathfrak{L}$, so setze man $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}'$, wenn $\mathfrak{L}' = s\mathfrak{L}'$;

*) Weber: Algebra II, S. 663.

$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$, wenn $\mathfrak{L}' \neq s\mathfrak{L}'$. Jede Zahl des Zerlegungskörpers ist (mod $\mathfrak{L}_1^{l^2}$) einer Zahl von k kongruent*). Weil aber

$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv 1 + \Lambda^*(\mathfrak{L}^{l^2+1}),$$

wo Λ^* im Zerlegungskörper liegt und durch $\mathfrak{L}^{l^2}$ teilbar ist, so ist $\frac{\Lambda^*}{\lambda}$ einer Zahl von k (mod $\mathfrak{L}_1$) kongruent und

$$\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv \pi \ (\text{mod } \mathfrak{L}_1^{l^2+1}) \equiv 1 \ (\text{mod } \mathfrak{L}_1^{l^2})$$
$$\not\equiv 1 \ (\text{mod } \mathfrak{L}_1^{l^2+1}),$$

wo π in k liegt. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\Lambda^{l(1-T_1)(1-T_1)^{l-1}} &\equiv \pi_0 \ \ (\mathfrak{L}_1^{l^2+1}),\\
\Lambda^{l(1-T_1T_2)(1-T_1)^{l-1}} &\equiv \pi_1 \ \ (\mathfrak{L}_1^{l^2+1}),\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\Lambda^{l(1-T_1T_2^{l-1})(1-T_1)^{l-1}} &\equiv \pi_{l-1}(\mathfrak{L}_1^{l^2+1}).
\end{aligned}$$

Wenn

α) $sT_1 = T_1^{-1}s$, $sT_2 = T_2^{-1}s$, so folgt wegen $\mathfrak{L}_1 = s\mathfrak{L}_1$, $\Lambda = s\Lambda$:

$$s\Lambda^{l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} = \Lambda^{l(1-T^{-1})(1-T_1^{-1})^{l-1}} \equiv \Lambda^{-l(1-T)(1-T_1)^{l-1}} \equiv s\pi(\mathfrak{L}_1^{l^2+1})$$

oder

$$\frac{1}{\pi} \equiv s\pi; \ \pi s \pi \equiv 1\,(\mathfrak{L}^{2l^2}); \ \pi \equiv 1\,(\mathfrak{L}^{l^2}) \not\equiv 1\,(\mathfrak{L}^{2l^2}).$$

Dies gilt für jedes π_i. Da es aber nur $l-1$ inkongruente Zahlen π_i (mod $\mathfrak{L}^{2l^2}$) in k gibt, die diesen Bedingungen genügen, so muß für bestimmtes i und k

$$\pi_i \equiv \pi_k(\mathfrak{L}^{2l^2}) \ \ (i \neq k),$$
$$\Lambda^{l(1-T_2^iT_1)(1-T_1)^{l-1}} \equiv \Lambda^{l(1-T_2^kT_1)(1-T_1)^{l-1}}(\mathfrak{L}_1^{l^2+1}),$$
$$\Lambda^{l(T_2^kT_1-T_2^iT_1)(1-T_1)^{l-1}} \equiv 1\,(\mathfrak{L}_1^{l^2+1}),$$
$$\Lambda^{l(1-T_2^{i-k})(1-T_1)^{l-1}} \equiv 1\,(\mathfrak{L}_1^{l^2+1}).$$

Dies widerspricht der Formel (φ). Die Annahme ist daher zu verwerfen.

β) $sT_1 = T_1 s$, $sT_2 = T_2 s$, $\sigma = 1$. Durch dieselbe Überlegung wie im Falle α) folgt

$$\pi \equiv s\pi \ (\text{mod } l^2), \ \pi \equiv 1 \ (\text{mod } l) \not\equiv 1 \ (\text{mod } l^2).$$

Da es nur $(l-1)$ solcher π gibt (mod l^2), folgt der Widerspruch auf gleiche Weise wie oben.

Fall $l = 3$, $\sigma = 2$; hier ist $(3) = \mathfrak{L}^{18}$; wir beschränken uns auf den Fall $sS = S^{-1}s$ und greifen, wie vorhin, K_1 und K_2 heraus. Es sei

$$\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_r \equiv 1(\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}).$$

*) Weber: Algebra II, S. 662. $\mathfrak{L}'^{l^2}$ ist ein Primideal 1. Grades.

Durch Normbildung in bezug auf K_1 erkennt man, daß $r \leqq 9$. Es sei $'\Lambda$ die in b) definierte Zahl, für die $\Lambda = s\Lambda$, $\Lambda \equiv 0(\mathfrak{L}^2)$. Dann folgt

$$s\Lambda^{1-T_1} = \Lambda^{1-T_1^{-1}} = 1 + s\Lambda_r,$$

$$T_1 s \Lambda_r = -\frac{\Lambda_r^1}{1+\Lambda_r},$$

woraus man schließt, daß r *ungerade* sein muß. Wäre

a) $r = 3$, so wäre $\Lambda - T_1\Lambda \equiv 0(\mathfrak{L}'^5) \not\equiv 0(\mathfrak{L}'^6)$. Bedeutet

$$\Lambda^3 - \lambda_1\Lambda^2 + \lambda_2\Lambda - \lambda_3 = 0$$

die Relativgleichung von Λ in bezug auf K_2, so ist, falls λ_i genau durch $\mathfrak{L}^{6x_i}$ (wegen $s\Lambda = \Lambda$) teilbar ist,

$$3\Lambda^2 - 2\lambda_1\Lambda + \lambda_2 \equiv 0(\mathfrak{L}'^{10}) \not\equiv (\mathfrak{L}'^{11});$$

$$6x_i \geqq 6 + 2i.$$

In dieser Ungleichung muß für $i = 1$ oder 2 das Gleichheitszeichen auftreten; da dies unmöglich ist, ist die Annahme $r = 3$ zu verwerfen.

b) $r = 9$. In diesem Falle sei λ eine genau durch $\mathfrak{L}^9$ teilbare Zahl des Verzweigungskörpers. Man kann dann setzen:

$$\Lambda^{1-T_1} = (1 + \lambda)(1 + \lambda\Lambda'),$$

wo Λ' wenigstens durch $\mathfrak{L}$ teilbar ist. Bildet man die Norm in bezug auf K_1, so wird

$$\Lambda^{(1+T_2+T_2^2)(1-T_1)} = \Lambda^{*(1-T_1)} = (1+\lambda)^3(1 + \lambda\lambda_1' + \lambda^2\lambda_2' + \lambda^3\lambda_3')$$
$$\equiv 1(\mathfrak{L}'^{12}),$$

was nach Hilfssatz I. unmöglich ist.

c) r kann also nur eine ungerade zu 3 prime Zahl < 9 sein; somit $r = 1$, 5 oder 7. Da dasselbe für T_2 gilt, so kann man setzen:

$$\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_{r_1};\ \Lambda^{1-T_2} = 1 + \Lambda_{r_2};\ \left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = 1,\ 5 \text{ oder } 7.$$

Wäre $r_1 > 1$, $r_2 > 1$, so folgt durch Normbildung von $\Lambda^{1-T_1} = 1 + \Lambda_{r_1}$ in bezug auf K_1:

$$\Lambda^{*1-T_1} = \Lambda^{(1+T_2+T_2^2)(1-T_1)} = 1 + \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3',$$

wo

$$\Lambda_{r_1}^3 - \lambda_1'\Lambda_{r_1}^2 + \lambda_2'\Lambda_{r_1} - \lambda_3' = 0$$

die Relativgleichung von Λ_{r_1} in bezug auf K_1 bedeute. Die Relativdifferente von Λ_{r_1} ist aber

$$\delta(\Lambda_{r_1}) = 3\Lambda_{r_1}^2 - 2\lambda_1'\Lambda_{r_1} + \lambda_2' \equiv 0(\mathfrak{L}^{2(r_1+r_2)}),$$

also, da $r_1 \not\equiv 0(3)$ und $\lambda_i' \equiv 0(\mathfrak{L}^{3x_i'})$:

$$3x_i' \geqq 2r_2 + r_1 i \geqq 10 + 5i \geqq 15$$

oder

$$\Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{15}),$$

was unmöglich, wegen Hilfssatz I. Also ist wenigstens z. B. $r_1 = 1$. Aber auch dann ist bei $r_2 \geqq 5$:

$$3x_i' \geqq 10 + i \geqq 11,$$
$$\Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{12}),$$

was unmöglich. Also ist $r_1 = r_2 = 1$ und der Satz genau wie früher zu beweisen.

4. Im Fall $l = 2$ liegen die Verhältnisse anders; bilden doch schon $K(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$ zwei zu k relativ-zyklische Körper, deren Relativdiskriminante 2 wesentlich enthält.

Satz: *Die Verzweigungsgruppe relativ zu k der in* (2) *enthaltenen Primideale von K' resp. K'' ist zyklisch, wenn* $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$; *zyklisch oder von der Form*

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} \begin{cases} 0 \leqq x_1 < 2 \\ 0 \leqq x_2 < 2^{\nu}, \end{cases}$$

wenn $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$, *wo ν irgendeine Zahl sein kann.*

Beweis.

a) $\left.\begin{array}{r}\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0 \\ \sigma = 1\end{array}\right\}$. Wir nehmen zunächst an, die Verzweigungsgruppe sei

$$T_1^{x_1} T_2^{x_2} \text{ resp. } T_1^{x_1} T_2^{x_2} T_3^{x_3}, \text{ wo } 0 \leqq x_i < 2,\ T_i^2 = 1 \ (i = 1, 2, 3).$$

Es ist somit $(2) = \mathfrak{L}^4$ resp. $\mathfrak{L}^8$. Wir setzen $(2) = \mathfrak{L}^{\nu}$, $\nu = 4, 8$. Ist $\Lambda \equiv 0(\mathfrak{L})$, $\frac{(\Lambda)}{\mathfrak{L}}$ zu $\mathfrak{L}$ prim, so wird für irgendein $T \neq 1$ der Verzweigungsgruppe

$$\Lambda^{1-T} = 1 + \Lambda_r \equiv 1(\mathfrak{L}'^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}).$$

Wäre $r \geqq \nu$, so findet man z. B. im Falle $T = T_1$, $\nu = 8$ ohne weiteres

$$\Lambda^{(1-T_1)(1+T_2)(1+T_3)} = \Lambda^{*(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}'^9),$$

was gegen Hilfssatz I. ist. Somit muß stets $r < \nu$ sein. *r ist aber auch ungerade;* denn es ist

$$\Lambda^{(1-T)(1+T)} = 1 = 1 + (\Lambda_r + T\Lambda_r) + \Lambda_r T\Lambda_r$$

oder

$$0 = (\Lambda_r + T\Lambda_r) + \Lambda_r T\Lambda_r = (\Lambda_r - T\Lambda_r) + 2T\Lambda_r + \Lambda_r T\Lambda_r$$
$$\equiv \Lambda_r - T\Lambda_r + \Lambda_r T\Lambda_r (\mathfrak{L}'^{\nu+r}).$$

Da aber $\Lambda_r - T\Lambda_r$ durch $\mathfrak{L}'^{2r+1}$ teilbar ist, sobald r gerade ist, weil $\left(\frac{\Lambda_r}{\Lambda^r}\right)^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{r+1})$, so wäre auch $\Lambda_r T\Lambda_r$ durch $\mathfrak{L}'^{2r+1}$ teilbar, was unmöglich.

Im Fall $\nu = 4$ ist aber wenigstens für ein T das zugehörige $r = 1$. Wäre nämlich

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}^3), \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3),$$

so wäre

$$\Lambda^{(1-T_1)(1+T_2)} = 1 + (\Lambda_r + T_2 \Lambda_r) + \Lambda_r T_2 \Lambda_r \equiv 1 + (\Lambda_r - T_2 \Lambda_r) + \Lambda_r T_2 \Lambda_r \; (\mathfrak{L}^7)$$
$$\equiv 1 \; (\mathfrak{L}^6),$$

was gegen Hilfssatz I. verstößt. Somit sind nur die beiden Fälle möglich:

$$\alpha) \quad \begin{array}{l} \Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \\ \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2). \end{array} \qquad \beta) \quad \begin{array}{l} \Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \\ \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^4). \end{array}$$

Im Falle $\nu = 8$ ist deshalb ebenfalls für wenigstens ein $T = T_1$ das zugehörige $r = 1$. Denn wäre

$$\Lambda^{1-T_i} \equiv 1(\mathfrak{L}^3), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

so wäre

$$\Lambda^{(1-T_1)(1+T_3)} \equiv 1(\mathfrak{L}^4), \quad \Lambda^{(1-T_2)(1+T_3)} \equiv 1(\mathfrak{L}^4),$$

was gegen die beiden einzig möglichen Fälle α) und β) wäre.

Wäre aber nun

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3), \quad \Lambda^{1-T_3} \equiv 1(\mathfrak{L}^3),$$

so würde auch

$$\Lambda^{(1+T_1)(1-T_2)} \equiv \Lambda^{(1+T_1)(1-T_3)} \equiv 1(\mathfrak{L}^4)$$

folgen, was wieder gegen die Fälle α) und β) verstößt. Somit sei

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^2), \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}) \not\equiv (\mathfrak{L}'^2), \quad \Lambda^{1-T_3} \equiv 1(\mathfrak{L}^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}).$$

r ist ungerade. Nun ist

$$\Lambda^{(1+T_1)(1-T_3)} = (1 + \Lambda_r)^{1+T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}^{r+1}); \; \Lambda^{(1+T_1)(1-T_2)} \equiv 1(\mathfrak{L}^2).$$

Somit, wegen der Fälle α) und β) sicher $1 + r \leqq 6$, $r \leqq 5$. Es kann also nur $r = 1$ oder 5 sein. Ist $r = 1$, so schließt man genau wie im allgemeinen Fall, daß

$$\Lambda^{4(1-T)(1-T_i)} \equiv \pi_i(\mathfrak{L}_1^9) \not\equiv 1(\mathfrak{L}_1^9)$$
$$\equiv 1(\mathfrak{L}_1^8). \qquad (i = 1, 2, 3).$$

T ist dabei eine durch die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$ festgelegte Substitution. Da es (mod 4) nur vier inkongruente Zahlen $\pi \equiv 1(2)$ gibt, so müssen zwei π_i einander (mod 4) kongruent sein, also

$$\Lambda^{4(1-T)(1-T_i)} \equiv \Lambda^{4(1-T)(1-T_k)}(\mathfrak{L}_1^9),$$
$$\Lambda^{4(1-T)(1-T_i T_k)} \equiv 1(\mathfrak{L}_1^9),$$

was obigem widerspricht.

Ist dagegen $r = 5$, so folgt

$$\Lambda^{(1+T_3)(1-T_i)} = (1 + \Lambda_1)^{1+T_3} = (1 + \Lambda_1 + T_3\Lambda_1 + \Lambda_1 T_3 \Lambda_1)$$
$$= (1 + \Lambda_1 - T_3\Lambda_1 + 2T_3\Lambda_1 + \Lambda_1 T_3 \Lambda_1) \equiv 1 + \Lambda_1 T_3 \Lambda_1 (\mathfrak{L}^4)$$
$$\equiv 1(\mathfrak{L}^2) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^3). \qquad (i = 1, 2)$$

Nehmen wir mit Hilfe der Substitution T_3 die Normen aller Zahlen, so erhalten wir deshalb einen Unterkörper, dessen Verzweigungsgruppe durch $T_1^{x_1} T_2^{x_2}$ gegeben werden kann und in dem

$$(2) = \overline{\mathfrak{L}}^4, \quad \Lambda^{1-T_i} \equiv 1(\overline{\mathfrak{L}}) \not\equiv (\overline{\mathfrak{L}}'^2), \qquad (i = 1, 2)$$

falls Λ eine genau durch $\overline{\mathfrak{L}}$ teilbare Zahl ist. Wir betrachten diesen Unterkörper für sich allein, schreiben wieder $\mathfrak{L}$ an Stelle von $\overline{\mathfrak{L}}$ und beweisen, daß er nicht existieren kann. Setzt man

$$T_1 = S_1^{\nu_1}, \; T_2 = S_2^{\nu_2} \text{ und } S_1 \neq S_1'^2, \; S_2 \neq S_2'^2,$$

so greife man den Oberkörper mit der Relativgruppe

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \qquad (0 \leqq x_i < 2\nu_i, \; i = 1, 2)$$

heraus. In demselben ist entweder

$$\Lambda_1 = \Lambda + s\Lambda \quad \text{oder} \quad \Lambda_1 = \frac{1+\sqrt{m}}{2}\Lambda + \frac{1-\sqrt{m}}{2} s\Lambda$$

eine genau durch $\mathfrak{L}$ teilbare Zahl $\left(\frac{(\Lambda_1)}{\mathfrak{L}} \text{ zu } 2 \text{ prim}\right)$, für die $\Lambda_1 = s\Lambda_1$. Bilden die Potenzen von S_1 die Zerlegungsgruppe, so folgt genau wie früher

$$\begin{aligned}\Lambda_1^{2(1-T_1)(1-T)} &\equiv (1 + \Lambda_2^2)^{1 + S_1 + \cdots + S_1^{\nu_1 - 1}} (\mathfrak{L}^6) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^5)\\ &\equiv \pi(\mathfrak{L}_1^5) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^5)\\ &\equiv 1(\mathfrak{L}_1^4),\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$. Es müßte also $\pi \equiv -1(4)$. Nimmt man für T einmal T_1, einmal T_2, so erhält man den Widerspruch wie früher. Damit ist bewiesen, daß im Fall $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ die Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale höchstens zwei unabhängige Substitutionen enthält, deren Quadrat die Einheitssubstitution ist.

b) $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$, $\sigma = 2$. Dieser Fall wird mit den Mitteln von a) erledigt, wenn man dabei nur die absolute Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale betrachtet, also die Substitution s neben den T mit hinzuzieht. Man findet, daß die absolute Verzweigungsgruppe nur die Form

$$s^x T^X \qquad (0 \leqq x < 2, \; 0 \leqq X < 2^u)$$

haben kann.

c) Es bleibt noch übrig, im Falle $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ zu beweisen, daß niemals der Fall einer Verzweigungsgruppe

$$T = T_1^{x_1} T_2^{x_2}, \qquad (0 \leqq x_i < 4)$$

wo $(2) = \mathfrak{L}^{16}$ ist, auftreten kann. Hat Λ die frühere Bedeutung, und ist

$$\Lambda^{1-T} = 1 + \Lambda_r \equiv 1(\mathfrak{L}^r) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r+1}),$$

so zeigt man mit den früheren Mitteln, daß $r < 4$. Es sei

$$\Lambda^{1-T_1} \equiv 1(\mathfrak{L}^{r_1}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r_1+1}); \quad \Lambda^{1-T_2} \equiv 1(\mathfrak{L}^{r_2}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^{r_2}),$$

wo $r_1 \leqq r_2 < 4$. Dann folgt:

$$\Lambda^{1-T_1^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^{2r_1}); \quad \Lambda^{1-T_2^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^{2r_2})$$

und somit

$$\Lambda^{(1+T_1^2)(1+T_2^2)(1-T_1)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{4r_1}),$$

$$\Lambda^{(1+T_1^2)(1+T_2^2)(1-T_2)} \equiv 1(\mathfrak{L}^{2(r_1+r_2)+1} \text{ resp. } \mathfrak{L}^{4r_2}, \text{ wenn } 4r_2 < 2(r_1+r_2)+1).$$

Nun liegt $\Lambda^{(1+T_1^2)(1+T_2^2)}$ in einem Unterkörper, wie er in Fall a) studiert wurde; da nur die dortigen Fälle α) und β) auftreten können, ist

$$4r_1 \leqq 4; \quad 2(r_1+r_2)+1 \leqq 12.$$
$$r_1 = 1 \qquad\qquad r_2 \leqq 4.$$

Man zeigt, daß r_2 ungerade, also $= 1, 3$ sein muß. Der Fall $r_2 = 1$ erledigt sich wie früher als unmöglich. Also bleibt nur der Fall $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ übrig. Man beweist, daß

$$\Lambda^{1-T_1^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^3) \not\equiv 1(\mathfrak{L}'^4); \quad \Lambda^{1-T_2^2} \equiv 1(\mathfrak{L}^5).$$

Dann sieht man, daß

$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_2)} \equiv \pi_1(\mathfrak{L}_1^{17}) \equiv 1(\mathfrak{L}_1^{16}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}_1^{17}),$$
$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_1^2T_2)} \equiv \pi_2(\mathfrak{L}_1^{17}) \equiv 1(\mathfrak{L}_1^{16}) \not\equiv 1(\mathfrak{L}_1^{17}),$$

wo π_1, π_2 in k liegen und $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' s \mathfrak{L}'$ ist. Da aber $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv -1(4)$ sein muß, so folgt

$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_2)} \equiv \Lambda^{4(1-T_1)(1-T_1^2T_2)}\ (\mathfrak{L}_1^{17}),$$
$$\Lambda^{4(1-T_1)(1-T_1^2)} \equiv 1\ (\mathfrak{L}_1^{17}),$$

was unmöglich ist. Damit ist die Unmöglichkeit unserer Annahme in jedem Fall erwiesen und der Satz bewiesen.

