Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen und Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Reihe von Resultaten, die wir unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion beweisen können. Diese Vermutung lautet bekanntlich: *Alle nicht reellen Wurzeln von* $\zeta(s) = \zeta(\sigma + ti)$ *liegen auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$. Manche dieser Resultate tragen einen recht definitiven Charakter. Zu den wichtigsten Hilfsmitteln unserer Untersuchung gehört eine Methode, welche von Herrn Littlewood herrührt und von ihm in einer kurzen, aber sehr inhaltreichen Note publiziert worden ist.

Im folgenden werden wir mehrfach mit I, II, III, IV die Abhandlungen zitieren:

I) Bohr und Landau, *Über das Verhalten von* $\zeta(s)$ *und* $\zeta_\varkappa(s)$ *in der Nähe der Geraden* $\sigma = 1$ [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 303—330].

II) Landau, *Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 56 (1911), S. 125—148].

III) Bohr und Landau, *Über die Zetafunktion* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 278—285].

IV) Die oben erwähnte Note des Herrn Littlewood, *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan* $R(s) > \frac{1}{2}$ [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 154 (1912), S. 263—266].

Indem wir nunmehr die Hauptresultate der vorliegenden Abhandlung im voraus kurz erwähnen, wollen wir nochmals hervorheben, daß diese

Resultate sämtlich unter Annahme der Riemannschen Vermutung abgeleitet sind.

Im § 1 beweisen wir: *Es gibt eine positive absolute Konstante a mit folgender Eigenschaft. Für jedes* θ *der Strecke* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *und jedes reelle* τ *hat die Ungleichung*

$$|\log \zeta(s)| > (\log t)^{a\theta}$$

im Gebiete $\sigma \geqq 1 - \theta,\ t \geqq \tau$ *eine Lösung.*

Dies Resultat ist deshalb recht bemerkenswert, weil Herr Littlewood (IV) andererseits aus der Riemannschen Vermutung die Existenz einer positiven absoluten Konstanten b erschlossen hat, so daß für jedes θ der Strecke $0 < \theta < \frac{1}{2}$ im Gebiete $\sigma \geqq 1 - \theta$

$$\log \zeta(s) = o\left((\log t)^{b\theta}\right)$$

ist; für jedes $b > 2$ beweist er dies nämlich.

Es sei $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, welche dem Rechteck $0 \leqq \sigma \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq T$ angehören, und es werde

$$N(T) - \left(\frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} T\right) = P(T)$$

gesetzt. Dann ist (mag die Riemannsche Vermutung wahr sein oder nicht) bekanntlich (von Mangoldt, 1905)

$$P(T) = O(\log T).$$

Andererseits hat Landau (II) bewiesen, daß unter Annahme der Riemannschen Vermutung

$$P(T) \neq o(\log \log T)$$

und sogar

$$\liminf_{T=\infty} \frac{P(T)}{\log \log T} < 0 < \limsup_{T=\infty} \frac{P(T)}{\log \log T}$$

ist. Wir beweisen nunmehr in § 2 den weitergehenden Satz: *Es ist bei passender Wahl einer positiven absoluten Konstanten c*

$$P(T) \neq O((\log T)^c)$$

und sogar

$$\liminf_{T=\infty} \frac{P(T)}{(\log T)^c} = -\infty, \quad \limsup_{T=\infty} \frac{P(T)}{(\log T)^c} = \infty.$$

§ 3 enthält den Beweis des folgenden Satzes: *Bei jedem ganzzahligen* $\nu \geqq 1$ *ist auf der Geraden* $\sigma = 1$, *d. h. für* $s = 1 + ti$

$$\frac{d^\nu \log \zeta(s)}{ds^\nu} = O((\log \log t)^\nu).$$

Durch diesen Satz wird es uns gelingen, unter Annahme der Riemannschen Vermutung die „wahre Größenordnung" jeder der Funktionen $\frac{d^\nu \log \zeta(s)}{ds^\nu}$ (also speziell der Funktion $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$) auf der Geraden $\sigma = 1$ festzustellen; denn, wie in § 3 aus einem früher von uns (III) bewiesenen Satze leicht gefolgert werden wird, ist (mag die Riemannsche Vermutung richtig oder falsch sein) für jedes ganze $\nu \geqq 1$ auf der Geraden $\sigma = 1$

$$\frac{d^\nu \log \zeta(s)}{ds^\nu} \neq o((\log\log t)^\nu).$$

Im § 4 schließen wir aus den Ergebnissen des § 3 einen Satz über spezielle Diophantische Approximationen, in welchen die Primzahllogarithmen vorkommen.

Schließlich beweisen wir in § 5: *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$. *Dann nimmt* $\zeta(s)$ *im Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$ *jeden Wert außer* 0 *unendlich oft an.*

§ 1.

Für $\sigma > 1$ ist

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}}.$$

Da diese Funktion für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung besitzt, und da $(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ für positiv ins Unendliche wachsendes s den Limes 0 hat, gibt es eine positive absolute Konstante k_1 derart, daß für $s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{k_1}{s-1}$$

ist.

Desgleichen bezeichnen wir in der Folge mit $k_2, k_3, \ldots$ positive absolute Konstanten.

Hilfssatz 1: *Es gibt ein* k_2 *derart, daß die Ungleichung*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| > k_2 \log\log t$$

für jedes reelle τ *in der Viertelebene* $\sigma > 1$, $t > \tau$ *eine Lösung besitzt.*

Beweis: Vgl. I, § 9; II, § 5; III, § 2.

Zusatz: Wegen der für $\sigma > 1$ gültigen Abschätzung

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{k_1}{\sigma - 1}$$

ist in jedem Punkt, der die Bedingungen des Hilfssatzes 1 erfüllt, und für den $t \geqq 3$ ist,

$$1 < \sigma < 1 + \frac{k_1}{k_2 \log\log t}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes 1 wählen wir eine Punktmenge $\sigma_n + t_n i$ ($n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) derart, daß

$$t_n \geqq 3,$$
$$\lim_{n=\infty} t_n = \infty,$$
$$1 < \sigma_n < 1 + \frac{k_1}{k_2 \log\log t_n},$$
$$\left| \frac{\zeta'(\sigma_n + t_n i)}{\zeta(\sigma_n + t_n i)} \right| > k_2 \log\log t_n.$$

Wir erinnern nunmehr an den zuerst von Herrn Hadamard*) ohne Angabe seines Beweises**) ausgesprochenen Satz***):

Hilfssatz 2: *Es sei* $0 < r_1 < r_2 < r_3$. *Es sei* $F(s)$ *für* $|s - s_0| \leqq r_3$ *regulär. Es seien* M_1, M_2, M_3 *die Maxima von* $|F(s)|$ *auf den Kreisen* $|s - s_0| = r_1, r_2, r_3$. *Dann ist*

$$M_2^{\log \frac{r_3}{r_1}} \leqq M_1^{\log \frac{r_3}{r_2}} M_3^{\log \frac{r_2}{r_1}}.$$

Um in der Folge die Rechnungen durchsichtiger formulieren zu können, wollen wir auch den folgenden Hilfssatz 3 explizit aufschreiben, obgleich er ein unmittelbares Korollar des Hilfssatzes 2 ist.

Hilfssatz 3: *Es sei* $0 < r_1 < r_2 < r_3$. *Es sei* $F(s)$ *für* $|s - s_0| \leqq r_3$ *regulär. Es seien* M_1, M_2, M_3 *die Maxima von* $|F(s)|$ *auf den Kreisen*

*) *Sur les fonctions entières* [Bulletin de la Société mathématique de France **24** (1896), S. 186—187], S. 186.

