

## Über geometrische Wahrscheinlichkeit und über das Axiom der beschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen.

Von

FELIX BERNSTEIN in Göttingen.

Gelegentlich des Beweises eines Satzes, dessen ich in meiner Arbeit „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der Säkularstörungen herrührendes Problem“ (Math. Ann. 71, S. 417—439) bedurfte, habe ich bemerkt, daß derselbe zum Teil in Übereinstimmung, zum Teil in Widerspruch mit einem Satz von E. Borel sich befände, und einen Einwand gegen den Beweis von E. Borel formuliert. Ich werde in dankenswerter Weise darauf aufmerksam gemacht, daß der Widerspruch der Behauptungen nur scheinbar ist.\*) Andererseits bleibt mein Einwand gegen den Beweis von E. Borel, der darin bestand, daß bei der Anwendung des Theorems der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit die wichtige Tatsache der Abhängigkeit der vorliegenden Wahrscheinlichkeiten übersehen sei, unverändert bestehen.

Bezüglich der Autorschaft dieser Wahrscheinlichkeitssätze möchte ich noch bemerken, daß, wie ich nachträglich gefunden habe, die fraglichen Sätze bereits von Gylden, Brodén und Wiman behauptet worden sind (vgl. insbes. Wiman, Öfersigt af K. Sv. Vet. Akad. Förh. 1900, S. 829). Freilich können die Beweisversuche von Gylden und Brodén keinen Anspruch auf Strenge machen. Dagegen hat, wie ich jetzt sehe, Wiman, dem man überhaupt die Begründung der mengentheoretischen Wahrscheinlichkeit verdankt, am Schluß der zitierten Abhandlung (S. 840) einen einwandfreien Beweis des einen Teiles des in Rede stehenden Satzes (nämlich für den Fall der Konvergenz von  $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ ) gegeben, der von dem meinigen verschieden ist, und denselben ebenfalls auf ein Problem der Störungstheorie anknüpfend an Gylden angewendet. Die Anwendung auf Störungstheorie, die sich in meiner

\*) Er beruht auf verschiedenem Gebrauch der Wendung „von einem gewissen  $n$  an“. Ich beziehe mich damit auf eine Gesamtheit  $M_n$ , die einem gewissen  $n$  entspricht, während E. Borel eine Gesamtheit  $M_\infty$  im Auge hat, für die es ein solches  $n$  gibt, daß von diesem an eine gewisse Eigenschaft erfüllt ist.  $M_{n+1}$  umfaßt  $M_n$ , und  $M_\infty$  ist die kleinste Menge, die alle  $M_n$  umfaßt.

Arbeit befindet, benutzt übrigens gerade den anderen, von mir zuerst streng bewiesenen, Teil des fraglichen Wahrscheinlichkeitssatzes.

Ich möchte diese Gelegenheit benutzen, um zugleich auf die Bemerkungen, welche P. Bohl zu dem von mir aufgestellten Axiom der beschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen gemacht hat, in einigen Punkten einzugehen.

Der sachliche Tatbestand ist dieser, daß bei dem vorliegenden mechanischen System der Eintritt einer bestimmten Erscheinung — der mittleren Bewegung — an die notwendige Bedingung geknüpft ist, daß die Werte der Parameter einer gewissen Nullmenge angehören. Setzen wir nun den Fall, daß bei der Beobachtung der Bewegung des Erdperihels z. B. festgestellt worden wäre, daß dasselbe etwa stets nur um  $\pm 1^\circ$  um eine gleichförmige Bewegung schwanke, so würde nach einer Auffassung, die der von P. Bohl geäußerten entspricht, angenommen werden, daß solche Verhältnisse bei der Entstehung des Planetensystems obgewaltet hätten, daß den Parametern gewisse Spezialwerte (in der Nullmenge) zuerteilt wurden, welche die beobachtete Bewegung zur Folge haben mußten. Das von mir aufgestellte Axiom verwirft eine solche Annahme, weil sie arithmetische Genauigkeit von Beobachtungsdaten impliziert, und würde fordern, den Lagrangeschen Ansatz\*) überhaupt als unzureichend anzusehen, die gemachte Beobachtung zu erklären. Es würde daher verlangen, daß man andere unbekanntere Ursachen entdecke, deren Wirkung darin bestehen würde, ständig die Bewegung des Erdperihels in jenen als beobachtet\*\*) angenommenen Grenzen zu halten. Auf diese heuristische Seite des Prinzips möchte ich den Hauptwert legen. Andererseits bezeichnet das Prinzip auch zugleich die Grenze, bis zu der die arithmetische Analyse der Punktmenge noch eine physikalische Bedeutung besitzt.