5. Wir kehren nun wieder zu dem Körper $K(K', K'')$ zurück. Es werde $(l) = \mathfrak{L}'^{\sigma n_0'}$ in K' resp. $= \mathfrak{L}''^{\sigma n_0''}$ in K'', wo $\mathfrak{L}^{(i)}$ ein aus lauter voneinander verschiedenen Primidealen zusammengesetztes Ideal ist. Haben wir einen entsprechenden zweiten Körper $\bar{K}(\bar{K}', \bar{K}'')$, in dem alle Größen gleich, nur überstrichen bezeichnet seien, so bilden wir den gemeinsamen Oberkörper der beiden Körper $K^*(K^{*\prime}, K^{*\prime\prime})$, wo sich somit $K^{*\prime}$ aus K' und $\bar{K}'$, $K^{*\prime\prime}$ aus K'' und $\bar{K}''$ zusammensetzt. Es werde nun (l) in $K^{*\prime}$ die $n_0^{*\prime}$te Potenz, in $K^{*\prime\prime}$ die $n_0^{*\prime\prime}$te Potenz eines Ideals $\mathfrak{L}'^*$ resp. $\mathfrak{L}''^*$ von der früheren Eigenschaft. Dann gilt der Satz, *daß $n_0^{*\prime}$ die größere der beiden Zahlen n_0' und $\bar{n}_0'$, $n_0^{*\prime\prime}$ die größere der beiden Zahlen n_0'' und $\bar{n}_0''$ ist.* Dabei ist nur der Fall $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ausgenommen; *in letzterem Falle ist $n_0'^*$ resp. $n_0''^*$ ebenfalls die größere der Zahlen n_0' und $\bar{n}_0'$ resp.*

n_0'' und $\bar{n}_0''$, falls die Verzweigungsgruppe in beiden Körpern K' und $\bar{K}'$ resp. K'' und $\bar{K}''$ nicht zyklisch ist; im anderen Falle kann sie auch das doppelte desjenigen $n_0^{(i)}$ oder $\bar{n}_0^{(i)}$ werden, in dessen Körper die Verzweigungsgruppe zyklisch ist.

Beweis: a) $l \neq 2$ oder $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) = 0$. Man darf $K^{(i)}$ und $\bar{K}^{(i)}$ als ohne gemeinsamen Unterkörper außer k annehmen ($i = 1, 2$). Dann setzt sich die Relativgruppe von $K^{*(i)}$ zusammen aus den Relativgruppen von $K^{(i)}$ und $\bar{K}^{(i)}$. Die Verzweigungsgruppe von den in (l) enthaltenen Primidealen ist in $K^{(i)}$, $\bar{K}^{(i)}$ und $K^{*(i)}$ zyklisch. Die Verzweigungsgruppe des letzteren Körpers ist also zyklische Untergruppe der Gruppe

$$T^{(i)x}\,\bar{T}^{(i)\bar{x}} \qquad (0 \leqq x < n_0^{(i)};\ 0 \leqq \bar{x} < \bar{n}_0^{(i)}).$$

Die größte hierin enthaltene zyklische Untergruppe besitzt aber als Grad die größere der Zahlen $n_0^{(i)}$ und $\bar{n}_0^{(i)}$, w. z. b. w.

b) $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$. Man zeigt auf gleiche Weise, daß wenn die Verzweigungsgruppen von $K^{(i)}$ und $\bar{K}^{(i)}$ beide nicht zyklisch sind, $K^{*(i)}$ eine Verzweigungsgruppe der Form

$$T^y\,T_0^{y_0} \qquad \left(0 \leqq y < \frac{n_0^{(i)}}{2},\ 0 \leqq y_0 < 2\right)$$

besitzt, die Untergruppe einer Gruppe

$$T^{(i)x}\,T_0^{(i)x_0}\,\bar{T}^{(i)\bar{x}}\,\bar{T}_0^{(i)\bar{x}_0} \qquad \begin{cases} 0 \leqq x < \frac{n_0^{(i)}}{2} \\ 0 \leqq x_0 < 2 \\ 0 \leqq \bar{x} < \frac{\bar{n}_0^{(i)}}{2} \\ 0 \leqq \bar{x}_0 < 2 \end{cases}$$

ist. Ist dagegen die Verzweigungsgruppe z. B. von $\bar{K}^{(i)}$ zyklisch, so ist die Verzweigungsgruppe $T^y T_0^{y_0}$ von $K^{*(i)}$ Untergruppe von

$$T^{(i)x}\,T_0^{(i)x_0}\,\bar{T}^{(i)\bar{x}}, \qquad \begin{cases} 0 \leqq x < \frac{n_0^{(i)}}{2} \\ 0 \leqq x_0 < 2 \\ 0 \leqq \bar{x} < \bar{n}_0^{(i)} \end{cases}$$

woraus sich wieder obiger Satz ergibt.

6. Der zu K gehörige Strahl (f) von k. Man bestimme alle in der Relativdiskriminante von K in bezug auf k aufgehenden Primzahlen $l_1, l_2, \cdots, l_r$; resp. $l, l_1, l_2, \cdots, l_r$. In letzterem Falle werde $(l) = \mathfrak{L}'^{\sigma' n_0'}$ in K', $= \mathfrak{L}''^{\sigma n_0''}$ in K'', wo $n_0' = l^{u_0'}$ und $n_0'' = l^{u_0''}$ ist. Dann setze man:

$$f = \varepsilon l_1 l_2 \cdots l_r l^{\nu},$$

wo.

$\varepsilon = 2$ für $m = -1$, $\varepsilon = 3$ für $m = -3$, $\varepsilon = 1$ in jedem anderen Falle;

$\nu = 0$ für $u_0' = u_0'' = 0$;

$\nu = u_0' + 1$, wenn $u_0' \geqq u_0''$ und $u_0' > 0$ ist, und $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ausgeschlossen wird;

$\nu = u_0'' + 2 - \sigma$, wenn $u_0'' > u_0' \geqq 0$ ist, und $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ausgeschlossen wird.

Ist im Fall $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$, $\tau_i = 1$, wenn die Verzweigungsgruppe in $K^{(i)}$ zyklisch ist, sonst $\tau_i = 0$, so ist

$$\nu = \tau_1 + u_0' + 1, \text{ wenn } \tau_1' + u_0' \geqq \tau_2 + u_0'',\ u_0' > 0,$$
$$\nu = \tau_2 + u_0'' + 2 - \sigma, \text{ wenn } \tau_2 + u_0'' > \tau_1 + u_0' \geqq 0.$$

Der Strahl (f) heißt der dem Körper K zugeordnete Strahl von k. Der Führer f enthält alle und nur die in der Relativdiskriminante auftretenden Primzahlen, ausgenommen für $\varepsilon \neq 1$. Der der Potenz l^ν entsprechende Faktor der Strahlklassenzahl*) genügt der Kongruenz

$$l^{2\nu-2}(l-1)\left(l - \left(\frac{d}{l}\right)\right) \equiv 0(n_0' n_0'').$$

Denn für $\left(\frac{d}{l}\right) \neq 0$, $\sigma = 1$ enthält der Ausdruck den Faktor $l^{2\nu-2}$, wo $\nu = u_0^{(i)} + 1$ resp. $\tau_i + u_0^{(i)} + 1$ und $u_0^{(i)}$ die größere der beiden Zahlen u_0' und u_0'' ist. Also ist $l^{2\nu-2}$ sicher durch $n_0' n_0'' = l^{u_0' + u_0''}$ teilbar. Ist $\left(\frac{d}{l}\right) = 0$, $\sigma = 2$, so ist $l^{2\nu-1}$ Faktor des Ausdruckes. Ist dann $\nu = u_0' + 1$ resp. $\tau_1 + u_0' + 1$, so ist $n_0' n_0'' = l^{u_0' + u_0''} \leqq l^{2u_0'} < l^{2u_0'+1} = l^{2\nu-1}$, resp. $n_0' n_0'' \leqq 2^{2u_0'+1} \leqq 2^{2\nu-1}$. Ist dagegen $\nu = u_0''$ resp. $\tau_2 + u_0''$, so ist wegen $u_0'' > u_0'$: $n_0' n_0'' \leqq l^{2u_0'-1} = l^{2\nu-1}$ resp. $n_0' n_0'' \leqq 2^{2\nu-1}$.

7. **Hauptsatz:** *Sind K und $\bar{K}$ zwei zu k relativ-Abelsche Körper von den in* 1. *angegebenen Eigenschaften, so ist der Führer des dem Oberkörper $K^*(K, \bar{K})$ zugeordneten Strahls (f^*) von k das kleinste gemeinsame Vielfache der Führer f und $\bar{f}$ der den Körpern K und $\bar{K}$ in k zugeordneten Strahlen.*

Der Satz ist für alle von l verschiedenen in f^* enthaltenen Primzahlen selbstverständlich.

Um ihn für l zu beweisen, nehme man l in f zur Potenz l^ν, in $\bar{f}$ zur Potenz $l^{\bar{\nu}}$ und in f^* zur Potenz l^{ν^*} als Faktor enthalten an. Dann ist sicher

$$\nu^* \geqq \bar{\nu}; \quad \nu^* \geqq \nu.$$

Der Satz 5. und die Definition von ν in 6., insbesondere die Bedeutung von τ_i im Falle $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ zeigen aber, daß wenigstens in einer der Ungleichungen das Gleichheitszeichen auftreten muß, w. z. b. w.

*) S. 181.

Kapitel III.

Der Klassenstrahl.

1. Definition. Es sei K ein zu k relativ-zyklischer, absolut Galoisscher Körper mit der Relativgruppe $S^x (0 \leq x < n = l^u)$, wo l eine Primzahl, und $sS = S^{\pm 1}s$ ist. Es sei f der Führer des K zugeordneten Strahls von k: $f = \varepsilon l_1 l_2 \cdots l_r l^\nu$, wo $(l_i) = \mathfrak{L}_i^{n_i}$, $(l) = \mathfrak{L}^{\sigma n_0}$, $n_i = l^{u_i}$, $n_0 = l^{u_0}$, und $\mathfrak{L}_i$ resp. $\mathfrak{L}$ aus lauter voneinander verschiedenen Primidealen zusammengesetzt ist. Die Zahlen ε und ν sind nach Kapitel II, 6. genau bestimmt. Man setzt

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_r \mathfrak{L}^\mu,$$

wo $\mu = 2$, wenn $u_0 = 0$, $l = 2$, $m = -1$ oder $l = 3$, $m = -3$, sonst $\mu = 0$, wenn $u_0 = 0$, und, falls man zunächst die Fälle $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$; $m = -1$, $l = 2$; oder $m = -3$, $l = 3$ ausschließt:

$$\mu = (\sigma u_0 + \sigma - 1) n_0 + 1, \text{ wenn } u_0 > 0, \text{ und } sS = Ss,$$
$$\mu = (\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1, \text{ wenn } u_0 > 0, \text{ und } sS = S^{-1}s.$$

In den Fällen $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ oder $l = 2$, $m = -1$, oder $l = 3$, $m = -3$ sei

$$\mu = (\sigma u_0 + 2\sigma - 1) n_0 + 1, \text{ wenn } u_0 > 0 \text{ und } sS = Ss,$$
$$\mu = (\sigma u_0 + 1) n_0 + 1, \qquad \text{wenn } u_0 > 0 \text{ und } sS = S^{-1}s.$$

Alle Zahlen A *von* K, *die* (mod $\mathfrak{F}$) *der Einheit kongruent sind,*

$$\mathrm{A} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}},$$

bilden den Klassenstrahl. Wenn eine Zahl von k im Klassenstrahl liegt, so liegt sie auch im Strahl (f). Denn wenn

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}},$$

so ist auch

$$\alpha \equiv 1 \pmod{l_1 l_2 \cdots l_r l^{\bar\nu}}.$$

Wenn aber $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$, oder $l = 2$, $m = -1$; oder $l = 3$, $m = -3$ ausgeschlossen sind, so ist wegen der Definition von μ: $\bar\nu = u_0 + 1$ oder $\bar\nu = u_0 + 2 - \sigma$ (da $2 = 3\sigma - \sigma^2$), je nachdem $sS = Ss$ oder $sS = S^{-1}s$. Nach den Festsetzungen Kapitel II, 6 ist daher $\bar\nu = \nu$. Im Falle $l = 2$, $m = -1$; $l = 3$, $m = -3$ ist $\bar\nu = \nu + 1$; denn dann enthält f wegen ε einen weiteren Faktor 2 resp. 3. Wenn $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) \neq 0$ ist, so ist die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{L}$ zyklisch, und $\bar\nu = \nu$, weil $\bar\nu$ mit der Festsetzung von ν übereinstimmt (nach Kapitel II, 6. ist $\tau_i = 1$).

Ist umgekehrt α eine Zahl des Strahles f in k, so ist nach Kapitel I, 2.

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{f},$$

also α^2 auch im Klassenstrahl, da nach obigem $\mu \leqq \bar{\nu} n_0$.

Mit Hilfe dieses Klassenstrahls $\mathfrak{F}$ können wir die Klassen des Oberkörpers K in Strahlklassen einteilen. *Zwei Ideale* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *von* K *heißen äquivalent* (mod $\mathfrak{F}$) *oder liegen in derselben Klassenstrahlklasse, wenn*

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = (\mathsf{A}),$$

und A *so mit einer Einheit multipliziert werden kann, daß eine Zahl des Klassenstrahls entsteht**). Man schreibt

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \pmod{\mathfrak{F}}.$$

Alle (mod $\mathfrak{F}$) äquivalenten Ideale bilden eine Strahlklasse, alle Strahlklassen eine Abelsche Gruppe. Aus letzterer greifen wir die zur Primzahl l gehörende Untergruppe heraus; d. h. ist l^{K} die größte in der Strahlklassenzahl H enthaltene Potenz von l, so betrachtet man nur die $\frac{H}{l^{\mathsf{K}}}^{\text{te}}$ Potenz aller Klassen resp. Ideale. l^{K} ist die Anzahl dieser Klassen.

Ist h die Klassenanzahl des Strahls f von k, $l^{\varkappa}$ die größte in h enthaltene Potenz von l, so macht man auch hier dieselbe Überlegung: $l^{\varkappa}$ ist die Anzahl der zu l gehörigen Strahlklassen in k.

Wenn $l \neq 2$ ist, so erkennt man aus obigem, daß alle Ideale jeder zu l gehörigen Klasse vom Strahl f in k in dieselbe zu l gehörige Klasse von $\mathfrak{F}$ in K fallen. Jede Klasse des Strahles f bleibt also Klasse im Strahle $\mathfrak{F}$ des Oberkörpers.

Ist $l = 2$, so bleibt dies nicht mehr bestehen. Man führt dann in k den *engeren Äquivalenzbegriff* ein, nach dem zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k nur dann äquivalent sind, wenn

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = (\alpha)$$

und (α) so gewählt werden kann, daß

$$\alpha \equiv 1 \pmod{f}.$$

Ist h_s^* die Klassenzahl des Strahls im engeren Sinne, so ist

$$h_s^* = 2^{\sigma + \varrho - 1} h_s.\text{**)}$$

Bei Zugrundelegung dieses engeren Begriffes gilt das vorige auch für $l = 2$.

*) Siehe hierzu Fueter: Der Klassenkörper der komplexen Multiplikation etc., Teubner 1911, S. 12 u. ff.

**) Siehe Kapitel I S. 181, wo σ und ϱ erklärt sind.

2. Satz: *Liegt die $(1-S)^{te}$ symbolische Potenz einer Zahl* A *im Klassenstrahl, so ist* A *nach jedem in* $\mathfrak{F}$ *enthaltenen Ideal* $\mathfrak{L}_i$, *das zu* (l) *prim ist, einer Zahl von* k *kongruent.*

Es sei

$$\mathsf{A}^{1-S} = \mathsf{H} \equiv 1(\mathfrak{L}_i),$$

so setze man

$$\mathsf{A}_1 = 1 + \mathsf{H} + \mathsf{H}^{1+S} + \cdots + \mathsf{H}^{1+S+S^2+\cdots+S^{n-2}};$$

dann ist

$$\mathsf{A}_1 \equiv n \not\equiv 0(\mathfrak{L}_i).$$

A_1 ist deshalb von Null verschieden; und da $\mathsf{H}^{1+S+\cdots+S^{n-1}} = \mathsf{A}^{1-S^n} = 1$ ist, muß

$$\mathsf{H} = \mathsf{A}_1{}^{1-S} = \mathsf{A}^{1-S};$$

somit ist $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_1}$ eine Zahl α von k und

$$\mathsf{A} = \alpha \mathsf{A}_1 \equiv n\alpha(\mathfrak{L}_i).$$

3. Für das in (l) enthaltene Ideal $\mathfrak{L}$ liegen die Verhältnisse komplizierter. Wir beweisen schrittweise:

a) *Wenn* A *eine Zahl des Zerlegungskörpers in bezug auf* k *der in* (l) *enthaltenen Primideale in* K *ist, und wenn* A *zu* $\mathfrak{l}$ *prim ist, so folgt aus*

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1(\mathfrak{l}^i),$$

daß A (mod $\mathfrak{l}^i$) *einer Zahl von* k *kongruent ist.* i *ist eine beliebige ganze Zahl.*

Denn jedes Primideal $\mathfrak{L}'$ von (l) ist im Zerlegungskörper vom 1. Grade. Ist Λ' durch $\mathfrak{L}'$ resp. $\mathfrak{L}'s\mathfrak{L}'$, wenn $\sigma \neq 2$ ist, teilbar, aber so, daß $\frac{(\Lambda')}{\mathfrak{L}'}$ resp. $\frac{(\Lambda')}{\mathfrak{L}'s\mathfrak{L}'}$ zu (l) prim ist, so setze man:

$$\Lambda = \Lambda'^{S+S^2+\cdots+S^{r_z-1}}$$

(r_z der Grad der Zerlegungsgruppe). Λ ist zu $\mathfrak{L}'s\mathfrak{L}'$ prim; die Spur γ von Λ in bezug auf k ist ebenfalls zu (l) prim. Setzt man:

$$\mathsf{A}^{1-S} = \mathsf{H}, \quad \mathsf{A}_1 = \Lambda + \Lambda^S \mathsf{H} + \Lambda^{S^2}\mathsf{H}^{1+S} + \cdots + \Lambda^{S^{r_z-1}}\mathsf{H}^{1+S+\cdots S^{r_z-2}},$$

so ist wegen der Annahme $\mathsf{A}_1 \equiv \gamma$ (mod $\mathfrak{l}^i$) $\not\equiv 0(\mathfrak{l}^i)$; A_1 ist somit von Null verschieden, und da $\mathsf{A}_1{}^{1-S} = \mathsf{H}$, muß wieder $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_1}$ eine Zahl α von k sein; dieselbe ist zu (l) prim; also

$$\mathsf{A} = \alpha\mathsf{A}_1 \equiv \alpha\gamma(\mathfrak{l}^i).$$

b) *Wenn* A *eine zu* (l) *prime Zahl des Trägheitskörpers in bezug auf* k *der in* (l) *enthaltenen Primideale ist, so folgt aus*