**) Derselbe lautet, wie wir mit seiner Zustimmung erwähnen, etwa so: α sei irgend eine reelle Zahl. $\left|\frac{F(s)}{(s-s_0)^\alpha}\right|$ ist auf $|s - s_0| = r_1$ höchstens $\frac{M_1}{r_1^\alpha}$, auf $|s - s_0| = r_3$ höchstens $\frac{M_3}{r_3^\alpha}$, also überall im Kreisring $r_1 < |s - s_0| < r_3$ (weil ja jeder Zweig von $\frac{F(s)}{(s-s_0)^\alpha}$ an jeder Stelle des Ringes regulär ist) $\leqq \mathrm{Max.}\left(\frac{M_1}{r_1^\alpha}, \frac{M_3}{r_3^\alpha}\right)$. Daher ist

$$\frac{M_2}{r_2^\alpha} \leqq \mathrm{Max.}\left(\frac{M_1}{r_1^\alpha}, \frac{M_3}{r_3^\alpha}\right).$$

Wird im Falle $M_1 > 0$ (sonst ist der Satz trivial) speziell

$$\alpha = \log\frac{M_3}{M_1} : \log\frac{r_3}{r_1}$$

gesetzt, so ergibt sich

$$M_2 \leqq M_1 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\alpha$$
$$= M_1 \left(\frac{M_3}{M_1}\right)^{\log\frac{r_2}{r_1} : \log\frac{r_3}{r_1}},$$

wie behauptet. Vgl. auch die Fußnote auf S. 49—50 der während des Druckes dieser Arbeit erschienenen *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard*, Teil 2 (Paris, 1912).

***) In dessen Nutzbarmachung für die Zetafunktion liegt die Pointe der Littlewoodschen Untersuchung.

$s - s_0| = r_1, r_2, r_3$. *Es sei ferner* $r_3 < 2r_1$. *Dann ist für jede Zahl* M_1^*, *die zugleich* $\geqq 1$, $\geqq M_1$ *und* $\leqq M_2$ *ist,*

$$M_3 \geqq \left(\frac{M_2}{M_1^*}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1}}.$$

Beweis: Aus der Relation des Hilfssatzes 2 folgt wegen $M_1^* \geqq M_1$

$$M_2^{\log\frac{r_3}{r_1}} \leqq (M_1^*)^{\log\frac{r_3}{r_2}} M_3^{\log\frac{r_2}{r_1}},$$

also wegen $M_1^* \geqq 1$

$$M_2^{\log\frac{r_3}{r_1}} \leqq (M_1^*)^{\log\frac{r_3}{r_1}} M_3^{\log\frac{r_2}{r_1}},$$

$$M_3 \geqq \left(\frac{M_2}{M_1^*}\right)^{\log\frac{r_3}{r_1} : \log\frac{r_2}{r_1}}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{r_3 - r_1}{r_1} < 1,$$

also

$$\log\frac{r_3}{r_1} = \log\left(1 + \frac{r_3 - r_1}{r_1}\right)$$

$$> \frac{1}{2}\cdot\frac{r_3 - r_1}{r_1};$$

andererseits ist

$$\log\frac{r_2}{r_1} = \log\left(1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1}\right)$$

$$< \frac{r_2 - r_1}{r_1}.$$

Daher ist

$$\log\frac{r_3}{r_1} : \log\frac{r_2}{r_1} > \frac{1}{2}\cdot\frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1},$$

womit wegen $M_1^* \leqq M_2$ der Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Wir nehmen in der Folge an, daß die Riemannsche Vermutung richtig sei.

Hilfssatz 4: *Es gibt ein* k_3, *so daß für jedes* θ *der Strecke* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *und jedes reelle* τ *die Ungleichung*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| > (\log t)^{k_3\theta}$$

im Gebiet $\sigma \geqq 1 - \theta$, $t \geqq \tau$ *eine Lösung besitzt.*

Beweis: Wir können für alle hinreichend großen n den Hilfssatz 3 auf

$$F(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

$$s_0 = \frac{t_n}{2} + t_n i,$$

$$r_1 = \frac{t_n}{2} - \left(1 + \frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n}\right),$$

$$r_2 = \frac{t_n}{2} - \sigma_n,$$

$$r_3 = \frac{t_n}{2} - (1 - \theta),$$

$$M_1{}^* = \frac{k_2}{2} \log\log t_n$$

anwenden. Denn für alle hinreichend großen n ist nach Definition der Punkte $\sigma_n + t_n i$ erstens $0 < r_1 < r_2 < r_3 < 2r_1$, sowie $M_1{}^* \geqq 1$; zweitens $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ im Kreise $|s - s_0| \leqq r_3$ regulär, da dieser den Pol $s = 1$ nicht enthält und der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ angehört; drittens, da im Kreis $|s - s_0| \leqq r_1$ jede Abszisse $\geqq 1 + \frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n}$ ist,

$$\begin{aligned} M_1 &\leqq -\frac{\zeta'\left(1 + \frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n}\right)}{\zeta\left(1 + \frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n}\right)} \\ &< \frac{k_2}{2} \log\log t_n \\ &= M_1{}^*; \end{aligned}$$

viertens, da der Punkt $\sigma_n + t_n i$ auf dem Kreise $|s - s_0| = r_2$ liegt,

$$\begin{aligned} M_2 &> k_2 \log\log t_n \\ &> M_1{}^*. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Hilfssatzes 3 ergibt wegen

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{M_1{}^*} &> \frac{k_2 \log\log t_n}{\frac{k_2}{2} \log\log t_n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1} &= \frac{\theta + \frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n}}{1 + \frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n} - \sigma_n} \\ &> \frac{\theta}{\frac{2k_1}{k_2 \log\log t_n}} \\ &= \frac{k_2 \theta}{2k_1} \log\log t_n \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
M_3 &> 2^{\frac{k_2\theta}{4k_1}\log\log t_n} \\
&= (\log t_n)^{\frac{k_2\theta\log 2}{4k_1}} \\
&> (\log t_n)^{\frac{k_2\theta}{8k_1}}.
\end{aligned}
$$

Auf dem Kreise $|s-s_0| = r_3$ liegt daher ein Punkt, in welchem

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| > (\log t_n)^{\frac{k_2\theta}{8k_1}}$$

ist. Seine Abszisse ist $\geqq 1-\theta$; seine Ordinate t liegt zwischen $\frac{t_n}{2}+(1-\theta)$ und $\frac{3t_n}{2}-(1-\theta)$. Diese Ordinate t wird also mit n unendlich, und wegen $t_n > \frac{2}{3}t$ ist in jenem Punkte

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| > \left(\log\left(\frac{2}{3}t\right)\right)^{\frac{k_2\theta}{8k_1}},$$

also für alle hinreichend großen n

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| > (\log t)^{\frac{k_2\theta}{9k_1}}.$$

Diese Ungleichung gilt also bei gegebenem τ in einem passend wählbaren Punkte der Viertelebene $\sigma \geqq 1-\theta$, $t \geqq \tau$; die Zahl $\frac{k_2}{9k_1} = k_3$ erfüllt also, was im Hilfssatz 4 verlangt wird.

Wir gehen nunmehr zum Beweise des folgenden Satzes über, der das Hauptziel dieses Paragraphen bildet, und in dem, wie auch später, $\log\zeta(s)$ den in der von 1 bis $\frac{1}{2}$ aufgeschnittenen Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ regulären, für $s > 1$ reellen Zweig bedeutet.

Satz I: *Es gibt eine positive absolute Konstante a mit folgender Eigenschaft. Für jedes θ der Strecke $0 < \theta < \frac{1}{2}$ und jedes reelle τ hat die Ungleichung*

$$|\log\zeta(s)| > (\log t)^{a\theta}$$

im Gebiete $\sigma \geqq 1-\theta$, $t \geqq \tau$ eine Lösung.

