SU DI UNA GENERALIZZAZIONE DELLE FORME DIFFERENZIALI E DEI SISTEMI COVARIANTI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ASSOLUTO.

Memoria di **Ernesto Pascal** (Milano).

Adunanza dell'11 novembre 1906.

Studiando la formazione del differenziale r^{mo} di una funzione di n variabili dipendenti x, si presentano certe caratteristiche espressioni differenziali che in tutti i miei lavori sulle forme differenziali ho indicato con $\delta^{(r)}_{j_1,\ldots,j_m}$. Le forme differenziali finora considerate sono espressioni *lineari* in tali δ, con coefficienti funzioni di tutte le x e caratterizzate da un gruppo di m indici, m essendo a sua volta variabile da 1 ad r.

Una generalizzazione che si presenta naturale è quella di considerare espressioni le quali anzichè essere *lineari* nelle δ, sieno in esse di grado k; ma ciò che in tale generalizzazione si presenta assai notevole è questo: che con essa molte delle formole e delle considerazioni fondamentali relative alle forme differenziali finora considerate, vengono ad acquistare una luce nuova, e che si viene a costruire, nell'assieme dei coefficienti a k gruppi di indici di una siffatta forma generalizzata, un sistema che può considerarsi come estensione degli ordinarii sistemi covarianti che si considerano nel Calcolo differenziale assoluto, per modo che si viene così ad ottenere una notevole estensione di tutti i procedimenti e le formole che a tale Calcolo si riferiscono, e si vengono a stabilire dei riavvicinamenti inaspettati fra questi e altri che erano stati già da me introdotti nella teoria delle forme differenziali di ordine r.

Per tutto quanto riguarda le notazioni qui adoperate ci rimettiamo alle molte Note pubblicate nel 1903 nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, che, per brevità, tralasceremo di citare per esteso.

§ 1.

Preliminari. Sistemi covarianti a k gruppi di indici.

Cominciamo col ricordare la forma delle espressioni δ. Essa è:

$$\delta^{(r)}_{j_1,\ldots,j_m} = \frac{1}{m!} S_j \sum_{i_1,\ldots,i_m} \frac{r!}{i_1!\ldots i_m!\mu_1!\ldots\mu_s!} d^{i_1}x_{j_1}\ldots d^{i_m}x_{j_m},$$

in cui S_j indica l'operazione del sommare tutti i risultati ottenuti colla permutazione delle j fra loro in tutti i modi possibili; le $i_1 \ldots i_m$ sono m numeri interi positivi, maggiori di zero, e tali che la loro somma sia r; $s \leqq m$ rappresenta quante delle $i_1, \ldots, i_m$ sono fra loro diverse, e queste sieno, per fissare le idee, le $i_1, \ldots, i_s$, e $\mu_1, \ldots, \mu_s$ rappresentano quante delle i sono eguali ad i_1, quante eguali ad i_2, etc.; il sommatorio rispetto alle i deve estendersi a tutti i possibili valori delle i, senza ripetizioni.

Alle volte per ricordare che le δ sono formate colle variabili x, si può anche scrivere una (x) accanto ad esse.

Nelle ricordate Note del 1903 abbiamo studiato varie formole relative a queste δ; ma una sola importante ci occorre ora di ricordare, ed è che con una trasformazione di variabili, esse si trasformano linearmente, cioè a dire le δ costruite per le nuove variabili si esprimono con una combinazione lineare delle δ costruite per le antiche variabili; si ha propriamente la formola

$$\delta^{(r)}_{i_1,\ldots,i_m}(x) = \sum_{\mu=m}^{r} \sum_{h} \begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_m \\ h_1, & \ldots, & h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \delta^{(r)}_{h_1,\ldots,h_\mu}(y),$$

essendo $\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_m \\ h_1, & \ldots, & h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$ un aggregato di derivate delle x rispetto alle y, e di cui abbiamo studiato la formazione con tutti i particolari e con tutte le formole relative nelle citate Note del 1903 e in altre.