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^i},$$

daß A (mod $\mathfrak{l}^i$) *einer Zahl von* k *kongruent ist.*

Wegen a) haben wir nur zu beweisen, daß A (mod $\mathfrak{l}^i$) einer Zahl des Zerlegungskörpers kongruent sein muß. Wir nehmen an, der Satz gelte für einen beliebigen Unterkörper des Trägheitskörpers und beweisen ihn für den nächst höheren, relativ-zyklischen Körper vom Relativgrad l. Da der Satz für den Zerlegungskörper bewiesen ist, folgt daraus durch den Schluß der vollständigen Induktion der Satz allgemein. Z sei die Substitution der Relativgruppe, $Z^l = 1$; Z ist eine Potenz von S. Aus

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^i)$$

folgt dann auch

$$\mathsf{A}^{1-Z} \equiv 1 \ (\mathfrak{l}^i).$$

Da l prim zur Relativdiskriminante des Trägheitskörpers ist, gibt es wenigstens eine Zahl Θ', für die $\Theta' - Z\Theta'$ zu $\mathfrak{L}'$, einem Primideal von (l), prim ist. Somit wegen $Z\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'$:

$$\begin{aligned}\Delta(\Theta') &= (\Theta' - Z\Theta')(\Theta' - Z^2\Theta') \cdots (\Theta' - Z^{l-1}\Theta') \not\equiv 0 \ (\mathfrak{L}') \\ &= l\Theta'^{l-1} - (l-1)\vartheta_1\Theta'^{l-2} + \cdots - (-1)^l\vartheta_{l-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{L}'),\end{aligned}$$

wo $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_{l-1}$ Zahlen des Unterkörpers sind. Alle ϑ_i sind nicht durch $\mathfrak{L}'$ teilbar. Ist ϑ_i dasjenige unter ihnen, das zu $\mathfrak{L}'$ prim ist und den kleinsten Index besitzt, so setze man $\Theta'^i = \Theta$, die Spur ϑ von Θ in bezug auf den Unterkörper ist dann zu $\mathfrak{L}'$ prim, da sie kongruent $i\vartheta_i$ (mod $\mathfrak{L}'$) ist. Jetzt setzt man:

$$\mathsf{A}^{1-Z} = \mathsf{H}, \ \mathsf{A}_1^* = \Theta + \Theta^Z\mathsf{H} + \Theta^{Z^2}\mathsf{H}^{1+Z} + \cdots + \Theta^{Z^{l-1}}\mathsf{H}^{1+Z+\cdots+Z^{l-2}},$$

so wird wie früher:

$$\mathsf{A}_1^{1-Z} = \mathsf{H}; \quad \mathsf{A}_1 \equiv \vartheta \ (\text{mod } \mathfrak{l}^i); \quad \mathsf{A}_1 \neq 0; \quad \mathsf{A} = \alpha\mathsf{A}_1 \equiv \alpha\vartheta \ (\text{mod } \mathfrak{L}'^i)$$

oder

$$\mathsf{A} \equiv \alpha^* \ (\text{mod } \mathfrak{L}'^i),$$

wo α^* im Unterkörper liegt. Da aber nach Annahme

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \ (\text{mod } \mathfrak{L}'^i)$$

und der Satz für den Unterkörper gelten soll, so ist α^*, d. h. auch A (mod $\mathfrak{L}'^i$) einer Zahl von k äquivalent. Da dies für jedes Primideal $\mathfrak{L}'$ gilt, so gilt es auch für $\mathfrak{l}^i$.

c) Der Trägheitskörper relativ zu k der in (l) enthaltenen Primideale ist mit dem Verzweigungskörper identisch, da der Relativgrad eine Potenz von l ist. Setzt man $S^{\frac{n}{n_0}} = T$, so ist T^x $(0 \leq x < n_0)$ die Verzweigungsgruppe. Wir bauen K sukzessive aus dem Verzweigungskörper auf durch $K_1, K_2, \cdots, K_{u_0-1}, K_{u_0} = K$, wo jeder Körper den Relativgrad l zum vorhergehenden hat. Ist $(l) = \mathfrak{L}^{\sigma n_0}$ in K, $(l) = \mathfrak{L}_i^{\sigma l^i}$ in K_i, so ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_i^{l^{u_0-i}}$*).

*) Die Bezeichnung $\mathfrak{L}_i$ ist nur vorübergehend und darf nicht mit den früheren Teilern $\mathfrak{L}_i$ von l_i verwechselt werden.

α) Jede Zahl A *von* $K_\varkappa$ *läßt sich in der Form darstellen*

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2} + \cdots + \Lambda_{q_\varkappa}; \quad q_1 \frac{n_0}{l} < q_2 \frac{n_0}{l^2} < \cdots < q_\varkappa \frac{n_0}{l^\varkappa},$$

wo Λ_{q_i} *eine genau durch* $\mathfrak{L}_i'^{q_i}$ *teilbare Zahl von* K_i *oder gleich Null und* q_i *zu* l *prim ist.* α *liegt im Verzweigungskörper;* $\mathfrak{L}_i'$ *ist ein in* K_i *liegendes Primideal von* $\mathfrak{L}_i$; $\mathfrak{L}_i' = \mathfrak{L}'^{l^{u_0-i}}$.

Denn jede Zahl A ist $(\bmod\, \mathfrak{L}_\varkappa')$ einer Zahl α des Verzweigungskörpers kongruent; ist $\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_r$, und $\mathfrak{L}_\varkappa'^{r}$ die größte in Λ_r enthaltene Potenz von $\mathfrak{L}_\varkappa'$, $r = l^{u_0-i} q_i$, wo q_i zu l prim, so ist, wenn Λ_{q_i} die obige Bedeutung hat, $\frac{\Lambda_r}{\Lambda_{q_i}}$ einer Zahl α_1 des Verzweigungskörpers kongruent $(\bmod\, \mathfrak{L}_\varkappa')$; also, da α zu $\mathfrak{L}_\varkappa'$ prim ist und für $\alpha_1 \Lambda_{q_i}$ wieder Λ_{q_i} geschrieben werden kann:

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_i} + \Lambda_{r_1}, \quad r_1 > l^{u_0-i} q_i.$$

r_1 kann als die größte Zahl angenommen werden, für die A einer Zahl von K_i $(\bmod\, \mathfrak{L}_\varkappa'^{r_1})$ kongruent wird. Ist $r_1 = l^{u_0-i_1} q_{i_1}$, so ist deshalb $i_1 > i$; denn sonst könnte Λ_{r_1} in der eben angegebenen Weise nochmals umgeformt werden, wodurch ein $r_2 > r_1$ erhalten würde, für das A einer Zahl von K_i $(\bmod\, \mathfrak{L}_\varkappa'^{r_2})$ kongruent würde, gegen Annahme. Λ_{r_1} formt man weiter in der angegebenen Weise um und erkennt so die Richtigkeit des Satzes. Außerdem ist $l^{u_0-i_1} q_{i_1} > l^{u_0-i} q_i$.

β) Wir beschränken uns von jetzt an auf den Fall $sS = S^{-1}s$. Der Kreiskörperfall $sS = Ss$ ist für $\sigma = 1$ genau gleich, für $\sigma = 2$ entsprechend durchzuführen. Außerdem seien, wenn nicht das Gegenteil angenommen wird, die Fälle $l = 2$ und $l = 3$, $\sigma = 2$ ausgeschlossen.

Wenn

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}'^{t n_0})\ (t > 0), \ \mathsf{A} \equiv 0 \ (\mathfrak{L}'^{r}), \ \mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}},$$

wo $\mathfrak{L}'$ *ein Primideal von* (l) *und* Λ_{q_i} *die in* α) *angegebene Bedeutung hat, so wird*

$$q_1 \geqq tl - 1 + \frac{r}{l^{u_0-1}} - (\sigma - 1),$$

$$q_i \geqq tl^i - 1 + \frac{r}{l^{u_0-i}} - (\sigma - 1) l \qquad (i = 2, 3, \cdots, u_0).$$

Die Ungleichungen gelten nur für diejenigen q_i, *für die* Λ_{q_i} *von Null verschieden ist.*

Um Doppelindices zu vermeiden, beweisen wir nur den allgemeinsten Fall, daß alle $\Lambda_{q_i} \neq 0$ sind. Beschränken wir uns auf K_2, wo $\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2}$, so folgt aus $\mathsf{A} - T^l \mathsf{A} = \Lambda_{q_2} - T^l \Lambda_{q_2}$ wegen Hilfssatz II und III:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,tl^2+l}); \quad \Lambda_{q_2}^{1-T^l} \equiv 1 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,1+\sigma l}) \not\equiv 1 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,2+\sigma l});$$

also

$$q_2 + \sigma l + 1 \geqq tl^2 + l + \frac{r}{l^{u_0-2}}$$

oder

$$q_2 \geqq tl^2 - 1 + \frac{r}{l^{u_0-2}} - (\sigma-1)l.$$

Nehmen wir allgemein den Körper $K_{\varkappa-1}$, so ist nach Hilfssatz III:

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

Wir nehmen an, in diesem Körper sei über A nichts anderes als diese Kongruenz vorausgesetzt, und es gelten dann die Ungleichungen:

$$q_i \geqq tl^i - 1 + \frac{r}{l^{u_0-i}} - (\sigma-1)l \qquad (i = 2, 3, \cdots, \varkappa-1).$$

Beweisen wir in $K_\varkappa$ für eine Zahl A dieses Körpers, für die

$$\mathsf{A}^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}^{tl^\varkappa+l}\right)$$

ist, dieselben Ungleichungen, so gelten dieselben allgemein, nach dem Schluß der vollständigen Induktion, da für $\varkappa = 2$ die Ungleichheit oben bewiesen ist. Es sei in $K_\varkappa$:

$$\mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}} + \Lambda_{q_\varkappa}, \quad \mathsf{A}' = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}},$$

also

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' + \Lambda_{q_\varkappa},$$

wo A' in $K_{\varkappa-1}$ liegt. Dann ist

$$\mathsf{A} - T^{l^{\varkappa-1}}\mathsf{A} = \Lambda_{q_\varkappa} - T^{l^{\varkappa-1}}\Lambda_{q_\varkappa},$$

oder wegen der Hilfssätze II und III:

$$q_\varkappa + 1 + \sigma(l + \cdots + l^{\varkappa-1}) \geqq tl^\varkappa + \frac{r}{l^{u_0-\varkappa}} + l + \sigma(l^2 + \cdots + l^{\varkappa-1}),$$

$$q_\varkappa \geqq tl^\varkappa - 1 + \frac{r}{l^{u_0-\varkappa}} - (\sigma-1)l.$$

Deshalb ist

$$\mathsf{A} - T^l\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}' - T^l\mathsf{A}' \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{\,tl^\varkappa + \frac{r}{l^{u_0-\varkappa}} + l}\right),$$

oder, da A' wegen der Ungleichungen in Satz α) durch genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{L}_\varkappa'$ teilbar ist, wie A:

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^\varkappa+l}_\varkappa\right) \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+1}_{\varkappa-1}\right).$$

Andererseits ist

$$\mathsf{A}'^{1-T} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}-(\sigma-1)}_{\varkappa-1}\right);$$

wenn $\sigma = 1$, folgt daher

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}'^{\,tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

Wenn $\sigma = 2$ und λ eine genau durch $\mathfrak{L}'^{tl^{\varkappa-1}}_{\varkappa-1}$ teilbare Zahl des Verzweigungskörpers ist, so kann man $\mathsf{A}'^{1-T} = 1 + \frac{\lambda}{\Lambda}$ setzen, wo Λ durch $\mathfrak{L}'_{\varkappa-1}$ genau teilbar ist. Dann wird

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 + \lambda \sum_{\iota=0}^{l-1} \frac{1}{T^\iota \Lambda} \quad \left(\mathfrak{L}'^{tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

$\sum\limits_{\iota=0}^{l-1} \frac{1}{T^\iota \Lambda} = \Lambda'$ ist wegen oben wenigstens durch $\mathfrak{L}'_{\varkappa-1}$ teilbar; man beweist wie früher*), daß es dann wenigstens durch $\mathfrak{L}^l_{\varkappa-1}$ teilbar ist. Also wieder

$$\mathsf{A}'^{1-T^l} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}'^{tl^{\varkappa-1}+l}_{\varkappa-1}\right).$$

A' liegt aber in $K_{\varkappa-1}$ und nach Annahme folgt hieraus

$$q_i \geqq tl^i - 1 + \frac{r}{l^{u_0-i}} - (\sigma-1)l \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \cdots, \varkappa - 1.$$

Da für $i = \varkappa$ die Bedingung schon bewiesen, folgen dieselben allgemein. Es bleibt nur noch übrig, die Bedingung für q_1 zu zeigen. Man erkennt aber sofort

$$\mathsf{A} - T\mathsf{A} \equiv \Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1} \equiv 0 \quad \left(\mathfrak{L}_2^{tl^2 + \frac{r}{l^{u_0-2}} - (\sigma-1)l}\right),$$

$$q_1 + 1 \geqq tl + \frac{r}{l^{u_0-1}} - (\sigma - 1),$$

$$q_1 \geqq tl - 1 + \frac{r}{l^{u_0-1}} - (\sigma - 1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

γ) *Wenn* $\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}^{tn_0})\; (t > 0)$, *so kann man* A *stets so mit einer Zahl des Verzweigungskörpers multiplizieren, daß das Produkt zu* $\mathfrak{L}$ *prim wird.*

Wir beweisen den Satz zunächst für jedes in $\mathfrak{L}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{L}'$. Ist nämlich A genau durch $\mathfrak{L}'^{q_\varkappa}_\varkappa$ teilbar ($q_\varkappa$ zu l prim), so ist

$$\mathsf{A} = \Lambda_{q_\varkappa} + \Lambda_{q_{\varkappa+1}} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}},$$

also nach β)

$$\varkappa = 1\colon\; q_1 \geqq tl - 1 + q_1 - (\sigma - 1); \quad \text{oder} \quad tl \leqq \sigma,$$

$$\varkappa > 1\colon\; q_\varkappa \geqq tl^\varkappa - 1 + q_\varkappa - (\sigma - 1)l; \quad \text{oder} \quad tl^\varkappa \leqq 1 + (\sigma - 1)l,$$

was unmöglich ist, falls $l \neq 2$. Also kann A nur durch $\mathfrak{L}'^{\varkappa n_0}$ teilbar sein, woraus der Satz folgt.

δ) Wenn

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}\right) \quad \text{und} \quad \mathsf{A} = \alpha + \Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}},$$

*) Beweis von Hilfssatz III S. 200.

so darf man wegen γ) α zu $\mathfrak{L}$ prim annehmen, also $r = 0$ in β) setzen. Es ist somit

$$q_i \geqq (\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^i - 1 - (\sigma - 1) l \qquad (i > 1),$$
$$q_1 \geqq (\sigma u_0 + 1 - \sigma) l - \sigma$$

für alle q_i, für die $\Lambda_{q_i} \neq 0$. Daraus folgt

$$q_i \geqq \sigma(u_0 - 1) l^i \qquad (i = 1, 2, \cdots, u_0);$$

man kann A deshalb auch in der Form schreiben, wenn man es noch mit α^{-1} multipliziert denkt:

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1} \left(\Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}}\right),$$

wo

$$q_1 \geqq l - \sigma,$$
$$q_i \geqq l^i - (\sigma - 1)\, l - 1 \qquad (i > 1)$$

für alle q_i, für die $\Lambda_{q_i} \neq 0$ ist. Dabei ist Λ_{q_i} genau durch $\mathfrak{L}_i'^{q_i} = \mathfrak{L}'^{q_i l^{u_0 - i}}$ teilbar, und $\mathfrak{L}'$ ist irgend ein Primideal von $\mathfrak{L}$.

Es fragt sich, wie viel (mod $\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}$) inkongruente A es gibt, deren $(1 - T)^{\text{te}}$ symbolische Potenz die Bedingung

$$\mathsf{A}^{1 - T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}\right)$$

erfüllen.

Zunächst in K_1 folgt aus $\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1} \Lambda_{q_1}$, $q_1 \geqq l - \sigma$:

$$\Lambda_{q_1} - T \Lambda_{q_1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}_1^{l+1})$$

oder wegen Hilfssatz I

$$q_1 + 1 \geqq l + 1, \quad q_1 > l$$

und

$$\mathsf{A} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}_1'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l + 1}\right)$$

d. h. es gibt nur ein A.

In K_2 wird

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0 - 1} (\Lambda_{q_1} + \Lambda_{q_2}), \; q_1 \geqq l - \sigma, \; q_2 \geqq l^2 - (\sigma - 1) l - 1,$$

und

$$\mathsf{A} - T\mathsf{A} = l^{u_0 - 1} [(\Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1}) + (\Lambda_{q_2} - T\Lambda_{q_2})] \equiv 0 \quad \left(\mathfrak{L}_2'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}\right).$$

$(\Lambda_{q_1} - T\Lambda_{q_1})$ ist genau durch $\mathfrak{L}_2'^{l(q_1 + 1)}$, $(\Lambda_{q_2} - T\Lambda_{q_2})$ genau durch $\mathfrak{L}_2'^{q_2 + 1}$ teilbar. Entweder ist also

$$q_2 + 1 \geqq l^2 + 1, \quad q_2 > l^2$$

und

$$l(q_1 + 1) \geqq l^2 + 1, \quad q_1 > l,$$

d. h.

$$\mathsf{A} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}_2'^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) l^2 + 1}\right),$$

oder es ist

$$l(q_1 + 1) = q_2 + 1;$$

daraus ergeben sich die beiden Lösungen

$$q_2 = l^2 - (\sigma - 1)\, l - 1, \quad q_1 = l - \sigma$$

und

$$q_2 = l^2 - 1, \qquad q_1 = l - 1,$$

die für $\sigma = 1$ zusammenfallen. Alle inkongruenten A sind dann gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A}_1 &= 1 + l^{u_0 - 1}\xi_1(\Lambda_{l-1} + \Lambda_{l^2-1}), \\ \mathsf{A}_\sigma &= 1 + l^{u_0-1}\xi_\sigma(\Lambda_{l-\sigma} + \Lambda_{l^2 - l(\sigma-1)-1}), \end{aligned}\right\} \mathsf{A}_1^{\,1-T} \equiv \mathsf{A}_\sigma^{\,1-T} \equiv 1 \ \left(\mathfrak{L}_2^{\prime\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma)l^2 + 1}\right),$$

wo ξ_1, ξ_σ alle Zahlen des Verzweigungskörpers (mod $\mathfrak{L}'^{n_0}$) durchlaufen. Man kann dann ξ_1, ξ_σ stets so bestimmen, daß

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \ \left(\text{mod } \mathfrak{L}_2^{\prime\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma)l^2 + 1}\right).$$

Denn wegen obigem kann man A stets in der Form

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}[\alpha\Lambda_{l-\sigma} + \beta\Lambda_{l^2 - l(\sigma-1)-1} + \gamma\Lambda_{l-1} + \delta\Lambda_{l^2-1}]$$

annehmen. Nimmt man

$$\xi_\sigma \equiv \alpha, \quad \xi_1 \equiv \gamma \ (\text{mod } \mathfrak{L}_2'^{\,l^2}),$$

so wird

$$\mathsf{A} - \mathsf{A}_1\mathsf{A}_\sigma \equiv l^{u_0-1}[(\beta - \xi_\sigma)\Lambda_{l^2 - l(\sigma-1)-1} + (\gamma - \xi_1)\Lambda_{l^2-1}].$$

Da aber

$$(\mathsf{A} - \mathsf{A}_1\mathsf{A}_\sigma) - T(\mathsf{A} - \mathsf{A}_1\mathsf{A}_\sigma) \equiv 0 \ \left(\mathfrak{L}_2^{\prime\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma)l^2 + 1}\right),$$

folgt ohne weiteres auch

$$\beta - \xi_\sigma \equiv 0, \quad \gamma - \xi_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{L}_2'^{\,l^2}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Allgemein seien in $K_{\varkappa-1}$ $\sigma\tau_{\varkappa-1}$ Zahlen

$$\mathsf{A}_i, \ \mathsf{A}_{\sigma i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \tau_{\varkappa-1})$$

der Form

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}\xi\left(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}}\right)$$

gegeben, für die A_i^{1-T} resp. $\mathsf{A}_{\sigma i}^{1-T} \equiv 1$ $\left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma)l^{\varkappa-1}+1}\right)$. Wir nehmen an, jedes weitere A, für das $\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1$ $\left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma)l^{\varkappa-1}+1}\right)$, lasse sich durch die Kongruenz

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1\mathsf{A}_\sigma\mathsf{A}_2\mathsf{A}_{2\sigma}\cdots\mathsf{A}_{\tau_{\varkappa-1}}\mathsf{A}_{\sigma\tau_{\varkappa-1}} \quad \left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}^{\prime\,(\sigma u_0 + 1 - \sigma)l^{\varkappa-1}+1}\right)$$

geben, falls man nur die ξ im Verzweigungskörper richtig $\left(\text{mod } \mathfrak{L}_{\varkappa-1}^{\prime\,l^{\varkappa-1}}\right)$ bestimmt. Nach obigem ist dann $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$.