Beweis: Wir bestimmen auf Grund des Hilfssatzes 4 eine Punktfolge $s_n = \sigma_n + t_n i$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$ ad inf.) derart, daß

$$\begin{cases} \sigma_n \geqq 1 - \frac{\theta}{2}, \\ t_n \geqq 2, \\ \lim\limits_{n=\infty} t_n = \infty, \\ \left| \frac{\zeta'(s_n)}{\zeta(s_n)} \right| > (\log t_n)^{k_3 \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

ist. Nun ist aber wegen

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{d \log \zeta(s)}{ds}$$

nach einer Cauchyschen Ungleichung

$$\left| \frac{\zeta'(s_n)}{\zeta(s_n)} \right| \leqq \frac{\text{Max. von } |\log \zeta(s)| \text{ für } |s - s_n| = \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}.$$

Es möge $|\log \zeta(s)|$ sein Maximum auf dem Kreis $|s - s_n| = \frac{\theta}{2}$ im Punkte $s' = \sigma' + t'i$ annehmen; dann ist $\sigma' \geqq 1 - \theta$, sowie für alle hinreichend großen n die Ordinate $t' \geqq t_n - \frac{\theta}{2} \geqq \tau$ und

$$\begin{aligned} |\log \zeta(s')| &> \frac{\theta}{2} (\log t_n)^{\frac{k_3 \theta}{2}} \\ &\geqq \frac{\theta}{2} \left(\log \left(t' - \frac{\theta}{2} \right) \right)^{\frac{k_3 \theta}{2}} \\ &> (\log t')^{\frac{k_3}{3} \theta}. \end{aligned}$$

Die Zahl $\frac{k_3}{3} = \alpha$ erfüllt also, was im Satze I verlangt wird.

§ 2.

Es habe $P(T)$ die in der Einleitung erklärte Bedeutung, und es sei die Riemannsche Vermutung wahr.

Satz II: *Es ist bei passender Wahl einer positiven absoluten Konstanten c*

$$P(T) \neq O((\log T)^c)$$

und sogar

$$\liminf_{T=\infty} \frac{P(T)}{(\log T)^c} = -\infty, \quad \limsup_{T=\infty} \frac{P(T)}{(\log T)^c} = \infty.$$

Beweis: Bekanntlich (vgl. z. B. II, §§ 1—2) ist für wachsendes, nur die Wurzelordinaten überspringendes T

$$P(T) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) + O(1),$$

wo $\operatorname{arc}\zeta(s)$ den Wert bezeichnet, der sich bei stetiger Fortsetzung längs der Ordinate T aus der Halbebene $\sigma > 1$ heraus ergibt, in der

$$\begin{aligned}\operatorname{arc}\zeta(s) &= \Im \log \zeta(s)\\ &= \Im \sum_{p,m} \frac{1}{m\,p^{ms}}\end{aligned}$$

ist. Es sei nun für alle hinreichend großen T

$$P(T) < k_4 (\log T)^c \text{ bzw. } -P(T) < k_4 (\log T)^c,$$

wo k_4 irgend eine absolute positive Konstante und c irgend eine absolute positive Konstante $< \frac{a}{6}$ bedeutet, a im Sinne des Satzes I genommen. Daraus werden wir einen Widerspruch zur Riemannschen Vermutung herleiten. Damit wird dann natürlich der Satz II bewiesen sein; c braucht in ihm ja nur z. B. die Zahl $\frac{a}{7}$ zu bezeichnen.

Unter der gemachten Annahme wäre für alle hinreichend großen wurzelfreien T

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) < k_5 (\log T)^c \text{ bzw. } -\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) < k_5 (\log T)^c.$$

Nun sei $\operatorname{arc}\zeta(s)$ in der Viertelebene $\sigma > \frac{1}{2}$, $t > 0$ durch stetige Fortsetzung definiert, auf der Halbgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$, $t > 0$ einschließlich der Wurzeln als Limes von rechts. Dann ist für alle hinreichend großen T

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) \leqq k_5 (\log T)^c \text{ bzw. } -\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) \leqq k_5 (\log T)^c;$$

denn in einer Wurzel $\frac{1}{2} + T_0 i$ ist bei positivem, zu Null abnehmendem ε

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + T_0 i\right) = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + (T_0 + \varepsilon)i\right) + \operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + (T_0 - \varepsilon)i\right)\right).$$

Für alle $T > 0$ ist daher

$$\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) < k_6 (\log(T+2))^c \text{ bzw. } -\operatorname{arc}\zeta\left(\frac{1}{2} + Ti\right) < k_6 (\log(T+2))^c.$$

Wir wählen eine absolute Konstante q, welche kleiner ist als die Ordinate der ersten Nullstelle in der oberen Halbebene und dem Intervall $0 < q < 2$ angehört. Aus der Viertelebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $t \geqq q$ schneiden wir jede Nullstelle $s_0 = \frac{1}{2} + T_0 i$ durch einen Halbkreis nach rechts (der s_0 zum Mittelpunkt hat) derart aus, daß erstens jeder Radius $< \frac{1}{6}$ ist, zweitens die Halbkreise sich nicht treffen, drittens der unterste nicht unter die

Ordinate q herunterreicht, und viertens auf jedem Halbkreis, wenn s'' der obere bzw. s' der untere Endpunkt ist,

$$\operatorname{arc}\zeta(s) < \operatorname{arc}\zeta(s'') + 1 \text{ bzw. } \operatorname{arc}\zeta(s) > \operatorname{arc}\zeta(s') - 1$$

ist. Es bezeichne G das Gebiet, welches aus dem Halbstreifen $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 4$, $t \geqq q$ durch Weglassung jener Halbkreise entsteht. $\log\zeta(s)$ ist in G (inkl. Rand) regulär. Auf dem linken Rand (inkl. der halben Kreisperipherieen) ist

$$\operatorname{arc}\zeta(s) < k_6\left(\log\left(t+2+\frac{2}{6}\right)\right)^c + 1 \text{ bzw. } -\operatorname{arc}\zeta(s) < k_6\,(\log(t+2))^c + 1,$$

d. h.

$$\Im\log\zeta(s) < k_7\,(\log(t+2))^c \text{ bzw. } -\Im\log\zeta(s) < k_7\,(\log(t+2))^c;$$

auf dem unteren und rechten Rand ist

$$|\Im\log\zeta(s)| < k_8.$$

Also ist auf dem ganzen Rand von G

$$\Im\log\zeta(s) < k_9\,(\log(t+2))^c \text{ bzw. } -\Im\log\zeta(s) < k_9\,(\log(t+2))^c.$$

Für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ ist bekanntlich bei wurzelfrei wachsendem t gleichmäßig

$$\Im\log\zeta(s) = O(\log t);$$

wegen der Annahme der Riemannschen Vermutung gilt dies also im Innern von G gleichmäßig bei stetig wachsendem t.

Nun werde

$$g(s) = e^{-i\log\zeta(s)} \text{ bzw. } g(s) = e^{i\log\zeta(s)}$$

gesetzt. Dann ist auf dem Rand von G

$$|g(s)| < e^{k_9(\log(t+2))^c},$$

im Innern

$$|g(s)| < e^{k_{10}\log(t+2)}.$$

Jetzt verstehen wir unter $\log s$ resp. $(\log s)^c$ den in der von 0 resp. 1 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene regulären Zweig, der für $s > 1$ positiv ist. Dann ist auf dem Rand von G und im Innern gleichmäßig

$$\log s = \log t + O(1),$$

$$(\log s)^c = (\log t)^c + O((\log t)^{c-1}).$$

Auf dem Rande und im Innern ist also durchweg

$$2(\log(t+2))^c + k_{11} > \Re\,(\log s)^c > \frac{1}{2}(\log(t+2))^c - k_{12}.$$

Wir setzen nun

$$h(s) = \frac{g(s)}{e^{2k_9(\log s)^c}};$$

dann ist auf dem Rande von G

$$\begin{aligned} |h(s)| &= \frac{|g(s)|}{e^{2k_9 \Re((\log s)^c)}} \\ &< e^{k_9(\log(t+2))^c - k_9(\log(t+2))^c + 2k_9 k_{12}} \\ &= k_{13}, \end{aligned}$$

im Innern

$$\begin{aligned} |h(s)| &< e^{k_{10}\log(t+2) - k_9(\log(t+2))^c + 2k_9 k_{12}} \\ &= O(t^{k_{10}}). \end{aligned}$$

Nach dem bekannten Satze der Herren Phragmén und Lindelöf (vgl. z. B. I, S. 316) ist daher im Innern

$$|h(s)| \leqq k_{13},$$

folglich

$$\begin{aligned} |g(s)| &= |h(s)|\, e^{2k_9 \Re((\log s)^c)} \\ &\leqq k_{13} e^{4k_9(\log(t+2))^c + 2k_9 k_{11}}, \end{aligned}$$

$$\Re \log g(s) < k_{14}(\log(t+2))^c.$$

Das bedeutet

$$\Im \log \zeta(s) < k_{14}(\log(t+2))^c \quad \text{bzw.} \quad -\Im \log \zeta(s) < k_{14}(\log(t+2))^c;$$

dies gilt in G, also speziell im Gebiet $\frac{2}{3} \leqq \sigma \leqq 4$, $t \geqq 2$.