Will man die vorliegenden Betrachtungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung stützen, wie Herr Borel zu tun vorschlägt, so wird man am besten die Bayessche Regel etwa in folgender Weise heranziehen:

Für das Eintreffen irgend eines Ereignisses  $E$  sei zunächst die Hypothese  $H$  mit der sehr großen apriorischen Wahrscheinlichkeit  $w$  aufgestellt,

\*) Dabei wird vorläufig davon abgesehen, wie weit für das wirkliche astronomische Problem der Lagrangesche Ansatz, der nur eine Näherung ist, als solche genügt. Eine Punktmengenbedingung wird in dem komplizierteren vollständigen Problem erst recht zu erwarten sein.

\*\*) Die Beobachtung einer solchen Art der Bewegung würde streng genommen eine unendliche Beobachtungsdauer erfordern. Indessen würde das gleiche für die Beobachtung jeder Art mechanischer Stabilität gelten und nichts ist häufiger als solche zeitliche Extrapolationen der Beobachtung. Im mathematischen Sinne erfordern sie natürlich die Formulierung eines entsprechenden Axioms.

aber das Ereignis  $E$  folge aus derselben mit einer (sehr kleinen) Wahrscheinlichkeit  $p$  (sodaß  $w \cdot p$  ebenfalls klein ist), dann gibt es stets andere Hypothesen  $H', H'', \dots$ , deren Wahrscheinlichkeiten a priori  $w', w'', \dots$  an sich geringer als  $w$  sind, aus denen aber das Ereignis  $E$  mit solchen Wahrscheinlichkeiten  $p', p'', \dots$  folgt, daß  $w'p', w''p'', \dots$  größer als  $wp$  ist.

Nach der Bayesschen Regel haben dann diese Hypothesen  $H', H'', \dots$  nach der Beobachtung von  $E$  eine größere Wahrscheinlichkeit a posteriori als  $H$ .

Wenn man also z. B. bei hundertmaligem Würfeln mit einem Würfel jedesmal das Erscheinen der Eins beobachten würde, so würde man die zunächst vielleicht gemachte Hypothese  $H$ , der Würfel sei regulär — deren Wahrscheinlichkeit a priori  $w$  sehr groß sein kann —, verwerfen und schließen, der Würfel sei falsch.

In der Tat ist die Wahrscheinlichkeit  $p$ , hundertmal hintereinander Eins zu werfen, nur  $p = \frac{1}{6^{100}}$  und daher  $wp$  sehr klein, während die Hypothese  $H'$ , daß die Würfelseite mit der Eins leichter sei, vielleicht nur eine kleine Wahrscheinlichkeit  $w'$  besitzt, aber doch, da dann  $p'$  nahezu Eins wird, immerhin eine Wahrscheinlichkeit proportional  $w'p'$  gewinnt, welches größer als  $w \frac{1}{6^{100}}$  sein wird.

Ebenso wird im vorliegenden Falle die Hypothese  $H$ , daß der Lagrange'sche Ansatz gilt, zunächst eine große Wahrscheinlichkeit a priori  $w$  haben, dagegen wird man für  $p$  Null setzen müssen, und also  $wp = 0$  finden. Daher wird man jede andere Hypothese  $H'$ , die das Ereignis  $E$  der mittleren Bewegung als endlich wahrscheinlich erscheinen läßt, vorziehen, falls sie überhaupt eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzt.

Daß man  $p$  gleich Null setzen muß, folgt daraus, daß die Werte mittlerer Bewegung eine Nullmenge ausmachen, einmal wenn man gleichen Volumina im Parameterraum gleiche Wahrscheinlichkeit gibt, bleibt aber andererseits auch dann notwendig, wenn man im Parameterraum eine stetige Gewichtsbelegung einführt, resp. stetig zu anderen Parametern übergeht. Die endlichen Wahrscheinlichkeiten dagegen wie z. B. die des Innehaltens gewisser Grenzen für die Perihelbewegung in begrenzter Zeit, hängen von der Wahl der Gewichtsfunktion ab. Da aber diese Wahrscheinlichkeiten a posteriori z. T. beobachtet sind, so könnte man durch eine *Rechnung*, für die meine Formeln eine genügende Grundlage geben, festzustellen suchen, ob es eine geeignete Gewichtsfunktion gibt und ob z. B. die in der Gastheorie übliche Annahme, im Raum der kanonischen Parameter die Gewichtsfunktion gleich Eins zu setzen, hier durchführbar ist.