Um eine Rekursionsformel für $\tau_\varkappa$ zu finden, gehen wir von $K_{\varkappa-1}$ zu $K_\varkappa$ über. Ist $\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_\varkappa})$, wo $q_\varkappa \geqq l^\varkappa - (\sigma - 1)l - 1$ sein muß, so sind nur die Fälle möglich $q_\varkappa > l^\varkappa$, $q_\varkappa = l^\varkappa - 1$, $q_\varkappa = l^\varkappa - (\sigma - 1)l - 1$, wie man gleich wie oben erkennt. Setzt man

$$\mathsf{A}_{\tau_\varkappa} = 1 + \xi_{\tau_\varkappa}\left(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{\varkappa-1}} + \Lambda_{l^\varkappa-1}\right),$$

wo

$$\mathsf{A}_{\tau_\varkappa}^{1-T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0+1-\sigma)l^\varkappa+1}\right);$$

$$\mathsf{A}_{\sigma\tau_\varkappa} = 1 + \xi_{\sigma\tau_\varkappa}\left(\Lambda_{\bar{q}_1} + \cdots + \Lambda_{\bar{q}_{\varkappa-1}} + \Lambda_{l^\varkappa-(\sigma-1)l-1}\right),$$

wo

$$\mathsf{A}_{\sigma\tau_\varkappa}^{1-T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0+1-\sigma)l^\varkappa+1}\right),$$

so sind $\xi_{\tau_\varkappa}$, $\xi_{\sigma\tau_\varkappa}$ unbestimmte Zahlen des Verzweigungskörpers (mod $\mathfrak{L}'^{n_0}$). Ist

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}(\alpha_1\Lambda_{q_1} + \cdots + \alpha_{\varkappa-1}\Lambda_{q_{\varkappa-1}} + \beta\Lambda_{l^2-(\sigma-1)l-1} + \gamma\Lambda_{l^2-1})$$

eine beliebige Zahl, für die

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0+1-\sigma)l^\varkappa+1}\right),$$

so nehme man

$$\xi_{\tau_\varkappa} \equiv \gamma, \quad \xi_{\sigma\tau_\varkappa} \equiv \beta \quad (\mathfrak{L}'^{n_0}).$$

Dann ist $\dfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_{\tau_\varkappa}\mathsf{A}_{\sigma\tau_\varkappa}}$ einer Zahl A' von $K_{\varkappa-1}$ kongruent $\left(\bmod\, \mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0+1-\sigma)l^\varkappa+1}\right)$, und da auch

$$\mathsf{A}'^{1-T} \equiv 1 \quad \left(\mathfrak{L}_{\varkappa-1}'^{(\sigma u_0+1-\sigma)l^{\varkappa-1}+1}\right),$$

so läßt sich A' durch die $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_\sigma, \cdots, \mathsf{A}_{\tau_{\varkappa-1}}\mathsf{A}_{\sigma\tau_{\varkappa-1}}$ darstellen, oder

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_1\mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{\tau_{\varkappa-1}}\mathsf{A}_{\sigma\tau_{\varkappa-1}}\mathsf{A}_{\tau_\varkappa}\mathsf{A}_{\sigma\tau_\varkappa} \quad \left(\mathfrak{L}_\varkappa'^{(\sigma u_0+1-\sigma)l^\varkappa+1}\right).$$

Daher wird $\tau_\varkappa = \tau_{\varkappa-1} + 1$, und da $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, so ist allgemein

$$\tau_\varkappa = \varkappa - 1, \quad \tau_{u_0} = u_0 - 1.$$

Damit ist der allgemeine Satz bewiesen:

Satz: *Es gibt höchstens $\sigma(u_0-1)$ verschiedene Zahlen A der Form:*

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A}_i &= 1 + \xi_i l^{u_0-1}\left(\Lambda_{q_1^{(i)}} + \cdots + \Lambda_{q_i^{(i)}}\right) \\ \mathsf{A}_{\sigma i} &= 1 + \xi_{\sigma i} l^{u_0-1}\left(\Lambda_{q_1^{(\sigma i)}} + \cdots + \Lambda_{q_i^{(\sigma i)}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \cdots, u_0-1),$$

deren $(1-T)^{te}$ symbolische Potenz der Einheit kongruent wird

$$(\bmod\, \mathfrak{L}'^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}),$$

sodaß bei richtiger Bestimmung der Zahlen α, ξ_i, ξ_{σ_i} $(i = 1, 2, \cdots, u_0-1)$ (mod $\mathfrak{L}'^{n_0}$) im Verzweigungskörper jede andere Zahl A, für die

$$\mathsf{A}^{1-T} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}).$$

ist, sich in der Form darstellen läßt:

$$\mathsf{A} \equiv \alpha\mathsf{A}_1\mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{u_0-1}\mathsf{A}_{\sigma(u_0-1)} \quad (\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}).$$

ε) Wenn A eine zu $\mathfrak{L}$ prime Zahl ist, für die

$$\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}),$$

so hat A die Form $\mathsf{A} = \alpha + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}})$, wo α im Verzweigungskörper liegt und zu $\mathfrak{L}$ prim ist. Dann ist auch

$$\alpha - S\alpha \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \alpha^{1-S} \equiv 1 \;\; (\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0+2-\sigma)n_0}),$$

d. h. nach b) $\alpha \equiv \alpha_0$ $(\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0+2-\sigma)n_0})$, wo α_0 in k liegt. Da $\mathsf{A}^{1-S} = (\alpha_0^{-1}\mathsf{A})^{1-S}$, so kann man A immer mit α_0^{-1} multipliziert, oder in der Form

$$\mathsf{A} = 1 + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_{u_0}})$$

annehmen. Es fragt sich, wieviel (mod $\mathfrak{L}'^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}$) verschiedene solche A es gibt. Dazu haben wir nur die A_i und $\mathsf{A}_{\sigma i}$ von δ) zu betrachten. Es gebe A_i resp. $\mathsf{A}_{\sigma i}$, für die bei nun festem ξ_i, $\xi_{\sigma i}$:

$$\mathsf{A}_i'^{1-S} \equiv 1, \quad \mathsf{A}_{\sigma i}'^{1-S} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}),$$

wo

$$\mathsf{A}_i' = 1 + l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) \;\; (\mathsf{A}_{\sigma i}' \text{ entsprechend})$$

ist. Dann ist

$$\mathsf{A}_i' - S\mathsf{A}_i' = l^{u_0-1}((\Lambda_{q_1} - S\Lambda_{q_1}) + \cdots + (\Lambda_{q_i} - S\Lambda_{q_i})) \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}).$$

Berücksichtigt man die Bedingungen*), denen die q_i unterliegen, so erkennt man sukzessive:

$$\Lambda_{q_\iota} - S\Lambda_{q_\iota} \equiv 0 \left(\mathfrak{L}'^{(l-(\sigma-1))\frac{n_0}{l}}\right) \qquad (\iota = 1, 2, \cdots, i).$$

Daraus sieht man, daß Λ_{q_ι} auch genau durch $S\mathfrak{L}_\iota'^{q_\iota}$ teilbar ist, d. h. somit durch $\mathfrak{L}_\iota^{q_\iota}$ oder: für alle Primideale von $\mathfrak{L}$ erhält man dieselbe Darstellung von A. Wir dürfen von nun an die Kongruenzen mod. $\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}$ nehmen. Ist $\mathsf{A}_i = 1 + \xi_i l^{u_0-1}(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i})$ das allgemeine A_i, so ist nur dann $\mathsf{A}_i^{1-S} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1})$, wenn

$$\begin{aligned}
&\xi_i(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) - S\xi_i(S\Lambda_{q_1} + \cdots + S\Lambda_{q_i}) \\
&\equiv (\xi_i - S\xi_i)(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) + S\xi_i[(\Lambda_{q_1} - S\Lambda_{q_1}) + \cdots + (\Lambda_{q_i} - S\Lambda_{q_i})] \\
&\equiv (\xi_i - S\xi_i)(\Lambda_{q_1} + \cdots + \Lambda_{q_i}) \equiv 0 \;\; (\mathfrak{L}^{n_0+1})
\end{aligned}$$

wird. Da $q_i < n_0$, so ist dies nur möglich, wenn

$$\xi_i - S\xi_i \equiv 0(\mathfrak{l}), \quad \xi_i^{1-S} \equiv 1(\mathfrak{l})$$

oder wegen b) ξ_i einer Zahl von k (mod $\mathfrak{l}$) kongruent ist. Dasselbe beweist man für $\xi_{\sigma i}$ in $\mathsf{A}_{\sigma i}$. Somit unter Berücksichtigung von γ):

Jede Zahl A, *für die* $\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1})$, *ist in der Form darstellbar:*

$$\mathsf{A} \equiv \alpha_0 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{u_0-1} \mathsf{A}_{\sigma(u_0-1)} \;\; (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}),$$

wo α_0 *und die* ξ_i, $\xi_{\sigma i}$ *irgend welche Zahlen von* k *sind.*

Die ξ_i, $\xi_{\sigma i}$ können $\mathfrak{l}^2$ verschiedene Werte annehmen (mod $\mathfrak{l}$). Das System $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_\sigma \cdots \mathsf{A}_{u_0-1} \mathsf{A}_{\sigma(u_0-1)}$ stellt somit $\mathfrak{l}^{2\sigma(u_0-1)} = l^{2(u_0-1)}$ (mod $\mathfrak{L}^{(\sigma u_0+1-\sigma)n_0+1}$)

---

*) Siehe δ) S. 225 u. ff.

verschiedene Kongruenzklassen dar. Wir kürzen das System durch Σ ab. Man erkennt somit den Satz:

Satz: *Wenn* $\mathsf{A}^{1-S} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1})$, *so kann man* A *stets so mit einer Zahl von k multiplizieren, daß es einer der* $l^{2(u_0-1)}$ *Kongruenzklassen des Systems* Σ (mod $\mathfrak{L}^{(\sigma u_0 + 1 - \sigma) n_0 + 1}$) *kongruent wird.*

Der Fall $l = 3$, $\sigma = 2$ erledigt sich ganz entsprechend. Nur besteht, falls $\mathsf{\Lambda}_1^{1-T} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}_1^3)$, das System Σ aus 3^{2u_0} Klassen.

4. Kehren wir zum Klassenstrahl $\mathfrak{F}$ von 1. zurück. Um die Resultate von 2. und 3. zu vereinigen, können wir annehmen, daß die Kongruenzklassen Σ sämtlich der Einheit kongruent werden (mod $\mathfrak{L}_i$) $(i = 1, 2, \cdots, r)$. Σ sei von nun an stets dieses System. Dann folgt der

Satz: *Wenn* A^{1-S} *eine Zahl des Klassenstrahls* $\mathfrak{F}$ *ist, so kann man* A *stets so mit einer Zahl von* α *multiplizieren, daß das Produkt der Einheit* $(u_0 = 0)$ *resp. einer der* $l^{2(u_0-1)} (u_0 > 0)$ *Klassen von* Σ (mod $\mathfrak{F}$) *kongruent wird.*

Im Fall $l = 3$, $\sigma = 2$, $\mathsf{\Lambda}_1^{1-T_1} \equiv 1 \; (\mathfrak{L}_1^3)$ tritt 3^{2u_0} an Stelle von $l^{2(u_0-1)}$.

5. Hilfssatz: *Im Klassenstrahl gibt es ein System von u unabhängigen Einheiten* $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_u$, *deren Relativnormen in bezug auf k eins sind und für die ein Ausdruck der Form:*

$$\mathsf{H}_1^{x_1} \mathsf{H}_2^{x_2} \cdots \mathsf{H}_u^{x_u}, \quad wo \quad 0 \leqq x_i < l \qquad (i = 1, 2, \cdots, u),$$

nur dann die $(1-S)^{te}$ *symbolische Potenz einer Strahleinheit wird, wenn* $x_1 = x_2 = \cdots = x_u = 0$.

Beweis. Wir bauen K sukzessive durch $K_1, K_2, \cdots, K_u$ aus k auf, wo jedes $K_\varkappa$ relativzyklisch vom Relativgrad l zu $K_{\varkappa-1}$ ist.

a) Für K_1 folgt der Satz aus einem Hilbertschen*) Satze, falls man dort das System der unabhängigen Körpereinheiten durch ein solches von Strahleinheiten ersetzt.

b) Der Satz gelte für $K_{\varkappa-1}$. $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots, \mathsf{H}_{\varkappa-1}$ seien die betreffenden Einheiten in $K_{\varkappa-1}$. Dann wird auch in $K_\varkappa$ niemals

$$\mathsf{H}_1^{x_1} \mathsf{H}_2^{x_2} \cdots \mathsf{H}_{\varkappa-1}^{x_{\varkappa-1}} = \mathsf{E}^{1-S}, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq x_i < l \quad (i = 1, 2, \cdots, \varkappa - 1),$$

sein können, es sei denn $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\varkappa-1} = 0$. Denn durch Bildung der Norm fände man nach Annahme:

$$1 = \left[\mathsf{H}_1^{x_1} \cdots \mathsf{H}_{\varkappa-1}^{x_{\varkappa-1}}\right]^{1 + S + \cdots + S^{l^{\varkappa-1}-1}} = \mathsf{E}^{1 - S^{l^{\varkappa-1}}} \quad \text{oder} \quad \mathsf{E} = S^{l^{\varkappa-1}} \mathsf{E},$$

d. h. E läge in $K_{\varkappa-1}$ gegen Annahme. Um die Existenz einer $\varkappa^{\text{ten}}$ Einheit $\mathsf{H}_\varkappa$ in $K_\varkappa$ nachzuweisen, benutzen wir die relativen Grundeinheiten von $K_\varkappa$ in bezug auf $K_{\varkappa-1}$ **), indem wieder ein System von unabhängigen

*) Zahlbericht, S. 275, Satz 92.

**) Zahlbericht, S. 272 u. ff.

Strahleinheiten den Hilbertschen Entwicklungen zugrunde gelegt wird. Es sei H die Einheit, deren Relativnorm in bezug auf $K_{\varkappa-1}$ eins ist, und die, mit irgend einer Einheit von $K_{\varkappa-1}$ multipliziert, niemals die $(1-S^{l^{\varkappa-1}})^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit wird. Es sei $\mathsf{E}_{\varkappa-1}$ irgend eine Strahleinheit von $K_{\varkappa-1}$ und

$$\mathsf{E}_{\varkappa-1}\mathsf{H} = \mathsf{E}^{(1-S)^{\tau}},$$

wo E eine Strahleinheit von $K_{\varkappa}$ sei; dagegen sei, bei beliebigem $\mathsf{E}'_{\varkappa-1}$, $\mathsf{E}'_{\varkappa-1}\mathsf{H}$ nicht die $(1-S)^{\tau+1\text{te}}$ symbolische Potenz einer Strahleinheit. Dann ist $\tau < l^{\varkappa-1}$. Denn aus der Identität

$$(1-S)^{l^{\varkappa-1}} \equiv f_1(S)\left(1-S^{l^{\varkappa-1}}\right) + f_2(S)\left(1+S^{l^{\varkappa-1}}+\cdots+S^{(l-1)l^{\varkappa-1}}\right),$$

wo $f_1(S)$ und $f_2(S)$ ganze rationale ganzzahlige Funktionen von S sind*), folgt

$$\mathsf{E}^{(1-S)^{l^{\varkappa-1}}} = \mathsf{E}'_{\varkappa-1}\left[\mathsf{E}^{f_1(S)}\right]^{1-S^{l^{\varkappa-1}}}$$

also für $\tau \geqq l^{\varkappa-1}$

$$\mathsf{E}''_{\varkappa-1}\mathsf{H} = \left[\mathsf{E}^{f_1(S)}\right]^{1-S^{l^{\varkappa-1}}}$$

gegen Annahme.

Man wähle $\mathsf{E}_{\varkappa-1}$ so, daß das zugehörige τ den größtmöglichen Wert von $\tau < l^{\varkappa-1}$, der für irgend eine Strahleinheit von $K_{\varkappa-1}$ eintreten kann, annimmt. Man setze $\mathsf{H}_{\varkappa} = \mathsf{E}^{2}(l+2)$; dann ist die Relativnorm von $\mathsf{H}_{\varkappa}$ in bezug auf k gleich 1. Denn ist $\mathsf{E}^{1+S+\cdots+S^{l^{\varkappa}-1}} = \varrho$, so muß, da E im Klassenstrahl liegt,

$$\varrho \equiv 1 \pmod{f}$$

sein. Im Fall $m = -1$ oder $m = -3$ enthält aber f sicher 2 resp. 3 und da $\pm i \not\equiv 1(2)$, $\pm\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \not\equiv 1(3)$, so ist nur $\varrho = \pm 1$ möglich; die Norm von $\mathsf{H}_{\varkappa}$ ist daher ϱ^2 oder 1. Wäre nun

$$\mathsf{H}_1^{x_1}\mathsf{H}_2^{x_2}\cdots\mathsf{H}_{\varkappa}^{x_{\varkappa}} = \mathsf{E}_1^{1-S} \quad (0 \leqq x_i < l,\ i = 1, 2, \cdots, \varkappa),$$

wo E_1 eine Strahleinheit und $x_{\varkappa} \neq 0$, so wäre

$$\mathsf{E}^2_{\varkappa-1}\mathsf{H}^2 = \mathsf{E}'_{\varkappa-1}\mathsf{E}^{(1-S)^{\tau+1}}$$

d. h. es gäbe eine Strahleinheit von $K_{\varkappa-1}$, mit der H^2, also auch H multipliziert, die $(1-S)^{\tau+1\text{te}}$ symbolische Potenz einer Einheit würde, gegen Annahme. Also müßte $x_{\varkappa} = 0$ sein. Das ist aber nach dem obigen unmöglich. Also ist $\mathsf{H}_{\varkappa}$ die gesuchte Einheit.

Der Satz gilt auch für $l = 3$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$.

6. Einteilung der Klassen des Klassenstrahls in Geschlechter.

Definition: *Alle Idealklassen des Klassenstrahls* $(\mathfrak{F})$, *dessen Relativnormen in bezug auf* k *in dieselbe Strahlklasse von* (f) *fallen, bilden ein*

---

*) Siehe Fueter: Theorie der Zahlstrahlen II, J. f. Math. 130, S. 233, 234.

Geschlecht. Diese Definition gelte nicht nur für den relativzyklischen Körper K, sondern für jeden Relativ-Abelschen Oberkörper von k. Alle Klassen von $(\mathfrak{F})$, deren Relativnormen in bezug auf k in der Hauptstrahlklasse (f) liegen, bilden das *Hauptgeschlecht.* Ist h die Strahlklassenanzahl von (f), $l^\varkappa$ der größte in h enthaltene Faktor von l, so gibt es, wenn wir wieder, wie in 1., alles in bezug auf l betrachten, höchstens $l^\varkappa$ Geschlechter, die zur Primzahl l gehören.