Die Anwendung der bekannten Carathéodoryschen Ungleichung auf die Kreise mit dem Mittelpunkt $2 + ti$ und den Radien $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$ ergibt daher für $t \geqq \frac{10}{3}$ auf der geraden Strecke von $\frac{5}{6} + ti$ bis $2 + ti$

$$\begin{aligned} |\log \zeta(s)| &\leqq \log \zeta(2) + \log \zeta(2) \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{6}} + 2k_{14}\left(\log\left(t + 2 + \tfrac{4}{3}\right)\right)^c \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{6}} \\ &< k_{15}(\log t)^c. \end{aligned}$$

Folglich ist in der Viertelebene $\sigma \geqq \frac{5}{6}$, $t \geqq 2$

$$|\log \zeta(s)| < k_{16}(\log t)^c,$$

also wegen $c < \frac{a}{6}$ für alle hinreichend großen t und $\sigma \geqq \frac{5}{6}$

$$|\log \zeta(s)| < (\log t)^{a \cdot \frac{1}{6}},$$

im Widerspruch zu Satz I $\left(\text{nämlich bei der Wahl } \theta = \frac{1}{6}\right)$.

Damit ist der Satz II bewiesen.

§ 3.

Es sei ν eine ganze Zahl $\geqq 1$ und fest. Für $\sigma > 1$ ist

$$f_\nu(s) = (-1)^\nu \frac{d^\nu \log \zeta(s)}{d s^\nu}$$
$$= \sum_{p,\, m} \frac{m^{\nu-1} \log^\nu p}{p^{ms}}.$$

Da diese Funktion für $s = 1$ einen Pol ν^{ter} Ordnung besitzt, und für positiv unendlich werdendes s ihr Produkt mit $(s-1)^\nu$ gegen 0 strebt, so gibt es eine positive Konstante $K_1 = K_1(\nu)$ derart, daß für $s > 1$

$$f_\nu(s) < \frac{K_1}{(s-1)^\nu}$$

ist. Wir wollen nunmehr aus der Riemannschen Vermutung den folgenden Satz beweisen.

Satz III: *Bei jedem ganzzahligen $\nu \geqq 1$ ist auf der Geraden $\sigma = 1$, d. h. für $s = 1 + ti$*

$$\frac{d^\nu \log \zeta(s)}{d s^\nu} = O((\log \log t)^\nu).$$

Beweis: Aus der Riemannschen Vermutung folgt bekanntlich (vgl. z. B. IV) für $\sigma \geqq \frac{2}{3}$

$$\log \zeta(s) = O(\log t);$$

daher ist für $\sigma \geqq \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, da ja ν fest ist,

$$|f_\nu(s)| = \left| \frac{d^\nu \log \zeta(s)}{d s^\nu} \right|$$
$$\leqq \frac{\nu!\ \text{Max. von } |\log \zeta(s)| \text{ auf dem Kreis um } s \text{ mit dem Radius } \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^\nu}$$
$$= O(\log t).$$

Es werde nunmehr angenommen, der Satz III sei für ein ν falsch. Dann gäbe es eine unendliche Folge von Zahlen $t_n > 3$ mit $\lim_{n=\infty} t_n = \infty$ derart, daß die durch

$$|f_\nu(1 + t_n i)| = \alpha_n (\log \log t_n)^\nu$$

definierte Zahl α_n mit n ins Unendliche wächst.

Wir könnten alsdann für alle hinreichend großen n den Hilfssatz 3 auf

$$\begin{aligned}
F(s) &= f_\nu(s),\\
s_0 &= \frac{t_n}{2} + t_n i,\\
r_1 &= \frac{t_n}{2} - \left(1 + \frac{1}{\log\log t_n}\right),\\
r_2 &= \frac{t_n}{2} - 1,\\
r_3 &= \frac{t_n}{2} - \frac{5}{6},\\
M_1^* &= K_1 (\log\log t_n)^\nu
\end{aligned}$$

anwenden. Denn für alle hinreichend großen n ist erstens

$$0 < r_1 < r_2 < r_3 < 2r_1,$$

sowie $M_1^* > 1$; zweitens $f_\nu(s)$ im Kreise $|s - s_0| \leqq r_3$ regulär; drittens

$$\begin{aligned}
M_1 &\leqq f_\nu\left(1 + \frac{1}{\log\log t_n}\right)\\
&< K_1 (\log\log t_n)^\nu\\
&= M_1^*;
\end{aligned}$$

viertens, da der Punkt $1 + t_n i$ auf dem Kreise $|s - s_0| = r_2$ liegt,

$$\begin{aligned}
M_2 &\geqq \alpha_n (\log\log t_n)^\nu\\
&> K_1 (\log\log t_n)^\nu\\
&= M_1^*.
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{M_2}{M_1^*} \geqq \frac{\alpha_n}{K_1}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1} &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{\log\log t_n}}{\frac{1}{\log\log t_n}}\\
&> \frac{1}{6}\log\log t_n.
\end{aligned}$$

Der Hilfssatz 3 ergibt also für alle hinreichend großen n

$$\begin{aligned}
M_3 &> \left(\frac{\alpha_n}{K_1}\right)^{\frac{1}{12}\log\log t_n}\\
&= (\log t_n)^{\frac{1}{12}\log\frac{\alpha_n}{K_1}}.
\end{aligned}$$

Auf dem Kreis $|s - s_0| = r_3$ liegt daher ein Punkt, in welchem

$$|f_\nu(s)| > (\log t_n)^{\frac{1}{12}\log\frac{\alpha_n}{K_1}}$$

ist. Die Abszisse dieses Punktes ist $\geqq \frac{5}{6}$; seine Ordinate liegt zwischen $\frac{t_n}{2} + \frac{5}{6}$ und $\frac{3t_n}{2} - \frac{5}{6}$. Die Ordinate wird also mit n unendlich; wegen $t_n > \frac{2}{3}t$ ist in jenem Punkte

$$|f_\nu(s)| > \left(\log\left(\frac{2}{3}t\right)\right)^{\frac{1}{12}\log\frac{\alpha_n}{K_1}},$$

also für alle hinreichend großen n

$$|f_\nu(s)| > (\log t)^{\frac{1}{13}\log\frac{\alpha_n}{K_1}}.$$

Da aber α_n mit n ins Unendliche wächst, so widerspricht dies der obigen für $\sigma \geqq \frac{5}{6}$ gültigen Gleichung

$$f_\nu(s) = O(\log t).$$

Damit ist der Satz III bewiesen.

Durch diesen Satz III ist es uns, wie in der Einleitung erwähnt, gelungen, unter Annahme der Riemannschen Vermutung für alle $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ die wahre Größenordnung der Funktion $f_\nu(s) = (-1)^\nu \frac{d^\nu \log \zeta(s)}{ds^\nu}$ auf der Geraden $\sigma = 1$ festzustellen. Wir haben nämlich früher (III, § 2) bewiesen: Es ist für $\sigma > 1$

$$f_\nu(s) \neq o((\log\log t)^\nu);$$

d. h. es existiert ein $K_2 = K_2(\nu) > 0$ derart, daß die Ungleichung

$$|f_\nu(s)| > K_2 (\log\log t)^\nu$$

für jedes τ im Gebiete $\sigma > 1$, $t > \tau$ eine Lösung besitzt, und hieraus können wir durch die folgende (unserer älteren aus I, § 5 nachgebildete) Schlußweise ableiten, daß auch auf der Geraden $\sigma = 1$

$$f_\nu(s) \neq o((\log\log t)^\nu)$$

ist, genauer, daß

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|f_\nu(1+ti)|}{(\log\log t)^\nu} \geqq K_2$$

ist.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein $h < K_2$ derart, daß von einer gewissen Stelle an, d. h. für alle $t \geqq \tau$

$$|f_\nu(1+ti)| < h(\log\log t)^\nu$$

wäre. τ kann dabei > 3 angenommen werden. Wir betrachten alsdann im Gebiet $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq \tau$ die dort reguläre Funktion

$$g(s) = \frac{f_\nu(s)}{(\log\log s)^\nu}\,\frac{s}{s+\gamma};$$

hierbei bezeichnet $\log\log s$ den in der von 1 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene regulären Zweig, welcher für $s > 1$ reell ist, und γ ist eine so gewählte positive Konstante, daß auf der unteren Randstrecke $t = \tau$, $1 \leqq \sigma \leqq 2$ und dem rechten Rand $\sigma = 2$, $t \geqq \tau$

$$|g(s)| < h$$

ist. Auf dem linken Rand $\sigma = 1$, $t \geqq \tau$ wäre (nach der zu widerlegenden Annahme)

$$|f_\nu(s)| < h\,(\log\log t)^\nu,$$

also wegen der dort gültigen Ungleichung (vgl. z. B. I, § 5)

$$|\log\log s| > \log\log t$$

$$\begin{aligned} |g(s)| &< \frac{h\,(\log\log t)^\nu}{(\log\log t)^\nu}\,\frac{|\sigma+ti|}{|\sigma+\gamma+ti|} \\ &< h. \end{aligned}$$

Also ist auf dem ganzen Rande des Gebietes $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq \tau$

$$|g(s)| < h.$$

Für $1 \leqq \sigma \leqq 2$ ist gleichmäßig (vgl. I, § 5)

$$\lim_{t=\infty} \frac{|\log\log s|}{\log\log t} = 1.$$

Wegen der im Innern des Streifens gleichmäßig gültigen Relation

$$\begin{aligned} f_\nu(s) &= (-1)^\nu \frac{d^\nu \log\zeta(s)}{ds^\nu} \\ &= O(t) \end{aligned}$$

ist daher dort gleichmäßig

$$\begin{aligned} g(s) &= O\left(\frac{t}{(\log\log t)^\nu}\,\frac{t}{t}\right) \\ &= O(t). \end{aligned}$$

Der Phragmén-Lindelöfsche Satz ergibt also im Innern des Gebietes

$$|g(s)| \leqq h,$$

d. h.

$$|f_\nu(s)| \leqq h \left|\frac{s+\gamma}{s}\right| |\log\log s|^\nu.$$

Der Quotient der rechten Seite durch $(\log\log t)^\nu$ hat bei $t=\infty$ gleichmäßig für $1 \leqq \sigma \leqq 2$ den Limes h; also wäre gleichmäßig für $1 \leqq \sigma \leqq 2$

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|f_\nu(s)|}{(\log\log t)^\nu} \leqq h;$$

dies gälte also gleichmäßig für $\sigma > 1$, was wegen $h < K_2$ einen Widerspruch darstellt.

Also ist, wie behauptet,

$$f_\nu(1+ti) \neq o((\log\log t)^\nu).$$

Wir gehen nun zur Betrachtung der Größenordnung der Funktion $f_\nu(s) = (-1)^\nu \frac{d^\nu \log\zeta(s)}{ds^\nu}$ in der Halbebene $\sigma > 1$ über. Wie oben erwähnt, ist einerseits für $\sigma > 1$

$$f_\nu(s) \neq o((\log\log t)^\nu).$$

Andererseits folgt unmittelbar aus der für $\sigma = 1$ bewiesenen Abschätzung

$$f_\nu(s) = O((\log\log t)^\nu),$$

d. h. aus der für $t \geqq 3$ gültigen Ungleichung

$$|f_\nu(1+ti)| < K_3 (\log\log t)^\nu,$$

daß auch für $\sigma > 1$

$$f_\nu(s) = O((\log\log t)^\nu)$$

ist; denn sonst hätte die Ungleichung

$$|f_\nu(s)| > (K_3+1)(\log\log t)^\nu$$

bei jedem τ in der Viertelebene $\sigma > 1$, $t > \tau$ eine Lösung, und hieraus würde nach dem vorangehenden Beweis folgen, daß

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|f_\nu(1+ti)|}{(\log\log t)^\nu} \geqq K_3 + 1 > K_3$$

wäre.

Auch für $\sigma > 1$ gilt daher das oben für $\sigma = 1$ gefundene Resultat

$$\frac{d^\nu \log\zeta(s)}{ds^\nu} \begin{cases} = O((\log\log t)^\nu), \\ \neq o((\log\log t)^\nu). \end{cases}$$

§ 4.

In diesem Paragraphen wollen wir aus dem Resultate des § 3, also unter Voraussetzung der Riemannschen Vermutung, einen Satz über Diophantische Approximationen ableiten.

Es seien die N reellen Zahlen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N$, sowie die ganze Zahl $q > 1$ beliebig gegeben. Dann hat Kronecker bekanntlich bewiesen: Es gibt ein t im Intervall $1 \leqq t \leqq q^N$, welches nebst gewissen N ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots, g_N$ die N Ungleichungen

$$\begin{cases} |t\eta_1 - g_1| < \frac{1}{q}, \\ |t\eta_2 - g_2| < \frac{1}{q}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |t\eta_N - g_N| < \frac{1}{q} \end{cases}$$

befriedigt.

Durch Anwendung dieses Satzes auf den speziellen Fall

$$\begin{cases} \eta_n = \log p_n, \\ q = 6 \end{cases}$$

(wo p_n die n^{te} Primzahl bedeutet), wo also die Ungleichungen

$$|t \log p_n - g_n| < \frac{1}{6} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

durch ein t des Intervalls

$$1 \leqq t \leqq e^{\log 6 \cdot N}$$

(nebst zugehörigen ganzen g_n) befriedigt werden, haben wir in einer früheren Arbeit (III, § 2) das schon oben erwähnte Resultat bewiesen: Es ist für $\sigma > 1$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \neq o(\log\log t).$$

Nun haben wir in § 3 der gegenwärtigen Abhandlung andererseits aus der Riemannschen Vermutung abgeleitet: Es ist für $\sigma > 1$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log\log t).$$

Wir wollen nunmehr umgekehrt aus diesem Resultate über die Zetafunktion einen Satz über die obigen speziellen Diophantischen Ungleichungen herleiten, nämlich den

Satz IV: *Es gibt zwei positive absolute Konstanten a_1 und a_2 mit folgender Eigenschaft. Wenn die N Diophantischen Ungleichungen*

$$|t \log p_n - g_n| < \frac{1}{6} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

durch die Zahl $t \geqq 1$ befriedigt werden, ist

$$t > e^{a_1 N^{a_2}}.$$

Vorbemerkung: Die obigen N Diophantischen Ungleichungen, welche nach Kronecker für **alle** N eine Lösung im Intervalle $1 \leqq t \leqq e^{\log 6 \cdot N^1}$ besitzen, haben also, wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, für kein N eine Lösung im Intervalle $1 \leqq t \leqq e^{a_1 N^{a_2}}$.