Satz: *Die Anzahl der wirklich existierenden Geschlechter des relativzyklischen Körpers K vom Relativgrad l^u ist höchstens $l^{\varkappa-u}$.*

Beweis: a) *Ist $\mathfrak{A}$ ein Ideal von K, so ist $\mathfrak{A}^{1-S}$ in einer Klasse des Hauptgeschlechtes.* Denn die Relativnorm von $\mathfrak{A}^{1-S}$ ist (1).

b) Es sei $\mathfrak{A}^{1-S} \cong 1 \pmod{\mathfrak{F}}$, also

$$\mathfrak{A}^{1-S} = (\mathsf{A}),$$

wo A im Klassenstrahl liegt, $\mathsf{A} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Die Relativnorm von A in bezug auf k ist eine Einheit ϱ, für die $\varrho \equiv 1 (f)$, also $\varrho = \pm 1$. Ist $\varrho = -1$, so ersetze man $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^2$, was erlaubt ist für $l \neq 2$. Dann wird $\varrho = +1$ und $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1^{1-S} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Nach dem Satz von 4 ist A_1 dann einer Zahl des Systems $\Sigma \pmod{\mathfrak{F}}$ kongruent. Andererseits ist

$$\mathfrak{A}^{1-S} = \mathsf{A}_1^{1-S}; \qquad \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathsf{A}_1}\right) = S\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathsf{A}_1}\right).$$

Da $\mathfrak{A}$ und A_1 zu $\mathfrak{F}$ prim sind, muß $\frac{\mathfrak{A}}{(\mathsf{A}_1)}$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ von (f) in k sein. Also wird $\mathfrak{A} = (\mathsf{A}_1)\mathfrak{a}$ oder, wenn mit Σ eine Zahl des Systems bezeichnet wird,

$$\mathfrak{A} \cong (\Sigma)\mathfrak{a} \ (\mathfrak{F}).$$

c) Ist $\mathfrak{A}_1^{1-S} \cong \mathfrak{A}_2^{1-S} \ (\mathfrak{F})$, so ist $\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}\right)^{1-S} \cong 1 \ (\mathfrak{F})$, also nach obigem

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} \cong (\Sigma)\mathfrak{a} \ (\mathfrak{F})$$

d. h.: *Die Anzahl aller Strahlklassen, deren $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenzen dieselbe Klasse des Hauptgeschlechts sind, ist gleich der Anzahl der Strahlklassen, in die die Ideale $(\Sigma)\mathfrak{a}$ zerfallen, wenn (Σ) alle Ideale des Systems Σ und $\mathfrak{a}$ alle Ideale von (f) in k durchläuft.*

d) *Die Anzahl aller Klassen des Strahls $(\mathfrak{F})$, deren $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenzen dieselbe Klasse des Hauptgeschlechts ergeben, ist höchstens gleich $l^{\varkappa-u}$ $(u_0 = 0)$ resp. $l^{\varkappa+2(u_0-1)-u}$ $(u_0 > 0)$.*

Denn nach dem Hilfssatz von 5. und nach 4. kann man jede dortige Einheit H_i in der Form darstellen

$$\mathsf{H}_i = \mathsf{A}_i^{1-S}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, u),$$

wo (A_i) eine Klasse von Σ sein wird $\pmod{\mathfrak{F}}$. Außerdem ist (A_i) eine

Klasse $\mathfrak{a}_i$ von (f) in k. Es seien τ der Zahlen A_i zugleich im Klassenstrahl. Für $u_0 = 0$ ist dann $\tau = u$. Das System dieser τ Klassen $\mathfrak{a}_{\iota_1}, \mathfrak{a}_{\iota_2}, \cdots, \mathfrak{a}_{\iota_\tau}$

$$\mathfrak{a}_{\iota_1}^{x_1} \mathfrak{a}_{\iota_2}^{x_2} \cdots \mathfrak{a}_{\iota_\tau}^{x_\tau} \qquad (0 \leqq x_i < l,\ i = 1, 2, \cdots, \tau)$$

stellt dann l^τ verschiedene Klassen von (f) dar. Denn wäre

$$\mathfrak{a}_{\iota_1}^{x_1} \mathfrak{a}_{\iota_2}^{x_2} \cdots \mathfrak{a}_{\iota_\tau}^{x_\tau} = (\alpha),$$

wo α in (f) wäre, so gäbe es eine Einheit H des Klassenstrahls, sodaß

$$A_{\iota_1}^{x_1} \cdots A_{\iota_\tau}^{x_\tau} = \alpha H \quad \text{oder} \quad H_{\iota_1}^{x_1} H_{\iota_2}^{x_2} \cdots H_{\iota_\tau}^{x_\tau} = H^{1-S},$$

was nur für $x_1 = x_2 = \cdots = x_\tau = 0$ möglich ist. Somit fallen l^τ Klassen von (f) im Klassenstrahl $(\mathfrak{F})$ in die Hauptklasse. Da $\tau = u$, für $u_0 = 0$, gibt es in diesem Fall also nur $l^{\varkappa - u}$ Klassen des Systems $\mathfrak{a}(\Sigma)$ (mod $\mathfrak{F}$). Im Falle $u_0 > 0$ gibt es noch $l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - \tau}$ verschiedene Klassen in $\mathfrak{a}(\Sigma)$. Da aber die noch bleibenden $l^{u-\tau}$ Klassen $\mathfrak{a}_i = (A_i)$ Klassen des Systems (Σ) sind, die alle voneinander verschieden sind, da ja die $A_1, A_2, \cdots, A_u$ den aufeinanderfolgenden Körpern $K_1, K_2, \cdots, K_u = K$ angehören, so bleiben auch in diesem Falle nur $\dfrac{l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - \tau}}{l^{u-\tau}} = l^{\varkappa + 2(u_0 - 1) - u}$ verschiedene Klassen des Systems $\mathfrak{a}(\Sigma)$ übrig. *Im Falle* $l = 3$, $\sigma = 2$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^3)$, *ist für* $u_0 > 0$ *die Anzahl höchstens* $3^{\varkappa + 2u_0 - u}$.

e) *Die Anzahl der existierenden Geschlechter sei* g; *jedes Geschlecht umfaßt gleichviel* $= e$ *Klassen.* Denn man erhält *alle* Klassen eines Geschlechts, wenn man eine seiner Klassen mit *allen* e Klassen des Hauptgeschlechts multipliziert. *Die Anzahl aller Klassen ist somit* eg.

f) Ist $u_0 = 0$, so gibt es höchstens $l^{\varkappa-u}$ Klassen, deren $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eine der e Klassen des Hauptgeschlechts ist. Also ist die Anzahl aller Klassen höchstens $el^{\varkappa-u}$; oder

$$eg \leqq el^{\varkappa-u}; \quad g \leqq l^{\varkappa-u}.$$

Der Satz ist in diesem Fall bewiesen.

g) Ist dagegen $u_0 > 0$, so gibt es höchstens $l^{\varkappa + 2(u_0-1) - u}$ Klassen, deren $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eine Klasse des Hauptgeschlechts ist. Wir werden nachher zeigen, daß es andererseits höchstens $\dfrac{e}{l^{2(u_0-1)}}$ Klassen im Hauptgeschlecht gibt, die die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Klasse werden können. Also ist die Klassenzahl $\leqq \dfrac{e}{l^{2(u_0-1)}} l^{\varkappa + 2(u_0-1) - u}$ oder

$$eg \leqq \frac{e}{l^{2(u_0-1)}} l^{\varkappa + 2(u_0-1) - u}; \quad g \leqq l^{\varkappa - u}.$$

Um noch zu beweisen, daß es höchstens $\frac{e}{l^{2(u_0-1)}}$ verschiedene Klassen im Hauptgeschlecht gibt, die die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Klasse sind, nehmen wir die in Hilfssatz IV, Kapitel II definierte Zahl $\Lambda_{\nu_{u_0-1}}$. Dieselbe nehmen wir noch durch $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots, \mathfrak{L}_r$ teilbar an und setzen ihre Spur in Bezug auf k in der Form

$$\lambda^{u_0-\sigma}\alpha, \text{ wenn } sS = Ss; \quad \lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\alpha, \text{ wenn } sS = S^{-1}s$$

ist, voraus, wo α zu l prim ist und λ durch $\mathfrak{l}$ teilbar, aber $\frac{(\lambda)}{\mathfrak{l}}$ zu l prim ist. Letzteres dürfen wir annehmen; denn es gibt im Verzweigungskörper stets eine Zahl Θ, deren Spur in bezug auf k zu l prim ist.*) Wenn die Spur von $\Lambda_{\nu_{u_0-1}}$ in bezug auf k nicht obiger Bedingung genügte, so stelle man die Spur von $\Lambda_{\nu_{u_0-1}}$ in bezug auf den Verzweigungskörper in der Form $\lambda^{\sigma' u_0}\Theta'$, resp. $\lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Theta'$ dar, wo Θ' zu (l) prim ist. Dann genügt $\frac{\Theta}{\Theta'}\Lambda_{\nu_{u_0-1}}$ sicher allen gestellten Anforderungen. Wir beschränken uns von nun an auf den Fall $sS = S^{-1}s$ und setzen

$$\mathfrak{B}_i = (1+\alpha_i\lambda^{i-1}\Lambda_{\nu_{u_0-1}}) \quad (i = 2, 3, \cdots, \sigma u_0-(\sigma-1)).$$

α_i, λ sind Zahlen von k und λ hat obige Bedeutung. *$\mathfrak{B}_i$ sind Ideale des Hauptgeschlechts.* Denn bedeutet N die Norm in bezug auf k, so ist nach Annahme

$$N(1+\alpha_i\lambda^{i-1}\Lambda_{\nu_{u_0-1}}) = 1 + \alpha_i\lambda^{i-1}\lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\alpha + \alpha_i^2\lambda^{2(i-1)}\lambda^{\sigma u_0+1}\bar{\alpha},$$

oder, da $i > 1$:

$$\begin{aligned} N(1+\alpha_i\lambda^{i-1}\Lambda_{\nu_{u_0-1}}) &\equiv 1 \ (\mathfrak{l}^{\sigma u_0+2-\sigma}) \\ &\equiv 1 \ (l_\iota) \qquad (\iota = 1, 2, \cdots, r). \end{aligned}$$

Aus der Annahme

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\cdots\mathfrak{B}_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \cong 1 \ (\mathfrak{F}),$$

folgt

$$\alpha_i \equiv 0 \ (\mathfrak{l}) \qquad (i = 2, 3, \cdots, \sigma u_0-(\sigma-1)).$$

Denn sonst müßte es eine Einheit H geben, sodaß

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(1+\lambda\alpha_2\Lambda_{\nu_{u_0-1}})(1+\lambda^2\alpha_3\Lambda_{\nu_{u_0-1}})\cdots(1+\lambda^{\sigma u_0-\sigma}\alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Lambda_{\nu_{u_0-1}}) \\ = 1 + \lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Lambda, \end{aligned}$$

wo Λ wenigstens durch $\mathfrak{L}$ teilbar wäre. Bildet man hier die Relativnorm in bezug auf k, so wird, wie oben, wegen $N(\mathsf{H}) = 1$,

$$\begin{aligned} &(1+\alpha_2\lambda^{\sigma u_0+2-\sigma}\alpha + \alpha_2^2\lambda^{\sigma u_0+3}\bar{\alpha}_1)(1+\alpha_3\lambda^{\sigma u_0+3-\sigma}\alpha + \alpha_3^2\lambda^{\sigma u_0+5}\bar{\alpha}_2)\cdots \\ &\cdots(1+\alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)}\lambda^{2\sigma u_0-2\sigma+1}\alpha + \alpha^2_{\sigma u_0-\sigma-1}\lambda^{2\sigma u_0+1}\bar{\alpha}) = 1 + \lambda^{2\sigma u_0-(\sigma-1)}\bar{\alpha}, \end{aligned}$$

*) Siehe dieses Kapitel S. 222, 3. b) Beweis.

wo α sicher zu l prim ist. Liest man diese Gleichung sukzessive als Kongruenz mit den Moduln $\mathfrak{l}^{\sigma u_0+3-\sigma}, \mathfrak{l}^{\sigma u_0+4-\sigma}, \ldots, \mathfrak{l}^{2\sigma u_0-(\sigma-1)}$, so folgt

$$\alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \cdots \equiv \alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \equiv 0 \ (\mathfrak{l}).$$

Genau ebenso beweist man, daß aus

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 \cdots \mathfrak{B}_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \cong \mathfrak{C}^{1-S}\ (\mathfrak{F}) : \alpha_i \equiv 0\ (\mathfrak{l})$$

folgt $(i = 2, \cdots, \sigma u_0 - (\sigma - 1))$, da dann $\mathfrak{C}^{1-S} = \Gamma$ und

$$\mathsf{H}(1 + \alpha_1 \lambda \Lambda_{\nu_{u_0}-1}) \cdots (1 + \alpha_{\sigma u_0-(\sigma-1)} \lambda^{\sigma u_0-\sigma} \Lambda_{\nu_{u_0}-1}) = \Gamma(1 + \lambda^{\sigma u_0-(\sigma-1)}\Lambda)$$

sein müßte, was wegen $N(\mathsf{H}) = 1$, $N(\Gamma) = 1$ unmöglich ist, außer wenn $\alpha_i \equiv 0\ (\mathfrak{l})$.

Wenn also die α_i die $\mathfrak{l}^2$ inkongruenten Werte (mod $\mathfrak{l}$) durchlaufen, so stellen $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 \cdots \mathfrak{B}_{\sigma u_0-(\sigma-1)}$ im ganzen $l^{2(u_0-1)}$ Klassen des Hauptgeschlechts dar, die nicht die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer Klasse werden. Diese Klassen bilden eine Abelsche Untergruppe der Abelschen Gruppe aller e Klassen des Hauptgeschlechts. e ist durch $l^{2(u_0-1)}$ teilbar, und es gibt höchstens $\frac{e}{l^{2(u_0-1)}}$ Klassen mit der verlangten Eigenschaft.

Ist $l = 3$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1\ (\mathfrak{L}^3)$, und bedeutet Λ_k eine durch $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots, \mathfrak{L}_r$ und $\mathfrak{L}^k$ teilbare Zahl, wo $\frac{(\Lambda_k)}{\mathfrak{L}^k}$ zu $\mathfrak{L}$ prim ist, so setzt man

$$\mathfrak{B}_i = (1 + \alpha_i \Lambda_{2u_0+i+\tau}), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 2u_0 - 1 + \tau \quad \begin{pmatrix} \tau = 0, & m \neq -3 \\ \tau = 1, & m = -3 \end{pmatrix}.$$

Man beweist wie oben, daß dadurch 3^{2u_0} verschiedene Klassen des Hauptgeschlechts gegeben sind, die nicht die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz einer anderen Klasse werden. Es gibt also nur $\frac{e}{3^{2u_0}}$ Klassen des Hauptgeschlechts, die die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz werden. Dabei ist auch $k = k(\sqrt{-3})$ mit eingeschlossen.

7. In K existieren genau $l^{\varkappa-u}$ Geschlechter.

Dies ist eine Folge des von H. Weber bewiesenen

Hilfssatzes*): *Durchläuft p_i alle Primzahlen, die Normen von Primidealen einer Strahlklasse in bezug auf die Primzahl l***) von k mit dem Führer f sind, und ist $l^\varkappa$ die Strahlklassenzahl in bezug auf l, so ist:*

$$\sum \frac{1}{p_i^s} = \frac{1}{2l^\varkappa} \lg \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s > 1),$$

wo $f(s)$ für lim inf. $s = 1$ *endlich bleibt.*

*) Math. Ann. 49, S. 89; Algebra, Bd. III, S. 606, 608, 612. Der Hilfssatz gilt auch für $l = 2$ und den engeren Äquivalenzbegriff.

**) S. 220 dieser Arbeit.

Durchläuft nämlich andererseits p_i' die Primzahlen, die Normen von Primidealen 1. Grades des Galoisschen Körpers K vom Grade $2l^u$ sind, *so ist**)

$$\sum \frac{1}{p_i'^s} = \frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_1(s), \qquad (s>1),$$

wo $f_1(s)$ *für* lim inf. $s=1$ *endlich bleibt.*

Wenn l^t die Anzahl der existierenden Geschlechter in K bedeutet, so gibt es l^t Klassen im Strahl (f) von k, die Relativnormen von Klassen in $(\mathfrak{F})$ von K sind. Nur die Primideale dieser l^t Klassen können also in Primideale 1. Grades zerfallen. Durchläuft $\bar{p}_i$ alle Primzahlen, die Normen von Primidealen dieser l^t Klassen sind, so ist nach dem Hilfssatz

$$\sum \frac{1}{\bar{p}_i^s} = \frac{l^t}{2l^\varkappa} \lg \frac{1}{s-1} + f_2(s), \qquad (s>1)$$

und da

$$\sum \frac{1}{p_i'^s} \leqq \sum \frac{1}{\bar{p}_i^s},$$

so ist

$$\frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} \leqq \frac{l^t}{2l^\varkappa} \lg \frac{1}{s-1} + f_3(s), \qquad (s>1),$$

wo der lim inf. $s=1$ von $f_3(s)$ endlich ist. Also:

$$\frac{1}{2l^u} \leqq \frac{l^t}{2l^\varkappa},$$

$$t \geqq \varkappa - u.$$

Andererseits wurde in 6. bewiesen, daß $t \leqq \varkappa - u$; also ist nur $t = \varkappa - u$ möglich, w. z. b. w.

Da jetzt

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{1}{\bar{p}_i^s} &= \frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_2(s) \\ \sum \frac{1}{p_i'^s} &= \frac{1}{2l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_1(s) \end{aligned}\right\} \qquad (s>1),$$

so folgt: *Sämtliche Primideale der $l^{\varkappa-u}$ Klassen von (f), denen ein Geschlecht entspricht, zerfallen in K in Primideale 1. Grades in bezug auf k, mit Ausnahme der Primideale $\mathfrak{p}_\iota^*$, für die*

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\iota^*)}$$

konvergiert.

8. Das Resultat von 7. läßt sich auf jeden in k relativ-Abelschen Körper ausdehnen, falls derselbe die Eigenschaften von Kapitel II. 1. hat. Der dort definierte Körper vom Relativgrad $N = l^u$ setze sich aus den zu k relativ-zyklischen Körpern $K_1, K_2, \cdots, K_\tau$ mit den Relativgraden

*) Zahlbericht, S. 265, Satz 84.

$l^{u_1}, l^{u_2}, \cdots, l^{u_\tau}$ zusammen. Dieselben sollen keine gemeinsamen Unterkörper besitzen, also $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_\tau$ sein. Ist f das kleinste gemeinsame Vielfache der den Körpern $K_1, K_2, \cdots, K_\tau$ zugeordneten Führer $f_1, f_2, \cdots, f_\tau$, so ist nach Kapitel II f der Führer des K zugeordneten Strahls in k. In K_i zerfallen nun *alle* Primideale einer Klasse von (f_i) in l^{u_i} Primideale, oder keine; um so mehr also auch in einer Klasse von (f). Eine Ausnahme können nur die Primideale $\mathfrak{p}_\iota^*$ machen, für die

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\iota^*)}$$

konvergiert. Ist $l^{\varkappa_i}$ die zu l gehörige Klassenzahl von (f_i), $l^\varkappa$ die von (f), so zerfällt jede Klasse von (f_i) in (f) in $l^{\varkappa-\varkappa_i}$ Klassen. Also gibt es $l^{\varkappa-\varkappa_i} \cdot l^{\varkappa_i - u} = l^{\varkappa - u}$ Klassen von (f), denen ein Geschlecht in K_i entspricht. *Alle Primideale einer Klasse von (f) in k zerfallen in l^u Primideale in K oder keine zerfallen in l^u Primideale. Ausgenommen sind die $\mathfrak{p}_\iota^*$, für die $\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\iota^*)}$ konvergiert.*

Ist also l^t die Anzahl der Klassen von (f), denen ein Geschlecht in K entspricht, so ist nach dem Hilfssatz, wenn p_i alle Primzahlen, die Normen von Primidealen der l^t Klassen sind, durchläuft:

$$\sum \frac{1}{p_i^s} = \frac{l^t}{2\,l^\varkappa} \lg \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad (s > 1).$$

Durchläuft p_i' alle Primzahlen, die in Primideale 1. Grades in K zerfallen, so ist*)

$$\sum \frac{1}{p_i'^s} = \frac{1}{2\,l^u} \lg \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s > 1).$$

Also ist

$$\sum \frac{1}{p_i^s} - \sum \frac{1}{p_i'^s} = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\iota^*)^s} = \left(\frac{l^t}{2\,l^\varkappa} - \frac{1}{2\,l^u}\right) \lg \frac{1}{s-1} + f_2(s) \quad (s > 1).$$

Nun konvergiert aber $\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\iota^*)^s}$ für lim inf. $s = 1$. Also muß

$$\frac{l^t}{2\,l^\varkappa} = \frac{1}{2\,l^u},$$

$$t = \varkappa - u$$

sein.