Beweis: Es ist für $\sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}}$$

$$= \sum_p \frac{\log p}{p^s} + D(s),$$

wo $D(s)$ eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe ist; speziell ist also für $\sigma > 1$

$$D(s) = O(1).$$

Es sei der Satz IV falsch. Dann würde offenbar zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl $N = N(\varepsilon) \geqq 2$ derart existieren, daß die N Diophantischen Ungleichungen

$$|t \log p_n - g_n| < \frac{1}{6} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

durch ein t des Intervalles $1 \leqq t \leqq \frac{1}{2\pi} e^{N^\varepsilon}$ erfüllt sind. [Denn sonst hätte ein gewisses $\varepsilon = \varepsilon_0$ die Eigenschaft: Für alle $N \geqq 2$ ist jedes $t \geqq 1$, das jene N Ungleichungen befriedigt, $> \frac{1}{2\pi} e^{N^{\varepsilon_0}}$; für alle hinreichend großen N (d. h. für $N \geqq N_1$) ist jenes t folglich $> e^{N^{\frac{\varepsilon_0}{2}}}$; bei passender Wahl eines $a_1 > 0$ wäre also für alle $N \geqq 1$ jenes t (da $t = 1$ offenbar wegen $\log 2 = 0{,}6 \cdots$ nicht zulässig ist) $> e^{a_1 N^{\frac{\varepsilon_0}{2}}}$; die Zahlen a_1 und $a_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}$ würden also den Satz befriedigen.]

Wir werden zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch mit dem Resultate

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log \log t) \qquad (\text{für } \sigma > 1)$$

des § 3 führt, d. h. zu einem Widerspruch mit der Relation

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s} = O(\log \log t) \qquad (\text{für } \sigma > 1).$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Die ganze Zahl $N = N(\varepsilon) \geqq 2$ und das $t = t_0 = t_0(N) = t_0(\varepsilon)$ auf der Strecke $1 \leqq t \leqq \frac{1}{2\pi} e^{N^\varepsilon}$ seien so gewählt, daß

$$|t_0 \log p_n - g_n| < \frac{1}{6} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

ist. Wir setzen alsdann $t_1 = t_1(\varepsilon) = 2\pi t_0$; dann ist für $1 \leqq n \leqq N$

$$|t_1 \log p_n - 2\pi g_n| < \frac{\pi}{3},$$

also

$$\cos(t_1 \log p_n) > \frac{1}{2}.$$

Es sei δ eine positive Zahl, über die wir später noch verfügen we den; wir betrachten die Funktion

$$f(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^s}$$

im Punkte $1 + \delta + t_1 i$, wo t_1 das obige $t_1(\varepsilon)$ bedeutet. Dann ergibt si

$$\begin{aligned}
|f(1+\delta+t_1 i)| &= \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta+t_1 i}} \right| \\
&\geqq \left| 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta+t_1 i}} \right| - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta+t_1 i}} \right| \\
&\geqq 1 + \Re \sum_{n=1}^{N} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta+t_1 i}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta+t_1 i}} \right| \\
&> \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}} \cos(t_1 \log p_n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}} \\
&> \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}}\right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}}\right) - \frac{3}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}}.
\end{aligned}$$

Nun ist für $\delta > 0$ bei passender Wahl einer positiven absoluten Kon stanten $a_3 < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^{1+\delta}} > \frac{a_3(1+\delta)}{\delta}$$

und nach Tschebyschef für $x \geqq 1$ bei passender Wahl eines $a_4 > 1$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p < a_4 x.$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
|f(1+\delta+t_1 i)| &> \frac{a_3(1+\delta)}{2\delta} - \frac{3}{2}\sum_{\nu=p_N+1}^{\infty}\frac{\vartheta(\nu)-\vartheta(\nu-1)}{\nu^{1+\delta}}\\
&= \frac{a_3(1+\delta)}{2\delta} - \frac{3}{2}\sum_{\nu=p_N}^{\infty}\vartheta(\nu)\left(\frac{1}{\nu^{1+\delta}}-\frac{1}{(\nu+1)^{1+\delta}}\right)+\frac{3}{2}\frac{\vartheta(p_N)}{p_N^{1+\delta}}\\
&> \frac{a_3(1+\delta)}{2\delta} - \frac{3}{2}\sum_{\nu=p_N}^{\infty}a_4\nu(1+\delta)\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{du}{u^{2+\delta}}\\
&> \frac{a_3(1+\delta)}{2\delta} - \frac{3a_4(1+\delta)}{2}\int_{p_N}^{\infty}\frac{du}{u^{1+\delta}}\\
&= \frac{a_3(1+\delta)}{2\delta} - \frac{3a_4(1+\delta)}{2\delta}\frac{1}{p_N^{\delta}}\\
&= \frac{a_3(1+\delta)}{4\delta}\left(2-\frac{6a_4}{a_3p_N^{\delta}}\right),\\
&> \frac{a_3(1+\delta)}{4\delta}\left(2-\frac{6a_4}{a_3N^{\delta}}\right),
\end{aligned}$$

also

$$|f(1+\delta+t_1 i)| > \frac{a_3}{4\delta}\left(2-\frac{6a_4}{a_3N^{\delta}}\right).$$

Nunmehr wählen wir $\delta=\delta(N)=\delta(\varepsilon)$ so, daß

$$N^{\delta}=\frac{6a_4}{a_3}$$

ist; d. h. wir setzen

$$\delta=\frac{\log(6a_4)-\log a_3}{\log N},$$

was >0 ist. Für dies δ ist

$$\begin{aligned}
|f(1+\delta+t_1 i)| &> \frac{a_3}{4\delta}\\
&= a_5\log N,
\end{aligned}$$

wo a_5 eine positive absolute Konstante ist.

Wegen

$$2\pi \leqq t_1 \leqq e^{N^{\varepsilon}}$$

ist

$$\log\log t_1 \leqq \varepsilon\log N,$$

also

$$|f(1+\delta+t_1 i)| > \frac{a_5}{\varepsilon}\log\log t_1.$$

Für jedes $\varepsilon>0$ ist also die Ungleichung

$$|f(s)| > \frac{a_5}{\varepsilon}\log\log t$$

im Gebiete $\sigma > 1$, $t \geqq 2\pi$ lösbar, was mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_n}{p_n^s} = O(\log\log t) \qquad (\text{für } \sigma > 1)$$

in Widerspruch steht.

§ 5.

Es werde wie bisher angenommen, daß die Riemannsche Vermutung wahr sei.

Für jedes $\sigma' > \frac{1}{2}$ ist bekanntlich, wie schon erwähnt, in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'$ gleichmäßig

$$\log \zeta(s) = O(\log t).$$

Herr Littlewood (IV) hat für $\frac{1}{2} < \sigma' \leqq 1$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'$ sogar mit jedem $\varepsilon > 0$

$$\log \zeta(s) = O((\log t)^{2(1-\sigma')+\varepsilon})$$

bewiesen, während für $\sigma' > 1$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'$

$$\log \zeta(s) = O(1)$$

trivial ist. Andererseits haben wir in § 1 die Existenz einer positiven absoluten Konstanten a bewiesen, sodaß für $\frac{1}{2} < \sigma' < 1$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'$

$$\log \zeta(s) \neq o((\log t)^{a(1-\sigma')})$$

ist; für $\sigma' \geqq 1$ ist in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'$ bekanntlich*)

$$\log \zeta(s) \neq o(1).$$

Wir definieren nunmehr $\nu = \nu(\sigma')$ für $\sigma' > \frac{1}{2}$ als untere Grenze der $\varkappa$, für welche in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'$

$$\log \zeta(s) = O((\log t)^{\varkappa})$$

ist; nach dem Gesagten ist ν für jedes $\sigma' > \frac{1}{2}$ eine endliche Zahl derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\log \zeta(s) = O((\log t)^{\nu+\varepsilon})$$

und

$$\log \zeta(s) \neq O((\log t)^{\nu-\varepsilon})$$

ist; für $\sigma' \geqq 1$ ist nach dem Obigen

$$\nu(\sigma') = 0,$$

---

*) Denn sonst wäre $\lim\limits_{t=\infty} \log \zeta(\sigma' + 1 + ti) = 0$, also $\lim\limits_{t=\infty} \zeta(\sigma' + 1 + ti) = 1$, während aus der Beweismethode des § 1 der Arbeit I sofort

$$\limsup_{t=\infty} |\zeta(\sigma' + 1 + ti)| = \zeta(\sigma' + 1) > 1$$

folgt.

während für $\frac{1}{2} < \sigma' < 1$ nach dem Obigen

$$\nu(\sigma') > 0$$

ist und die Ungleichungen

$$a(1-\sigma') \leqq \nu(\sigma') \leqq 2(1-\sigma')$$

erfüllt. Offenbar nimmt $\nu(\sigma')$ mit wachsendem σ' niemals zu.