Hauptsatz: I. *Ist K ein zu k relativ-Abelscher, absolut Galoisscher Körper vom Relativgrad l^u, der sich in eine Reihe von relativ-zyklischen absolut Galoisschen Körpern auflösen läßt ($sS = S^{\pm 1}s$); ist ferner $l^\varkappa$ die größte Potenz von l, die in der Klassenzahl des K zugeordneten Strahls (f) von k enthalten ist, so existieren genau $l^{\varkappa - u}$ Geschlechter in K.*

---

*) Zahlbericht, S. 265, Satz 84.

II. *Ordnet man K den Strahl f^* zu, dessen Führer ein Vielfaches von (f) ist, und ist l^{x^*} der entsprechende Faktor der Klassenzahl von (f^*), so existieren genau l^{x^*-u} Geschlechter in K.*

Denn jede Klasse von (f) zerfällt in l^{x^*-x} Klassen in (f^*), die l^{x-u} Klassen, denen Geschlechter entsprechen, also in $l^{x^*-x}\cdot l^{x-u} = l^{x^*-u}$ Klassen (f^*).

9. Während der Fall $l = 3$, $\left(\frac{d}{3}\right) = 0$, $\sigma = 2$ leicht mit behandelt werden konnte, verlangt $l = 2$ eine besondere Betrachtung. Die Beweismethode bleibt dieselbe, nur daß der engere Äquivalenzbegriff vorausgesetzt wird. Wir geben der Kürze halber die Abweichungen an, die gegenüber dem allgemeinen l eintreten. Im Satz 3 c) β) lauten die Ungleichungen für die q_i:

$$q_i \geqq t2^i - 1 + \frac{r}{2^{u_0-i}},\quad i > x;\quad \sigma = 1,$$

$$q_i \geqq t2^i - 2 + \frac{r}{2^{u_0-i}},\quad i \leqq x;\quad \sigma = 1.$$

Für $\sigma = 2$ ist

$$q_i \geqq t2^i - 1 + \frac{r}{2^{u_0-i}},\quad \sigma = 2,$$

oder das erste q_ι, für das $\Lambda_{q_1} \neq 0$ ist, hat den Wert

$$q_\iota = t2^\iota - 3 + \frac{r}{2^{u_0-\iota}}$$

und alle weiteren q_i $(i > \iota)$ sind eindeutig bestimmt. Dabei hat x die Bedeutung der Ergänzung zu Hilfssatz III, Kapitel II.*) Ist

$$v_{u_0-1} = \sigma 2^{u_0+1} - 2\sigma + 1,$$

so bleibt alles weitere gleich, nur treten im ganzen $2^{2(u_0+2-\sigma)}$ Klassen in (Σ) auf und entsprechend $2^{2(u_0+2-\sigma)}$ Klassen der $\mathfrak{B}_i$. Der Hauptsatz bleibt derselbe. Ist dagegen $v_{u_0-1} = \sigma 2^{u_0+1} - \sigma + 1$, so treten geringfügige Veränderungen ein, die dem Falle $l = 3$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^3)$ entsprechen. Der Satz ist auch jetzt zu beweisen.

Der Hilfssatz von 5. ist für $l = 2$ leicht mit denselben Mitteln zu beweisen, falls $f \neq 1$. Denn für $f \geqq 3$ muß die Norm jeder Strahleinheit $\equiv 1 \pmod{f}$ sein, also sicher gleich $+1$. Ist aber $f = 2$, so ist $m = -1$ und $m = -3$ sicher ausgeschlossen; ebenso $\sigma = 1$. Wenn aber $\sigma = 2$, so ist $f = 2$ nicht mit den einfachen Mitteln zu behandeln. *Der Hauptsatz gilt dann nur für $f > 2$.*

---

*) S. 202.

Kapitel IV.

Die Diskriminante der Körper $K(f)$.

Mit Hilfe der Sätze von Kapitel II. und III. kann für die Körper $K(f)$*) diejenige Eigenschaft bewiesen werden, die der Eigenschaft 4.**) der Kreiskörper entspricht:

Hauptsatz: *Die Relativdiskriminante von $K(f)$ in bezug auf k enthält nur die Primzahlen von f; die Primteiler von f treten umgekehrt alle in der Relativdiskriminante auf mit Ausnahme:*

a) *von* 2, *wenn* 2 *nur einfach in f enthalten ist und* $m \equiv 1\,(8)$ *oder* $m = -1$;

b) *von* 3, *wenn* 3 *nur einfach in f enthalten und* $m = -3$.

Der Satz wird für jeden Unterkörper $K_l(f)$ von $K(f)$ bewiesen und gilt dann allgemein.

1. Zunächst werde der zweite Teil des Satzes bewiesen. Gibt es eine Primzahl l_1 die auch $= l$ sein kann, die in f, aber nicht in der Relativdiskriminante enthalten ist, so ist der dem Körper $K(f)$ nach Kapitel II. 6.***) zugeordnete Führer $\bar{f}$ von k zu l_1 prim, falls man zunächst von den Ausnahmefällen $l = 2$, $\left(\frac{d}{2}\right) = 1$, oder $m = -1$; $l = 3$, $m = -3$ absieht Dann zerfallen nach Kapitel III. 8.†) alle Primideale der Hauptklasse des Strahls $(\bar{f})$ in $K_l(f)$ in Primideale 1. Grades, abgesehen von $\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}_2^*, \cdots$, für die

$$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)^s}$$

für lim inf. $s = 1$ konvergiert. Nun gibt es nach dem Hilfssatz Kapitel III. 7.††) unendlich viele Primideale 1. Grades in jeder Strahlklasse. Also gibt es unendlich viele Primideale 1. Grades, die in der Hauptklasse des Strahls $(\bar{f})$, nicht aber in der Hauptklasse des Strahls (l_1) resp. (l^ν) liegen. Für diese Primideale $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ existiert außerdem der $\lim\limits_{s=1} \text{inf.} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s}$ nicht. Somit gäbe es unendlich viele Primideale, die sicher nicht in der Hauptklasse des Strahls (f) von k liegen und die trotzdem in Primideale 1. Grades in $K_l(f)$ zerfielen; dies widerspricht dem Zerlegungssatz 2. der Körper $K(f)$.†††)

In den Ausnahmefällen würde $\bar{f}$, wenn 2 resp. 3 in f zu höherer als 1. Potenz enthalten wäre und die Relativdiskriminante trotzdem zu 2 resp. 3 prim wäre, die Primzahl 2 resp. 3 nur zur 1. Potenz enthalten. Dieselbe

*) S. 183. **) S. 182. ***) S. 217. †) S. 236.
††) S. 235. †††) S. 183.

Überlegung wie oben führt auch hier zum Ziel. Der Fall, daß 2 nur einfach in f enthalten und $\left(\frac{d}{2}\right) = -1, 0$, wird später behandelt.

2. *Die Relativdiskriminante von $K_l(f)$ enthalte eine Primzahl $l_1 \neq l$, wo l_1 zu f prim ist.*

a) $l \neq 2$. α) Wir betrachten $K_l(l_1 f)$. Dieser Körper ist relativ-Abelsch zu $K_l(f)$ und enthält letzteren vollständig*). Sein Relativgrad ist die größte in

$$\frac{1}{2}(l_1-1)\left(l_1-\left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$$

enthaltene Potenz $l^{\varkappa_1}$ von l**). Dabei sei $l=3$, $m=-3$ zunächst ausgeschlossen. $K_l(l_1 f)$ hat einen Unterkörper $\overline{K}_l$, der denselben Relativgrad $l^u = N$ zu k hat wie $K_l(f)$, und dessen Relativdiskriminante zu l_1 prim ist. Denn nach dem Satz Kapitel II. 1.***) hat die Trägheitsgruppe der in l_1 enthaltenen Primideale höchstens den Grad $l^{\varkappa_1}$. Der Trägheitskörper hat aber eine zu l_1 prime Relativdiskriminante zu k und hat wenigstens den Grad $l^u = N$. Zu $\overline{K}_l$ gehöre der Führer $\bar{f}$ in k. *$\bar{f}$ ist also prim zu l_1*. Bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache f^* von f und $\bar{f}$, so *ist auch f^* zu l_1 prim*. Die zu l gehörige Klassenanzahl des Strahls f^* in k sei $l^{\varkappa^*}$. Nach Kapitel III. Hauptsatz†) existieren genau $l^{\varkappa^*-u}$ Geschlechter in $\overline{K}_l$ in bezug auf den Führer f^*. Andererseits entsprechen jeder Klasse von (f) $l^{\varkappa^*-u}$ Klassen von (f^*), da l^u die Klassenanzahl von (f) ist, die zu l gehört††).

β) *Die $l^{\varkappa^*-u}$ Klassen von (f^*), denen Geschlechter in $\overline{K}_l$ entsprechen, liegen alle in der Hauptklasse von (f).*

Denn es zerfallen $(l^{\varkappa^*} - l^{\varkappa^*-u})$ Klassen von (f^*) *nicht* in $\overline{K}_l$. Fiele eine derselben in die Hauptklasse von (f), so gäbe es, da l_1 zu f^* prim ist, unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$, für die der

$$\lim_{s=1} \inf. \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s}$$

nicht existiert und die in der Hauptklasse des Strahls $(l_1 f)$ lägen. Dies ist gegen Zerlegungssatz 2.†††) der Körper $K(f)$ resp. $K(l_1 f)$, nach dem alle Primideale dieser Hauptklasse zerfallen müssen, abgesehen von endlich vielen. Alle $(l^{\varkappa^*} - l^{\varkappa^*-u})$ Klassen von (f^*) müssen also in Nebenklassen von (f) liegen. Den $l^u - 1$ Nebenklassen von (f) entsprechen aber genau $(l^{\varkappa^*} - l^{\varkappa^*-u})$ Klassen in (f^*). Also müssen alle Klassen von (f^*), die in Nebenklassen von (f) liegen, nicht zerfallen, und die $l^{\varkappa^*-u}$ Klassen, die

---

*) Weber: Algebra II, S. 451. Hilbert: Zahlbericht, S. 330 u. ff.
) S. 183, Eigenschaft 1. *) S. 188. †) S. 237.
††) S. 183, Eigenschaft 1. †††) S. 183.

in der Hauptklasse von (f) liegen, entsprechen den existierenden Geschlechtern.

γ) Die Körper $\overline{K}_l$ und $K_l(f)$ haben denselben Relativgrad zu k. Sie sind beide relativ-Abelsch zu k. Die Primideale 1. Grades sind nach β) und wegen Zerlegungssatz 2.*) dieselben, wenn man von den Primidealen $\mathfrak{p}_i^*$ $(i=1, 2, \cdots)$ absieht, für die

$$\liminf_{s=1} \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i^*)^s}$$

existiert. *$\overline{K}_l$ und $K_l(f)$ sind dann identisch.*

Um dies zu zeigen, adjungiere man die l^{ten} Einheitswurzeln zu $\overline{K}_l$ und zu $K_l(f)$, außer wenn $l=3$, $m=-3$. Die beiden Körper sollen in $\overline{K}_l'$ und $K_l'(f)$ übergehen. Die oben angegebenen Eigenschaften bleiben dann erhalten. Denn da $(l-1)$ der Grad des Körpers der l^{ten} Einheitswurzeln ist, kann keiner der beiden Körper $\overline{K}_l$ und $K_l(f)$ dieselben enthalten. K_1 sei ein Unterkörper von $K_l'(f)$, zu dem $K_l'(f)$ den Relativgrad l besitze. $K_l'(f)$ entstehe aus K_1 durch Adjunktion von $\sqrt[l]{w}$. Andererseits müßte, wenn $K'(f)$ nicht identisch mit $\overline{K}_l'$ ist, bei dem algebraischen Aufbau des Körpers $\overline{K}_l'$ der Fall eintreten, daß der Unterkörper $\overline{\overline{K}}_l'$ von $\overline{K}_l'$ noch in $K_l'(f)$ liegt, der durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\overline{w}}$ erhaltene nächst höhere Unterkörper von $\overline{K}_l'$ aber nicht mehr. Dann gibt es unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ 1. Grades in K_1, für die

$$\liminf_{s=1} \sum \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s}$$

nicht existiert, und für die:

$$\left(\frac{w}{\mathfrak{P}_i}\right)=1; \quad \left(\frac{\overline{w}}{\mathfrak{P}_i}\right)\neq 1 \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

ist, wo $\left(\frac{w}{\mathfrak{P}}\right)$ das l^{te} Potenzrestsymbol bedeutet**). Alle $\mathfrak{P}_i$ zerfallen in $K_l'(f)$ in Primideale 1. Grades, nicht aber in $\overline{K}_l'$. Dies widerspricht der Annahme. Also muß $K_l'(f)$ mit $\overline{K}_l'$ und $K_l(f)$ mit $\overline{K}_l$ identisch sein. Nun ist die Relativdiskriminante von $\overline{K}_l$ in bezug auf k zu l_1 prim. Also ist die Annahme, diejenige von $K_l(f)$ in bezug auf k enthalte l_1, hinfällig.

δ) $l=3$, $m=-3$. In diesem Falle darf man $f=1$ immer durch 3 ersetzen, da (1) und (3) in bezug auf 3 die gleiche Klassenanzahl haben, also $K_3(3)=K_3(1)$. In jedem Falle ist dann der Relativgrad von $K_3(l_1 f)$ zu $K_3(f)$ gleich der größten in $\frac{1}{2}(l_1-1)\left(l_1-\left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$***) enthaltenen Potenz von 3.

*) S. 183.

**) Hilbert: Zahlbericht, S. 426, Satz 152 und sein Beweis.

***) Siehe die Formel von h_s S. 183.

Die übrige Überlegung bleibt gleich.

b) $l=2$. Ist $m=-1$, $f=1$, so kann man f stets durch 2 ersetzen, da (1) und (2) in diesem Fall dieselbe Klassenzahl haben, also $K_2(1)=K_2(2)$. Somit ist in jedem Fall der Relativgrad von $K_2(l_1 f)$ zu $K_2(f)$ gleich der größten in $\frac{1}{2}(l_1-1)\left(l_1-\left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$ enthaltenen Potenz von 2. Der Körper $K_2(l_1 f)$ hat demnach einen Unterkörper vom Relativgrad $2^u=N$, dessen Relativdiskriminante zu 2 prim ist. Denn zerlegt man $K_2(l_1 f)$ in den absolut Abelschen Kreiskörper und den relativ-Abelschen Körper der komplexen Multiplikation, so haben die beiden Körper nach Kapitel I.*) jedenfalls den quadratischen Unterkörper $\sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}$, dessen Relativdiskriminante l_1 enthält, gemein. Vergleicht man dies mit dem Satz Kapitel II. 4.**), so erkennt man sofort, daß die Trägheitsgruppe von den in l_1 enthaltenen Primidealen höchstens als Grad die größte in $\frac{1}{2}(l_1-1)\left(l_1-\left(\frac{d}{l_1}\right)\right)$ enthaltene Potenz von 2 besitzen kann. Alles weitere bleibt sich gleich. Nur ist nun $2^{x^*+\sigma+\varrho}$ die Klassenanzahl von (f^*) im *engeren Sinne****) und es gibt nach dem Hauptsatz von Kapitel III. $2^{x^*+\sigma+\varrho-u}$ existierende Geschlechter in $\overline{K}_2$, da $f^*>2$. Alle Klassen von (f^*) im engeren Sinne, die existieren, fallen aber in die Hauptklasse von (f) im weiteren Sinne. Also haben wieder $K_2(f)$ und $\overline{K}_2$ dieselben Primideale 1. Grades, abgesehen von jenen $\mathfrak{p}_i^*$ $(i=1,2,\cdots)$; der Schluß ist derselbe wie vorhin.

3. Die Primzahl l sei in f nicht enthalten. *Die Relativdiskriminante von $K_l(f)$ in bezug auf k ist dann zu l prim.*

a) $l \neq 2$. Man denke sich die $K_l(f)$ aus den Kreiskörpern und den Körpern der singulären Moduln aufgebaut. Für den Kreiskörper kennt man die Diskriminante†). Der Satz gilt dann und ist nur noch für den in $K_l(f)$ enthaltenen Körper $K_l''(f)$ der singulären Moduln zu beweisen.

Wir betrachten die Relativgruppe

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\nu^{x_\nu} \qquad (0 \leqq x_i < l^{n_i},\ i=1,2,\cdots,\nu)$$

von $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ in bezug auf k. Dabei ist u_0 so gewählt, daß $\mathfrak{l}$ in $K_l''(f)$ genau die l^{u_0}te Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals wird. $K_l''(f l^{u_0+2-\sigma})$ ist relativ-zyklisch zu $K_l''(f)$. Denn die Gruppen sind holoedrisch isomorph mit den Gruppen der Klassen des Ringes $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ resp. (f)††) und für dieselben gilt, wie leicht zu sehen, diese Tatsache. Der Relativgrad ist l^{u_0}. Die Relativgruppe soll nun etwa

*) S. 183, Beweis von 1. **) S. 213.

***) S. 220. Man unterscheide das jetzige σ von dem sonstigen.

†) S. 182, Eigenschaft 4. ††) S. 183. Eigenschaft 3.

gerade durch die Potenzen von $S_1^{l^{n_1-u_0}}$ gegeben sein. Dann ist die Relativgruppe von $K_l''(f)$ in bezug auf k gegeben durch:

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\nu^{x_\nu} \quad \begin{cases} 0 \leqq x_1 < l^{n_1-u_0} \\ 0 \leqq x_i < l^{n_i} \ (i=2,3,\cdots,\nu). \end{cases}$$

Dabei kann $l^{n_1-u_0}$ auch gleich Eins sein. Wir wollen beweisen, daß es dann immer einen Unterkörper $\overline{K}_l''$ in $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ vom Relativgrad l^{u_0} zu k gibt, dessen Relativdiskriminante zu l prim ist.

Die Verzweigungsgruppe (gleich der Trägheitsgruppe) der in $\mathfrak{l}$ enthaltenen Primideale ist zyklisch*). Ist dieselbe eine zyklische Untergruppe von

$$S_2^{x_2} \cdots S_\nu^{x_\nu} \qquad \{0 \leqq x_i < l^{n_i} \ (i=2,3,\cdots,\nu),$$

so ergibt sich ohne weiteres der gewünschte Unterkörper. Ist dagegen eine Potenz von S_1 die Basissubstitution der Verzweigungsgruppe, so müßte dieselbe den Grad l^{2u_0} haben. Denn da dieselbe zyklisch ist und schon in $K_l''(f)$ den Grad l^{u_0} hat, müßte sie wenigstens den Grad l^{u_0} haben, oder $S_1^{l^{n_1-u_0}}$ müßte eine ihrer Substitutionen sein. Wäre aber auch $S_1^{l^{n_1-2u_0}}$ nicht in ihr, so würde, da $S_1^{l^{n_1-u_0}}$ die Grundsubstitution der Relativgruppe von $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ zu $K_l''(f)$ ist, auch $\mathfrak{l}$ in $K_l''(f)$ *nicht* die l^{u_0}te Potenz eines Ideals werden. Somit ist sicher $n_1 - 2u_0 \geqq 0$ oder $n_1 \geqq 2u_0$.

Wegen des holoedrischen Isomorphismus mit den Klassen der Ringe von (f) resp. $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ gibt es aber eine Ringklasse A, für die

$$A^{l^{n_1-u_0+\mu}} (\mu < u_0)$$

im Ring (f), nicht aber im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ liegt; für die dagegen $A^{l^{n_1}}$ im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ liegt. Diese Klasse A ist der Substitution S_1 in $K_l''(f)$ und $K_l''(l^{u_0+2-\sigma}f)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet. Dies ist unmöglich.

Denn ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal (prim zu l) von A, so gibt es in $K_l''(f)$ eine Zahl Π, für die

$$(\Pi) = \mathfrak{p}; \quad \Pi^{1+S_1+\cdots+S_1^{l^{n_1-u_0}-1}} = \pi; \quad \mathfrak{p}^{l^{n_1-u_0}} = (\pi),$$

wo π im Ring (f) liegt**). Dabei ist $m = -3$, $l = 3$ zunächst ausgeschlossen. Nach Hilfssatz VI, Kapitel II.***), ist aber, wenn $l = 3$, $\sigma = 2$, $\Lambda^{1-T} \equiv 1$ $(\mathfrak{L}^3)$ ausgeschlossen wird, π auch im Ring $(\mathfrak{l}^2)$. Also ist $\pi^{l^{u_0}-1}$ schon im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ oder $\mathfrak{p}^{l^{n_1}-1}$ liegt im Ring $(l^{u_0+2-\sigma}f)$ gegen Obiges.

Somit ist dieser Fall auszuschließen, und es gibt einen Unterkörper $\overline{K}_l''$, dessen Relativdiskriminante zu l prim ist. Für denselben beweist man ge-

*) Kapitel II. 3, S. 208.

**) Weber: Algebra III. S. 449. S. 439.

***) S. 205.

nau nach α), β) und γ), daß er mit $K_l''(f)$ identisch sein muß. Man hat bloß beiderseits den Kreiskörper $K_l'(f)$, dessen Relativdiskriminante zu l prim ist, zu adjungieren, um den Satz über Geschlechter anwenden zu können.

Ist $l=3$, $\sigma=2$, so führt man den Beweis gleich; nur ist $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}^{1-s}$ und Π durch Π^{1-s} zu ersetzen. $\mathfrak{p}^{1-s}$ hat aber in bezug auf die Primzahl 3 die gleichen Eigenschaften wie $\mathfrak{p}$; also ergibt die Anwendung der 1. Ergänzung von Hilfssatz VI.*) den Beweis wie vorhin.

Ist schließlich $l=3$, $m=-3$, so ist $K_3''(1)=K_3''(3)$. Wir nehmen f immer einmal durch 3 teilbar an und setzen $f=3l_1l_2\cdots l_r$. Die Klassenzahl der Körper $k=(\sqrt{-3})$ ist Eins. Man kann deshalb die Klassengruppe des Ringes (f) durch

$$S_1^{x_1}S_2^{x_2}\cdots S_r^{x_r}\qquad(0\leqq x_i<3^{n_i},\ i=1,2,\cdots,r)$$

gegeben denken, wo S_i der Primzahl l_i zugeordnet und 3^{n_i} die größte in $\left(l_i-\left(\frac{-3}{l_i}\right)\right)$ enthaltene Potenz von 3 ist. $(3^{u_0+1}l_1l_2\cdots l_r)$ hat dann die Gruppe:

$$S^xS_1^{x_1}S_2^{x_2}\cdots S_r^{x_r}\ (0\leqq x<3^{u_0},\ 0\leqq x_i<3^{n_i},\ i=1,2,\cdots,r).$$

Diese Gruppen sind holoedrisch isomorph mit den Gruppen von $K_3''(f)$ und $K_3''(3^{u_0}f)$. Wird (3) in $K_3''(f)$ die $2\cdot3^{u_0}$te Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals, so erkennt man sofort aus obigen Gruppen, daß $K_3''(3^{u_0+1}l_1\cdots l_r)$ einen Unterkörper vom selben Relativgrad zu k wie $K_3''(f)$ haben muß, dessen Relativdiskriminante zu 3 prim ist; denn die Verzweigungsgruppe jedes in 3 enthaltenen Primideals ist zyklisch**). Alles weitere ergibt sich wie früher. Daraus schließt man rückwärts, daß der Satz auch für zu 3 prime f gilt.

b) $l=2$. $m=-1$ werde zunächst ausgeschlossen. Ist 2^γ die Anzahl der Geschlechter des Ringes (f) von k, so wird die Gruppe der zu 2 gehörigen Klassen des Ringes (f) gegeben durch

$$S_1^{x_1}S_2^{x_2}\cdots S_\gamma^{x_\gamma}\quad(0\leqq x_i<2^{n_i},\ i=1,2,\cdots,\gamma).$$

Denn jede ambige Klasse enthält auch ein ambiges Ideal***). Also ist die Anzahl der unabhängigen Basissubstitutionen γ. Betrachtet man bei ungeraden f die quadratischen Unterkörper†), so sieht man, daß dieselben eine zu 2 prime Relativdiskriminante bezüglich k haben, da††) stets:

---

*) S. 207. **) S. 208, Kapitel II, 3. Satz.

***) Vgl. hierzu Zahlbericht, S. 302 u. ff., insbesondere den Satz 107, S. 305. Außerdem Dirichlet-Dedekind, S. 315 u. ff.

†) S. 183, Kapitel I, Beweis zu 1.

††) Siehe Fueter: Der Klassenkörper der quadratischen Körper etc. Diss. Göttingen 1903, S. 7 u. ff.

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} l \equiv 1(4);$$

dasselbe gilt auch im Fall $m \equiv 1(4)$, $\sigma = 1$, wenn f nur einfach durch 2 teilbar ist. Wir unterscheiden:

α) $m \equiv 1(4)$, $\sigma = 1$; es sei $f = 2 l_1 l_2 \cdots l_r$ einmal durch 2 teilbar. Dies ist keine Beschränkung, da $K_2''(l_1 l_2 \cdots l_r) = K_2''(2 l_1 l_2 \cdots l_r)$. Gehen wir zum Ring $(2^{u_0+\tau} f)$, wo $u_0 + \tau \geqq 2$, so wird, da sich die Anzahl der ambigen Klassen vervierfacht*), die Klassengruppe gegeben sein durch

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\gamma^{x_\gamma} S_{\gamma+1}^{x_{\gamma+1}} S_{\gamma+2}^{x_{\gamma+2}} \quad (0 \leqq x_i < 2^{n_i},\ i = 1, 2, \cdots, \gamma, \gamma+1, \gamma+2).$$

Den neuen Substitutionen $S_{\gamma+1}$, $S_{\gamma+2}$ entsprechen aber die quadratischen Unterkörper $\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$ **), die einen Körper ergeben, in dem 2 die 4. Potenz eines Ideals wird. Ferner ist $n_{\gamma+1} + n_{\gamma+2} = u_0 + \tau$ und $n_{\gamma+1}$ oder $n_{\gamma+2}$ gleich Eins***).

Wird nun (2) in $K_2''(f)$ die $n_0^{te} = 2^{u_0 te}$ Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals, so setze man $\tau = 1$, wenn die Verzweigungsgruppe zyklisch, sonst $\tau = 0$. Im letzteren Fall sieht man dann ohne weiteres nach dem Satz Kapitel II. 4.***) wegen $n_{\gamma+1} + n_{\gamma+2} = u_0$, daß $K_2''(2^{u_0} f)$ einen Unterkörper $\overline{K}_2''$ vom selben Relativgrad zu k besitzt wie $K_2''(f)$, dessen Relativdiskriminante zu 2 prim ist. Ebenso im Fall $\tau = 1$.

β) $m \not\equiv 1(4)$, $\sigma = 2$; ist dann f ungerade und wird (2) die $2 \cdot 2^{u_0 te}$ Potenz eines aus lauter verschiedenen Primidealen zusammengesetzten Ideals, so ist $K_2''(2^{u_0} f)$ relativ-zyklisch zu $K_2''(f)$ vom Relativgrade 2^{u_0}. Die relative Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale ist jetzt zyklisch***). Die Anzahl der ambigen Klassen des Ringes $(2^{u_0} f)$ ist doppelt so groß wie diejenige von (f). Die Gruppe von $K_2''(2^{u_0} f)$ ist also

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_\gamma^{x_\gamma} S_{\gamma+1}^{x_{\gamma+1}}.$$

Algebraisch entspricht der Substitution $S_{\gamma+1}$ der quadratische Unterkörper†) $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{-2}$, dessen Relativdiskriminante zu k 2 sicher enthält. Die Existenz des Unterkörpers $\overline{K}_2''$ folgt dann gleich wie unter α).

γ) $m = -1$, $\sigma = 2$. Dieser Fall erledigt sich gleich wie β); nur ist f zunächst als einmal durch 2 teilbar anzunehmen (es ist $K_2''(2) = K_2''(1)$). Damit ist in jedem Fall die Existenz eines Unterkörpers $\overline{K}_2''$ bewiesen, der den gleichen Relativgrad zu k hat wie $K_2''(f)$ und dessen Relativdiskriminante zu 2 prim ist. Daß die beiden Körper identisch sein müssen folgt wie im früheren Fall 2b).

---

*) Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen, S. 316. **) S. 183 und 184, Kapitel I.
***) S. 213, Kapitel II, 4. †) S. 183 und 184, Kapitel I.

Der Satz ist damit in jedem Fall bewiesen. Denn nur im Fall $m \equiv 1(8)$ ist die Klassenanzahl von (f) und $(2f)$ bei ungeradem f gleich. Sonst ist sie das dreifache ($m \equiv 5$), resp. zweifache ($m \not\equiv 1(4)$).

4. Aus dem Hauptsatz erkennt man das Resultat:

Satz: *Der dem Körper $K_l(f)$ zugeordnete Strahl von k hat einen Führer $\bar{f}$, der ein Teiler des Führers f ist. Dabei ist nur im Fall $m = -1$, $l = 2$ f durch 2, im Fall $m = -3$, $l = 3$ f durch 3 teilbar angenommen.*

Kapitel V.

Die Vollständigkeit.

1. Es sei K ein beliebiger in k relativ-Abelscher Körper vom Relativgrade N. Von diesem setzen wir voraus, daß er *absolut Galoissch* sei. Wir erreichen dies immer durch Adjunktion der konjugierten Körper, da dieselben auch relativ-Abelsch sind. Wir bestimmen denjenigen Unterkörper K_l von K, der zur Primzahl l gehört, d. h. dessen Grad die größte in N enthaltene Potenz l^u ist. K_l wird dann ebenfalls *absolut Galoissch* und zu k *relativ-Abelsch* sein. Die Relativgruppe sei

$$S = S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \quad (0 \leqq x_i < l^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r),$$

wo also $S_i S_k = S_k S_i$ und $l^u = l^{u_1 + u_2 + \cdots + u_r}$. $s = (\sqrt{m} : -\sqrt{m})$ sei die Substitution von k.

2. $l \neq 2$. Da der Körper K_l absolut Galoissch ist, ist seine Galoissche Gruppe durch

$$s^x S_1^{x_1} \cdots S_r^{x_r} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq x < 2 \\ 0 \leqq x_i < l^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r \end{pmatrix}$$

gegeben. Es muß also für jedes $i = 1, 2, \cdots, r$:

$$sS_i = Ss, \quad S_i s = sS$$

sein, wo S sich wieder in der Form $S_1^{x_1} \cdots S_r^{x_r}$ darstellen läßt. Es sei

$$S = S_i^{v_i} S',$$

wo S' nur von S_h ($h \neq i, = 1, 2, \cdots, r$) abhängt. Setzt man

$$S_0 = S_i S \quad = S_i^{v_i+1} S',$$

$$S_{00} = S_i S^{-1} = S_i^{v_i-1} S',$$

so ist, weil $sS^u = S_i^u s$, für jedes u:

$$sS_0 = sS_i S \quad = SsS \quad = SS_i s \quad = S_0 s \quad ,$$

$$sS_{00} = sS_i S^{-1} = SsS^{-1} = SS_i^{-1} s = S_{00}^{-1} s.$$

Da l ungerade ist, so ist v_i+1 oder v_i-1 zu l prim. Jenachdem nehme man S_0 oder S_{00} und setze es gleich S_i'. Dann ist $sS_i'=S_i'^{\pm 1}s$. Nun gehört aber S_i' zum selben Exponenten wie S_i, und da S_i in S_i' zu einem Exponenten, der nicht durch l teilbar ist, auftritt, so darf man S_i als Basis sukzessive $(i=1,2,\cdots,r)$ durch S_i' ersetzen. Man erhält so die Relativgruppe

$$S_1'^{x_1}S_2'^{x_2}\cdots S_r'^{x_r}\qquad (0\leqq x_i<l^{u_i},\ i=1,2,\cdots,r),$$

und diese Gruppe ist identisch mit der vorigen. Wir dürfen deshalb von vornherein voraussetzen, daß die Relativgruppe von K_l gegeben sei durch

$$S_1^{x_1}S_2^{x_2}\cdots S_r^{x_r}\qquad (0\leqq x_i<l^{u_i},\ i=1,2,\cdots,r),$$

wo

$$sS_i=S_i^{\pm 1}s\qquad\qquad (i=1,2,\cdots,r).$$

K_l hat dann alle Eigenschaften, die in Kapitel II. 6.*) vorausgesetzt sind. Man kann also K_l einen Strahl (f) von k eindeutig zuordnen. Dabei ist f im Fall $m=-3$, $l=3$ durch 3, im Fall $m=-1$, $l=2$ durch 2 teilbar. Wir betrachten den Körper $K_l(f)$**) der singulären Moduln und Kreiskörper und bilden den Oberkörper $\overline{K}=K(K_l, K_l(f))$. Derselbe ist wieder absolut-Galoisch, relativ-Abelsch zu k und die Relativgruppe hat die vorigen Eigenschaften. Also wird auch $\overline{K}$ ein Strahl in k zugeordnet sein. Der Führer ist das kleinste gemeinsame Vielfache der den Körpern $K_l(f)$ und K_l zugeordneten Führer***). Nach dem Schluß von Kapitel IV. †) ist aber der dem Körper $K_l(f)$ zugeordnete Führer ein Teiler von f. Also ist f selbst der Führer von $\overline{K}$.

Es sei nun $N=l^u$ der Relativgrad von $\overline{K}$ zu k, und $l^\varkappa$ die zu l gehörige Klassenzahl des Strahls (f). Die Anzahl der in $\overline{K}$ existierenden Geschlechter ist $l^{\varkappa-u}$††). Nun muß wenigstens ein Geschlecht existieren. Denn es gibt in jedem Körper unendlich viele Primideale 1. Grades $\mathfrak{P}_i$, $(i=1,2,\cdots)$, für die

$$\liminf_{s=1}\frac{1}{N(\mathfrak{P}_i)^s}$$

nicht existiert, da sonst die Klassenzahl von $\overline{K}$ Null wäre. Also ist

$$l^{\varkappa-u}\geqq 1,$$

$$\varkappa\geqq u.$$

Andererseits ist der Relativgrad von $K_l(f)$ in bezug auf k gleich $l^\varkappa$; somit ist der Grad l^u von $\overline{K}$ wenigstens gleich dem Grad $l^\varkappa$ von $\overline{K}_l(f)$, oder

$$l^u\geqq l^\varkappa;\ u\geqq\varkappa.$$

*) S. 217. **) S. 186, Kapitel I. 7.

***) S. 218, Hauptsatz, Kapitel II. 7. †) S. 246.

††) S. 237, Kapitel III. 8., Hauptsatz.

Daraus folgt $u = \varkappa$, oder *der Körper K_l muß in dem Körper $K_l(f)$ enthalten sein.* Zugleich ist hiermit das Mittel gegeben, um denjenigen Körper der singulären Moduln zu bestimmen, in dem ein vorgelegter Körper K_l enthalten ist.

Satz: *Jeder Körper K_l ist in einem Körper der singulären Moduln und der Kreiskörper enthalten.*

3. $l = 2$. Wenn sich die Relativgruppe des Körpers K_2 auf eine Gruppe

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \cdots S_r^{x_r} \quad (0 \leqq x_i < 2^{u_i},\ i = 1, 2, \cdots, r),$$

wo $sS_i = S_i^{\pm 1} s$ ist, zurückführen läßt, so ist der Beweis wörtlich derselbe wie unter 2., falls der dem Körper K_2 zugeordnete Führer (1) oder eine ungerade Primzahl (l_1) ist. Denn in diesem Falle stimmen die beiden Strahlklassenzahlen*) miteinander überein. Satz 8., Kapitel III.**) darf dann angewandt werden. Gehen aber mehrere Primzahlen oder zwei in f auf, so zerlegt man $K_2(f)$ in seinen absolut-Abelschen und relativ-Abelschen Teil $K_2'(f)$ und $K_2''(f)$; ebenso K_2 in K_2' und K_2'', was wegen der Annahme über die Relativgruppe möglich ist. Wäre nun z. B. $K(K_2'', K_2''(f))$ von höherem Grade als $K_2''(f)$, so müßte die Relativdiskriminante von $K(K_2'', K_2''(f))$ in bezug auf $K''(f)$ wenigstens zwei ungerade Primzahlen l_1, l_2 oder $l = 2$ enthalten. Denn sonst hätte dieser Körper einen Unterkörper, dem der Führer (1) oder (l_1) zugeordnet wäre und dessen Relativgrad zu k von höherem Relativgrad als $K_2''(1)$ resp. $K_2''(l_1)$ wäre gegen obiges. Würde nun l_1 in $K_2''(f)$ die n_1^{te} Potenz, in $K(K_2''(f), K_2'')$ die $2n_1^{\text{te}}$ Potenz von einem Ideal, so müßte nach Satz 1 Kapitel II. $(l_1 \neq 2)$***)

$$l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right) \equiv 0\,(2n_1).$$

Dies ist unmöglich, da n_1 schon die größte in $l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)$ enthaltene Potenz von 2 ist†). Ist aber 2 in f enthalten, so ist für $\sigma = 1$ die Verzweigungsgruppe von (2) nicht zyklisch. Wäre also 2 in der Relativdiskriminante von $K(K_2''(f), K_2'')$ zu $K_2''(f)$ enthalten, so müßte die Verzweigungsgruppe der in 2 enthaltenen Primideale für $\sigma = 1$ drei voneinander unabhängige, im Falle $\sigma = 2$ zwei voneinander unabhängige Grundsubstitutionen haben, was nach Satz 4., Kapitel II. S. 213 unmöglich ist. Damit ist bewiesen, daß K_2'' in $K_2''(f)$ und ebenso K_2' in $K_2'(f)$ enthalten ist.

*) Siehe Kapitel III. 1. S. 220.

**) S. 61. Ausgenommen ist $f \leqq 2$, $m = -1$. Doch ist hier die Klassenzahl $h = 1$.

***) S. 188. Für $m = -1$ ist l_2 die $2n_2^{\text{te}}$ Potenz eines Ideals und

$$\left(l_1 - \left(\frac{d}{l_1}\right)\right)\left(l_2 - \left(\frac{d}{l_2}\right)\right) \equiv 0\ (4n_1 n_2),$$

was unmöglich.

†) S. 182, Kapitel I. 4. Eigenschaft 1.