Wir behaupten nunmehr den

Hilfssatz 5: *Die für $\sigma' > \frac{1}{2}$ definierte Funktion $\nu(\sigma')$ ist eine konvexe Funktion.*

Vorbemerkung: Die Behauptung lautet: Wenn $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ und dabei $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ ist, so ist

$$\nu(\sigma_2) \leqq \frac{1}{2}(\nu(\sigma_1) + \nu(\sigma_3)).$$

Beweis: Wir wenden den Hilfssatz 2 für alle $t > 2\sigma_3$ an auf:

$$F(s) = \log \zeta(s),$$

$$s_0 = \frac{t}{2} + ti,$$

$$r_1 = \frac{t}{2} - \sigma_3,$$

$$r_2 = \frac{t}{2} - \sigma_2,$$

$$r_3 = \frac{t}{2} - \sigma_1.$$

Die Voraussetzungen jenes Hilfssatzes sind offenbar erfüllt, da

$$0 < r_1 < r_2 < r_3$$

ist, und der Kreis $|s - s_0| \leqq r_3$ den Punkt 1 nicht enthält. Wegen der für jedes $\varepsilon > 0$ gültigen Relationen

$$M_1 = O\left(\left(\log\left(t + \frac{t}{2} - \sigma_3\right)\right)^{\nu(\sigma_3)+\varepsilon}\right)$$
$$= O((\log t)^{\nu(\sigma_3)+\varepsilon})$$

und

$$M_3 = O\left(\left(\log\left(t + \frac{t}{2} - \sigma_1\right)\right)^{\nu(\sigma_1)+\varepsilon}\right)$$
$$= O((\log t)^{\nu(\sigma_1)+\varepsilon})$$

ist nach Hilfssatz 2

$$M_2 \leqq M_1^{\log\frac{r_3}{r_2}:\log\frac{r_3}{r_1}} M_3^{\log\frac{r_2}{r_1}:\log\frac{r_3}{r_1}}$$
$$= O\left((\log t)^{(\nu(\sigma_3)+\varepsilon)\frac{\log\frac{r_3}{r_2}}{\log\frac{r_3}{r_1}} + (\nu(\sigma_1)+\varepsilon)\frac{\log\frac{r_2}{r_1}}{\log\frac{r_3}{r_1}}}\right)$$

Nun ist aber wegen

$$\lim_{t=\infty} \frac{r_3 - r_2}{r_2} = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{r_2 - r_1}{r_1} = 0$$

und

$$\lim_{t=\infty} \frac{r_3 - r_1}{r_1} = 0$$

einerseits

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log \frac{r_3}{r_2}}{\log \frac{r_3}{r_1}} = \lim_{t=\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{r_3 - r_2}{r_2}\right)}{\log\left(1 + \frac{r_3 - r_1}{r_1}\right)}$$

$$= \lim_{t=\infty} \frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$= \frac{1}{2},$$

andererseits

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log \frac{r_2}{r_1}}{\log \frac{r_3}{r_1}} = \lim_{t=\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1}\right)}{\log\left(1 + \frac{r_3 - r_1}{r_1}\right)}$$

$$= \lim_{t=\infty} \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}$$

$$= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$M_2 = O\left((\log t)^{(\nu(\sigma_3)+\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) + (\nu(\sigma_1)+\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\right),$$

also bei jedem $\varepsilon > 0$

$$M_2 = O\left((\log t)^{\frac{1}{2}(\nu(\sigma_1)+\nu(\sigma_3))+\varepsilon}\right);$$

speziell auf der Strecke $\sigma_2 + ti$ bis $2 + ti$ ist also gleichmäßig

$$\log \zeta(s) = O\left((\log t)^{\frac{1}{2}(\nu(\sigma_1)+\nu(\sigma_3))+\varepsilon}\right).$$

Dies gilt also in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_2$ gleichmäßig, womit

$$\nu(\sigma_2) \leqq \frac{1}{2}(\nu(\sigma_1) + \nu(\sigma_3))$$

bewiesen ist.

Aus dem bewiesenen Hilfssatze 5 folgt nach einem bekannten Satze über konvexe Funktionen, daß $\nu(\sigma')$ für $\sigma' > \frac{1}{2}$ stetig ist. Außerdem ist für $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$

$$\nu(\sigma_1) > \nu(\sigma_2);$$

denn aus der Konvexität folgt

$$\nu(\sigma_2) \leqq \frac{1-\sigma_2}{1-\sigma_1}\,\nu(\sigma_1) + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{1-\sigma_1}\,\nu(1);$$

wegen $\nu(1) = 0 < \nu(\sigma_1)$ ist daher

$$\nu(\sigma_2) < \nu(\sigma_1).$$

Dies letzte Resultat (nämlich, daß das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist) wird für das Folgende von ausschlaggebender Bedeutung sein.

Hilfssatz 6: *Es sei* $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$. *Dann gibt es eine Zahl* $\psi = \psi(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ *mit folgenden Eigenschaften. In der Viertelebene* $\sigma \geqq \sigma_2$, $t \geqq 3$ *ist bei passender Wahl einer konstanten, d. h. von* σ *und* t *nicht abhängigen positiven Größe* $K = K(\sigma_2, \psi)$

$$|\zeta(s)| < e^{K(\log t)^{\psi}},$$

während für kein $k > 0$ *in der Viertelebene* $\sigma \geqq \sigma_1$, $t \geqq 3$ *durchweg*

$$|\zeta(s)| < e^{k(\log t)^{\psi}}$$

ist.

Beweis: Wir werden zeigen, daß die Zahl

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\nu(\sigma_2) + \nu\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\right)$$

diese Eigenschaft hat.

Wegen

$$\psi > \nu(\sigma_2)$$

ist für $\sigma \geqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$\log \zeta(s) = O((\log t)^{\psi}),$$

also bei passender Wahl von K für $\sigma \geqq \sigma_2$, $t \geqq 3$

$$|\log \zeta(s)| < K(\log t)^{\psi},$$

$$|\zeta(s)| \leqq e^{|\log \zeta(s)|} < e^{K(\log t)^{\psi}}.$$

Andererseits ist für $\sigma \geqq \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ wegen

$$\psi < \nu\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)$$

$$\log \zeta(s) \neq O((\log t)^{\psi});$$

zu jedem $k' > 0$ existiert daher eine Zahl $\sigma' + t'i$ derart, daß

$$\begin{cases} 2 > \sigma' \geqq \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \\ t' \geqq 7 \\ |\log \zeta(s')| > k' (\log t')^{\psi} \end{cases}$$

ist. Wir wenden nun die Carathéodorysche Ungleichung

$$|F(s)| \leqq \frac{2r}{r - \varrho} |F(s_0)| + 2A \frac{\varrho}{r - \varrho},$$

wo A das Maximum von $\Re F(s)$ für $|s - s_0| = r$ bedeutet, auf die Funktion $F(s) = \log \zeta(s)$ und die Kreise mit dem Mittelpunkt $s_0 = 2 + t'i$ und den Radien $\varrho = 2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ und $r = 2 - \sigma_1$ an. Dann ergibt sich für $|s - s_0| \leqq \varrho$, also speziell im Punkte $s = \sigma' + t'i$

$$\begin{aligned} A &\geqq \frac{r - \varrho}{2\varrho} |F(s)| - \frac{r}{\varrho} |F(s_0)| \\ &> \frac{r - \varrho}{2\varrho} k' (\log t')^{\psi} - \frac{r}{\varrho} \log \zeta(2). \end{aligned}$$

Es liegt also auf dem Kreise $|s - s_0| = r$ ein Punkt $\sigma'' + t''i$ derart, daß

$$\Re \log \zeta(\sigma'' + t''i) > \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(4 - \sigma_1 - \sigma_2)} k' (\log t')^{\psi} - \frac{2(2 - \sigma_1)}{4 - \sigma_1 - \sigma_2} \log \zeta(2)$$

ist; seine Abszisse σ'' ist $\geqq \sigma_1$; seine Ordinate t'' ist $\geqq t' - (2 - \sigma_1)$ und $\leqq t' + (2 - \sigma_1)$. Es ist daher $t'' > t' - 2 \geqq 5$ und $t' > t'' - 2$. Zu jedem $k' > 0$ gibt es also einen Punkt $\sigma'' + t''i$ derart, daß $\sigma'' \geqq \sigma_1$, $t'' > 5$ und

$$\Re \log \zeta(\sigma'' + t''i) > c_1 k' (\log (t'' - 2))^{\psi} - c_2$$

ist, wo $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ nur von σ_1 und σ_2, nicht von k' abhängen. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß es zu jedem $k > 0$ einen Punkt $s = \sigma + ti$ im Gebiete $\sigma \geqq \sigma_1$, $t \geqq 3$ derart gibt, daß

$$\Re \log \zeta(s) > k (\log t)^{\psi},$$

d. h.

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= e^{\Re \log \zeta(s)} \\ &> e^{k (\log t)^{\psi}} \end{aligned}$$

ist. Damit ist der Hilfssatz 6 bewiesen.

Wir gelangen nunmehr aus der Riemannschen Vermutung zu dem wichtigen

Satz V: *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$. *Dann nimmt* $\zeta(s)$ *im Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$ *jeden Wert außer* 0 *unendlich oft an.*

Beweis: Es ist also zu beweisen, daß bei gegebenem $\tau \geqq 3$ die Funktion $\zeta(s)$ im Gebiete $\alpha < \sigma < \beta$, $t > \tau$ jeden Wert außer 0 annimmt.

Nach dem Hilfssatz 6 gibt es eine Konstante

$$\psi = \psi\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

derart, daß bei passender Wahl von $K > 0$ im Gebiete $\sigma \geqq \frac{\alpha+\beta}{2}$, $t \geqq 3$

$$|\zeta(s)| < e^{K(\log t)^\psi}$$

ist, während es keine Konstante $k > 0$ gibt, sodaß im Gebiete

$$\sigma \geqq \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4}, \quad t \geqq 3$$

durchweg

$$|\zeta(s)| < e^{k(\log t)^\psi}$$

ist.

Wir erinnern nunmehr an den folgenden von Landau herrührenden, funktionentheoretischen Hilfssatz (I, § 6): *Es sei $F(s)$ für $|s-s_0| < r$ regulär, $\neq a$ und $\neq b$, wo a und b zwei verschiedene Konstanten sind. Es sei $0 < \vartheta < 1$. Dann ist für $|s-s_0| \leqq \vartheta r$*

$$|F(s)| < e^{\frac{D \log(|F(s_0)|+2)}{1-\vartheta}},$$

wo $D = D(a, b)$ bei festen a, b eine positive absolute Konstante ist, d. h. nicht von $F(s)$, s_0, r, ϑ abhängt.

Es werde angenommen, der Satz V sei falsch; dann gäbe es zwei Zahlen $a = 0$ und $b \neq 0$ derart, daß für $\alpha < \sigma < \beta$, $t > \tau$ beständig

$$\zeta(s) \neq a$$

und

$$\zeta(s) \neq b$$

ist. Wir wenden nun den genannten Hilfssatz an auf: Die Funktion

$$F(s) = \zeta(s),$$

den Punkt

$$s_0 = \frac{\alpha+\beta}{2} + ti,$$

wo $t \geqq \tau + \frac{\beta-\alpha}{2}$ ist, den Kreis

$$|s-s_0| < \frac{\beta-\alpha}{2} = r$$

und die Zahl

$$\vartheta = \frac{1}{2}.$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind, da das Kreisinnere $|s-s_0| < r$ dem Gebiete $\alpha < \sigma < \beta$, $t > \tau$ angehört, offenbar erfüllt. Der Hilfssatz ergibt also für $|s-s_0| \leqq \vartheta r = \frac{\beta-\alpha}{4}$, also insbesondere auf der horizontalen Strecke $\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4} + ti$ bis $\frac{\alpha+\beta}{2} + ti$ die Abschätzung

$$|\zeta(s)| < e^{2D\log(|\zeta(s_0)|+2)}.$$

Bei Benutzung der für $\sigma \geqq \frac{\alpha+\beta}{2}$, $t \geqq 3$, also insbesondere für $\sigma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $t \geqq \tau + \frac{\beta-\alpha}{2}$ gültigen Ungleichung

$$|\zeta(s)| < e^{K(\log t)^{\psi}}$$

ergibt sich also im Gebiet

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad t \geqq \tau + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\zeta(s)| &< e^{2D\log\left(e^{K(\log t)^{\psi}}+2\right)} \\ &< e^{K_1(\log t)^{\psi}},\end{aligned}$$

wo K_1, sowie in der Folge K_2 und K_3 positiv ist und nicht von s abhängt. Hieraus folgt unmittelbar, daß für $\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}$, $t \geqq 3$

$$|\zeta(s)| < e^{K_2(\log t)^{\psi}}$$

ist. Weil aber für $\sigma \geqq \frac{\alpha+\beta}{2}$, $t \geqq 3$

$$|\zeta(s)| < e^{K(\log t)^{\psi}}$$

ist, so ergibt sich schließlich für $\sigma \geqq \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4}$, $t \geqq 3$

$$|\zeta(s)| < e^{K_3(\log t)^{\psi}}$$

im Gegensatz zu der Tatsache, daß für kein $k > 0$ im Gebiet $\sigma \geqq \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4}$, $t \geqq 3$

$$|\zeta(s)| < e^{k(\log t)^{\psi}}$$

ist.

Damit ist der Satz V bewiesen. Er lehrt offenbar, daß unter Annahme der Riemannschen Vermutung $\zeta(s)$ für jedes $\varepsilon > 0$ im Gebiet $\frac{1}{2} \leqq \sigma < \frac{1}{2} + \varepsilon$ sämtliche Werte unendlich oft annimmt.

Schluß.

Aus den Betrachtungen der vorliegenden Abhandlung wollen wir noch eine neue Eigenschaft der Zetafunktion folgern, die sicher richtig ist, mag die Riemannsche Vermutung wahr oder falsch sein: *Es existiert eine reelle Konstante c derart, daß $\zeta(s)$ für jedes $\varepsilon > 0$ im Streifen $c - \varepsilon < \sigma < c + \varepsilon$ jeden Wert unendlich oft annimmt.* In der Tat sei θ diejenige Zahl $\geqq \frac{1}{2}$, für welche $\zeta(s)$ bei jedem $\varepsilon > 0$ zwar in der Halbebene $\sigma > \theta - \varepsilon$ unendlich viele Nullstellen hat, in der Halbebene $\sigma > \theta + \varepsilon$ dagegen nicht;

wir behaupten, daß $c = \theta$ die erwähnte Eigenschaft hat. Denn entweder ist $\theta < 1$; dann erhält die Beweismethode der §§ 1 und 5 offenbar, daß $\zeta(s)$ im Streifen $\theta + \frac{\varepsilon}{2} < \sigma < \theta + \varepsilon$ jeden Wert außer 0 unendlich oft annimmt, und die Behauptung ist richtig. Oder es ist $\theta = 1$; dann folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar daraus, daß Bohr (*Über das Verhalten von* $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$ [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1911, S. 409—428]) bewiesen hat: $\zeta(s)$ nimmt für $1 < \sigma < 1 + \varepsilon$ jeden Wert außer 0 unendlich oft an.

Göttingen, den 12. November 1912.