Wenn jedoch die Relativgruppe von K_2 *nicht* die obige Eigenschaft hat, so kann man dieselbe im allgemeinen *nicht* auf die gewünschte Form wie in 2. bringen. Es ist dann notwendig, Strahlen mit Führern zu betrachten, die nicht rationale Zahlen, sondern irgendwelche Ideale von k sind. Ein Fall, wo sich auch durch Bildung des Galoisschen Körpers die Relativgruppe nicht auf die gewünschte Form bringen läßt, ist z. B. gegeben durch

$$x = x_1 = \sqrt[4]{1+i}; \quad x_2 = i\sqrt[4]{1+i} = ix; \quad x_3 = -\sqrt[4]{1+i} = -x;$$
$$x_4 = -i\sqrt[4]{1+i} = -ix; \quad S_1 = (x : ix); \quad i = \sqrt{-1}.$$

Trotzdem läßt sich x als Unterkörper aus $K(f)$ erhalten. Denn ist

$$\zeta = \sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{-2}}}$$

eine 32. Einheitswurzel, und $y = \sqrt[8]{-2}$, so ist:

$$x = \sqrt[4]{1+i} = \zeta y.$$

y ist aber in einem Körper der singulären Moduln enthalten. Denn $K(y)$ ist relativ-zyklisch vom 8. Relativgrad zu $k(\sqrt{-1})$:

$$\begin{aligned}
y &= y_1 = \sqrt[8]{-2}, & S^4 y &= y_5 = -y,\\
S\ y &= y_2 = \frac{i-1}{\sqrt{-2}}\,y = \frac{1-i}{2}\,y^5, & S^5 y &= y_6 = -\frac{1-i}{2}\,y^5,\\
S^2 y &= y_3 = -iy, & S^6 y &= y_7 = +iy,\\
S^3 y &= y_4 = \frac{-1-i}{2}\,y^5, & S^7 y &= y_8 = \frac{1+i}{2}\,y^5,
\end{aligned}$$

wo $S = (y_1 : y_2)$. Außerdem ist $K(y, \sqrt{-1})$ absolut-Galoissch und wegen $sSy = sy_2 = \frac{1+i}{2}y^5 = y_8 = S^7 y$ auch

$$sS = S^{-1}s.$$

Nach dem Obigen ist also $y^8 + 2 = 0$ eine Gleichung, die aus den Gleichungen der komplexen Multiplikation erhalten wird.

4. Trotzdem es für obiges Problem nicht notwendig ist, wollen wir der Vollständigkeit halber auch für ungerade Primzahlen l die Theorie der Oberkörper, die zu Idealen in k als Führer gehören, durchführen. Es sei also l *ungerade* und l_1 irgendeine Primzahl $\neq l$, die in k zerfalle, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = +1$; l^μ sei die höchste in $l_1 - 1$ enthaltene Potenz von l; $(l_1) = \mathfrak{l}_1 s\mathfrak{l}_1$. Die l_1^{ten} Einheitswurzeln haben dann einen zyklischen Unterkörper $K_l'(l_1)$ vom $l^{\mu\text{ten}}$ Grade, in dem $\mathfrak{l}_1$ und $s\mathfrak{l}_1$ die $l^{\mu\text{ten}}$ Potenzen eines Ideals werden. T' sei die Substitution der zyklischen Gruppe von $K_l'(l_1)$. Nimmt man den Körper $K_l''(l_1)$ hinzu, so wird in demselben $\mathfrak{l}_1$ und $s\mathfrak{l}_1$ ebenfalls die

$l^{u\text{te}}$ Potenz eines Ideals. T'' sei die Grundsubstitution der Trägheitsgruppe in $K_l''(l_1)$. Es ist dann

$$sT' = T's, \quad sT'' = T''^{-1}s.$$

Bildet man nun $K(K_l'(l_1), K_l''(l_1))$, so ist der Relativgrad dieses Körpers zu k die größte in $(l_1-1)^2 h$ enthaltene Potenz von l; dabei ist h die Klassenzahl von k. Da die Trägheitsgruppe jedes in $\mathfrak{l}_1$ enthaltenen Primideals $\mathfrak{L}_1$ von K zyklisch ist*), und zugleich Untergruppe von

$$T'^{x'}\,T''^{x''} \qquad \left(0 \leqq {x' \atop x''} < l^u\right)$$

ist, so sieht man, daß $\mathfrak{l}_1$ durch Adjunktion von $K_l''(l_1)$ zu $K_l'(l_1)$ wohl noch weiter zerfällt, aber nicht mehr in gleiche Faktoren. Nimmt man also z. B. $T'T''$ als Grundsubstitution der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{L}_1$, so ist für jede Zahl Ω von K:

$$\Omega \equiv T'T''\Omega \ (\mathfrak{L}_1);$$

also auch

$$s\Omega \equiv T'T''s\Omega \ (\mathfrak{L}_1) \equiv sT'T''^{-1}\Omega \ (\mathfrak{L}_1)$$

oder für jede Zahl Ω in K:

$$\Omega \equiv T'T''^{-1}\Omega \ (s\mathfrak{L}_1).$$

$T'T''^{-1}$ ist dann die Grundsubstitution der Trägheitsgruppe von $s\mathfrak{L}_1$ und $T'T''$ ist sicher nicht in letzterer. Bildet man also den zu

$$(T'T''^{-1})^x \qquad (0 \leqq x < l^u)$$

gehörigen Unterkörper $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_1)$, so wird dessen Relativdiskriminante in bezug auf k zu $s\mathfrak{l}_1$ prim sein**). Andererseits enthält dieselbe aber alle in $\mathfrak{l}_1$ enthaltenen Primideale von K, also $\mathfrak{l}_1$ selbst. Der Relativgrad von $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_1)$ in bezug auf k ist außerdem die größte in $(l_1-1)h$ enthaltene Potenz von l. Seine Relativdiskriminante enthält nur das Primideal $\mathfrak{l}_1$.***)

Bildet man umgekehrt den Strahl $(\mathfrak{l}_1)$ in k, d. h. greift man alle Zahlen α von k heraus, für die

$$\alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}_1),$$

so ist die Strahlklassenanzahl $\frac{1}{w}(l_1-1)h$, wo w die Anzahl der Einheitswurzeln von k ist. *Diesen Strahl ordnet man $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_1)$ zu.* Aus obigem geht dann für $l \neq 2$ der Satz hervor:

Zu jedem Primideal $\mathfrak{l}_1$, das zu l prim ist, existiert ein in k relativ-Abelscher Körper, dessen Relativdiskriminante nur $\mathfrak{l}_1$ enthält und dessen Re-

*) Zahlbericht, S. 254, Satz 71.

**) Zahlbericht, S. 259, Satz 76.

***) S. 239, Hauptsatz, Kapitel IV.

lativgrad gleich der größten in der Klassenanzahl des Strahls $(\mathfrak{l}_1)$ *enthaltenen Potenz von* l *ist.*

Im Falle $k(\sqrt{-3})$ hat man den Führer $\mathfrak{l}_1$ durch $3\mathfrak{l}_1$ zu ersetzen.

Ist $\left(\frac{d}{l}\right) = +1$, so macht man dieselbe Überlegung für $K_l'(l^\nu)$ und $K_l''(l^\nu)$, wo ν irgendeine Zahl > 1 ist. Da nun $(l) = \mathfrak{l}s\mathfrak{l}$, so wird für jedes in $\mathfrak{l}$ enthaltene Primideal $\mathfrak{L}$ die Verzweigungsgruppe in $K_l(K_l''(l^\nu), K_l''(l^\nu))$ zyklisch sein müssen mit einer Grundsubstitution $T'T''$, wo

$$sT' = T's; \quad sT'' = T''^{-1}s.$$

Man beweist dies genau nach der Methode, mit der Satz 3 in Kapitel II bewiesen wurde*). $T'T''^{-1}$ ist dann wieder die Grundsubstitution der Verzweigungsgruppe von $s\mathfrak{L}$, und der zu

$$(T'T''^{-1})^x \qquad (0 \leqq x < l^{\nu-1})$$

gehörige Körper $\overline{K}_l(\mathfrak{l}^\nu)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Er ist relativ-Abelsch zu k;

b) sein Relativgrad ist die größte in $\frac{1}{w} l^{\nu-1}(l-1)h$ enthaltene Potenz von l;

c) seine Relativdiskriminante enthält nur $\mathfrak{l}$;

d) $\mathfrak{l}$ wird in ihm die $l^{\nu-1\text{te}}$ Potenz eines Ideals, nicht aber die $l^{\nu\text{te}}$.

Andererseits hat der Strahl $(\mathfrak{l}^\nu)$ in k die Klassenanzahl $\frac{1}{w} l^{\nu-1}(l-1)h$. Also:

Zu jedem Strahl $(\mathfrak{l}^\nu)$ *in* k *existiert ein relativ-Abelscher Körper* $\overline{K}_l(\mathfrak{l}^\nu)$, *dessen Relativdiskriminante nur* $\mathfrak{l}$ *enthält, in dem* $\mathfrak{l}$ *die* $l^{\nu-1\text{te}}$ *Potenz eines Ideals wird und dessen Relativgrad gleich der zu* l *gehörigen Klassenzahl des Strahls* $(\mathfrak{l}^\nu)$ *in* k *ist.*

Durch Zusammensetzen der Körper $\overline{K}_l(\mathfrak{l}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ und $\overline{K}_l(\mathfrak{l}^\nu)$ erhält man einen Körper $\overline{K}_l(\mathfrak{f})$, wo $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^\nu\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\cdots\mathfrak{l}_r$ ist, der in bezug auf den Strahl $(\mathfrak{f})$ von k dieselben Beziehungen hat wie oben. Nur im Fall $m = -3$, $l = 3$ ist eine einfache ergänzende Betrachtung hinzuzufügen. Schließlich kann man in $\mathfrak{f}$ einen beliebigen rationalen Idealfaktor (f) als Faktor hinzufügen, wenn man dementsprechend den Körper $K_l(f)$ von früher zu $\overline{K}_l(\mathfrak{f})$ adjungiert. Man erhält den

Satz: *Zu jedem Strahl* $(\mathfrak{f})$ *in* k, *wo* $\mathfrak{f}$ *ein beliebiges Ideal von* k *ist, existiert ein zu* k *relativ-Abelscher Körper, dessen Relativdiskriminante nur die Primideale von* $\mathfrak{f}$ *enthält, und dessen Relativgrad gleich der zu* $l \neq 2$ *gehörigen Klassenzahl des Strahles* $(\mathfrak{f})$ *ist. Dabei heißen zwei Ideale in* $(\mathfrak{f})$ *äquivalent, wenn ihr Quotient zu einer Zahl gemacht werden kann, die* (mod $\mathfrak{f}$) *der Einheit kongruent ist.*

---

*) S. 208.

5. Ist dagegen $l = 2$, so kann man den eben aufgestellten Satz nicht beweisen unter Zuhilfenahme der in Kapitel IV betrachteten Körper. Es ist dann notwendig, in höhere Körper, die *Teilungskörper* von Weber*), zu gehen. Dies wollen wir zunächst an einem Beispiel zeigen. Es sei $k(\sqrt{-1}) = k(i)$ der zugrunde gelegte Körper. Bilden wir $K(10)$. Dieser Körper setzt sich aus den 5. Einheitswurzeln, die durch $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ gegeben sind und $\sqrt[8]{2}\; f_1(\sqrt{-100})$**) zusammen. Letztere Größe ist

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+\sqrt[4]{5}).$$

Also wird $K(10)$ gebildet durch $K\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt[4]{5}\right)$, was ein Körper 8. Grades ist. In demselben wird jedes der beiden in (5) enthaltenen Primideale $(1+2i)$ und $(1-2i)$ von k die 4. nicht aber 8. Potenz eines Ideals***). Ist S_1 die Substitution des Körpers der 5. Einheitswurzeln, S_2 die Substitution des Körpers von $(\sqrt[4]{5})$, so ist

$$S_1 S_2 = S_2 S_1, \quad s S_1 = S_1 s, \quad s S_2 = S_2^{-1} s, \quad S_1^4 = 1, \quad S_2^4 = 1,$$

und es kann die Substitution S_1 so gewählt werden, daß die Trägheitsgruppe der in $(1+2i)$ enthaltenen Primideale durch $(S_1 S_2)^x$ $(0 \leqq x < 4)$, der in $(1-2i)$ enthaltenen Primideale durch $(S_1 S_2^{-1})^x$ $(0 \leqq x < 4)$ gegeben ist. Daraus erkennt man sofort, *daß $K(10)$ keinen Unterkörper enthält, dessen Relativdiskriminante zu $(1-2i)$ prim ist, und in dem $(1+2i)$ die 4. Potenz eines Ideals wird.* Denn im Trägheitskörper von $(1-2i)$ würde $(1+2i)$ nur das Quadrat eines Ideals, da er bloß vom 2. Relativgrad ist. Derselbe ist nämlich $\sqrt{1+2i}$.

Geht man in einen beliebigen Körper $K_2(f)$, wo f ein Vielfaches von 10 ist, so wird auch dieser Körper keinen solchen Unterkörper enthalten. Denn derselbe ist Oberkörper von $K(10)$†) und die Relativdiskriminante muß zu 5 prim sein††). Er setzt sich zudem aus Körpern $K_2(2^\nu)$, $K_2(2l_i)$ zusammen, deren Relativdiskriminanten für $l_i \neq 5$ zu 5 prim sind nach dem Hauptsatz Kapitel IV.††) Somit:

Es gibt keinen Körper $K_2(f)$ in bezug auf $k(i)$, der einen Unterkörper besitzt, dessen Relativdiskriminante zu $(1-2i)$ prim ist, und in dem $(1+2i)$ die 4. Potenz eines Ideals wird. Ein solcher Körper ist aber

$$z = \sqrt[4]{1+2i},$$

*) Weber: Algebra III (1908), S. 563 u. ff.

**) Tabelle Weber: Algebra III, S. 724.

***) Denn die Trägheitsgruppe ist zyklisch.

†) Weber: Algebra III, S. 451. ††) S. 239.

der relativ-zyklisch zu $k(i)$ ist. Derselbe ist der Körper $K(2(1+i)(1+2i))$, d. h. der zum Strahl $(2(1+i)(1+2i))$ gehörige Oberkörper. Die Klassenzahl des Strahls ist $\frac{1}{2\cdot 2}\cdot 2^2\cdot[(1+2i)(1-2i)-1]=4$.

Nehmen wir aber einen beliebigen Oberkörper $K_2^{(m)}(f)$ in bezug auf $k(\sqrt{m})$, so muß, damit (5) die 4. Potenz eines Ideals in demselben wird, m zu 5 prim sein. Denn sonst ist $K_2^{(m)}(5)$ der Oberkörper $(\sqrt{5})$ von $K_2^{(m)}(1)$. Ist dagegen m zu 5 prim, so kann (5) die 4. Potenz eines Ideals werden. Da von allen Kreiskörpern nur die 5. Einheitswurzeln und deren Oberkörper die Eigenschaft haben, daß in ihnen (5) die 4. Potenz eines Ideals wird, so genügt es, in $K_2^{(m)}(f)$ nur die nicht absolut-Abelschen Bestandteile zu betrachten. Könnte man aus $K(10)$ und solchen Körpern einen Oberkörper bilden, der $K(z)$ enthielte, so müßte in jedem m wenigstens eine Primzahl l_1 aufgehen, die das Quadrat eines Ideals ist. Ist l_1 ungerade, so wird aber (l_1) in $K(z)$ *nicht* das Quadrat eines Ideals. Also müßte z auch in dem zu $s=(\sqrt{m}:-\sqrt{m})$ und zu der aus s gebildeten invarianten Untergruppe gehörigen Unterkörper enthalten sein. Nun enthält aber diese invariante Untergruppe, da

$$S^{-1}sS=sS^2,$$

auch die Substitution S^2, oder der zugehörige Unterkörper würde aus z und aus lauter Quadratwurzeln $\sqrt{m_i}$ bestehen. In einem solchen Körper würde aber 5 niemals die 4. Potenz eines Ideals. Ist $l_1=2$, so wären die Oberkörper von $k(\sqrt{-2})$ zu betrachten. In denselben wird aber wegen $\left(\frac{-2}{5}\right)=-1$ (5) höchstens das Quadrat eines Ideals, nicht die 4. Potenz. Somit erkennt man den

Satz: *Der zu $k(i)$ relativ-Abelsche Körper $\sqrt[4]{1+2i}$ ist in keinem Körper der singulären Moduln und Kreiskörper enthalten.*

6. Dagegen gilt der

Hauptsatz: *Jede in einem imaginär quadratischen Körper Abelsche Gleichung ist durch Kreiskörper und Teilungskörper der elliptischen Funktionen lösbar.*

Während die singulären Moduln nur den Oberkörper in bezug auf den im Kapitel I, S. 181 ausgesprochenen Äquivalenzbegriff der Strahlen im Grundkörper liefern, ergeben die *Teilungskörper die entsprechenden Oberkörper, die zum engeren Äquivalenzbegriff der Strahlen,* Kapitel III, S. 220, *gehören.* In bezug auf die ungeraden Teiler der Klassenzahlen stimmen beide überein, also auch ihre Oberkörper, nicht aber für die in den Klassenzahlen enthaltene Potenz von 2.

Dieser Satz ist nur für die Oberkörper von einem Relativgrad 2^u zu beweisen, da derselbe nach 4. für alle Körper ungeraden Relativgrades gilt. Dazu ist genau mit den Mitteln von Kapitel II der folgende, den dortigen Resultaten entsprechende Satz zu beweisen, der sich nun auf einen beliebigen Oberkörper bezieht:

Hilfssatz: *Wenn K ein beliebiger zu k relativ-Abelscher Körper vom Relativgrad 2^u ist, so ist*

1. *für* $l_1 \neq 2$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = +1$, $(l_1) = \mathfrak{l}_1 s \mathfrak{l}_1$:
$$l_1 - 1 \equiv 0 \pmod{2^{\nu_1}},$$
falls 2^{ν_1} *der Grad der Trägheitsgruppe von* $\mathfrak{l}_1$ *ist;*

2. *für* $l_1 \neq 2$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = -1$:
$$l_1^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2^{\nu_1}},$$
falls 2^{ν_1} *der Grad der Trägheitsgruppe von* l_1 *ist;*

3. *für* $l_1 \neq 2$, $\left(\frac{d}{l_1}\right) = 0$: *die Relativdiskriminante zu* l_1 *prim.*

4. *für* $\left(\frac{d}{2}\right) = +1$, $(2) = \mathfrak{l} s \mathfrak{l}$: *die Verzweigungsgruppe von* $\mathfrak{l}$ *von der Form*
$$T^x T'^{x'} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq x < 2 \\ 0 \leqq x' < 2^{\nu'} \end{pmatrix};$$

5. *für* $\left(\frac{d}{2}\right) \neq +1$: *die Verzweigungsgruppe von* (2) *in der Form*
$$T'^{x'} T'^{x''} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq x' < 2^{\nu'} \\ 0 \leqq x'' < 2^{\nu''} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ist die Theorie von Kapitel III durchzuführen, unter Zugrundelegung des Äquivalenzbegriffes im engeren Sinne. Außerdem kann man jedem relativ-Abelschen Oberkörper K vom Relativgrad 2^u einen Führer $\mathfrak{f}$ zuordnen, der alle zu 2 primen, in der Relativdiskriminante enthaltenen Primideale $\mathfrak{l}_1$ einfach und jedes in 2 und der Relativdiskriminante enthaltene Primideal $\mathfrak{l}$ zur $2 + \nu^{\text{ten}}$ Potenz enthält, wenn ν die größere der Zahlen ν' und ν'' vom Hilfssatz ist. Damit ist die Theorie dieser allgemeinen Gleichungen erledigt.

Um die Anwendung dieser Entwicklung auf die Teilungskörper durchzuführen, muß deren Theorie besser bekannt sein, als dies bisher der Fall ist. Man weiß, daß die Teilungskörper in bezug auf den Klassenkörper $K(1)$ relativ-Abelsch sind, aber nicht, ob zu k relativ-Abelsch.*) Dagegen weiß man, daß die Primideale der Hauptstrahlklasse in Primideale 1. Grades im Teilungskörper zerfallen.**) Wenn also die Körperklassenzahl von k eins ist, kann man genau nach Kapitel IV den Satz beweisen:

*) Weber: Algebra III (1908), S. 576.

**) ibid. S. 596, Resultat 8.

Satz: *Die Relativdiskriminante des Teilungskörpers, der zum Führer* $\mathfrak{f}$ *gehört, enthält nur die Primideale von* $\mathfrak{f}$.

Damit ist dann auch der obige Hauptsatz genau wie in 2. zu beweisen.

Ist dagegen die Körperklassenzahl von k von eins verschieden, so verlangt die Untersuchung ein Eingehen auf die funktionentheoretische Seite des Problems. Diese Betrachtungen habe ich noch nicht durchgeführt, sie würden auch zu weit abseits führen. Ich werde dieses Problem in einem Teubnerschen Lehrbuche im Zusammenhange darstellen. Doch glaube ich, daß die zahlentheoretische Seite durch meine Entwicklungen ausreichend gefördert ist.

Karlsruhe, 5. Juni 1913.

Inhalt.