Ciò posto, consideriamo delle espressioni *di grado k nelle δ*, e cioè tali che ogni termine contenga il prodotto di k formazioni δ ognuna con un determinato e fisso indice superiore.

Una tale espressione, i cui coefficienti dipenderanno da k gruppi di indici, la chiameremo *una forma differenziale di k^{mo} grado e di $r_1 + \ldots + r_k$ ordine:*

$$X^{(r_1,\ldots,r_k)} = \sum_{m=1}^{r_1} \cdots \sum_{p=1}^{r_k} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \delta^{(r_1)}_{i_1,\ldots,i_m} \cdots \delta^{(r_k)}_{j_1,\ldots,j_p}, \tag{1}$$

essendo le X funzioni delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ e col $\sum_{i,\ldots,j}$ intendendo al solito che a ciascuno degli indici $i, \ldots, j$ debbano darsi successivamente tutti i valori da 1 ad n. Intenderemo che i coefficienti X dipendano simmetricamente dagli indici racchiusi in ciascun gruppo, ma non simmetricamente dai gruppi medesimi.

Poichè, come sappiamo, con una trasformazione di variabili ogni δ si muta in una combinazione lineare di altre col medesimo indice superiore, e con un numero eguale o maggiore di indici inferiori, così *è evidente che, con una trasformazione di variabili, il tipo della precedente espressione non muta, e cioè che questa ha un carattere invariantivo,* e inoltre che, se immaginiamo zero tutti i coefficienti X dei quali il numero degli indici del primo gruppo sia $< s_1, \ldots,$ quello degli indici dell'ultimo gruppo sia $< s_k$, se cioè i sommatorii rispetto ad $m, \ldots,$ rispetto a p, anzichè estenderli da 1 ad $r_1, \ldots$ da 1 ad r_k, li estendiamo da s_1 ad $r_1, \ldots$ da s_k ad r_k, il tipo della espressione che viene a formarsi resta inalterato con una qualunque trasformazione, cioè i numeri $s_1, \ldots, s_k$ restano invariati.

Si potrebbe, per maggiore generalità, supporre che i varii δ debbano comporsi con differenziali di natura diversa, e cioè per es. il primo con dei d_1, il secondo con dei d_2, etc. Per $r_1 = \cdots = r_k = 1$ la (1) diventa allora una forma *multilineare*.

Cerchiamo prima d'ogni altra cosa le formole di trasformazione dei coefficienti X.

Nella (1) le δ si intendono costruite colle x. Facciamo la trasformazione delle x nelle y e facciamo uso della formola, ora citata, di trasformazione dei δ; osservando che

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{\mu=m}^{r} = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{m=1}^{\mu},$$

si vede che la (1) diventa:

$$X^{(r_1,\ldots,r_k)}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{r_1} \cdots \sum_{\pi=1}^{r_k} \sum_{h,\ldots,l} \left[\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_m \\ h_1, \ldots, h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \cdots \begin{pmatrix} j_1, \ldots, j_p \\ l_1, \ldots, l_\pi \end{pmatrix}_{xy} \right] \delta^{(r_1)}_{h_1,\ldots,h_\mu} \cdots \delta^{(r_k)}_{l_1,\ldots,l_\pi},$$

in cui le δ sono costruite colle y. Indicando allora con $Y_{h_1,\ldots,h_\mu;\ldots;l_1,\ldots,l_\pi}$ la espressione contenuta nella parentesi quadra, *si ha la formola fondamentale di trasformazione*:

$$(2) \quad Y_{h_1,\ldots,h_\mu;\ldots;l_1,\ldots,l_\pi} = \sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_m \\ h_1, \ldots, h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \cdots \begin{pmatrix} j_1, \ldots, j_p \\ l_1, \ldots, l_\pi \end{pmatrix}_{xy}$$

dalla quale si vede questo fatto importante che: *i coefficienti a più gruppi di indici si trasformano esattamente come i prodotti dei coefficienti ciascuno ad un sol gruppo di indici;* in altri termini che *la forma $X^{(r_1,\ldots,r_k)}$ si trasforma come il prodotto $X^{(r_1)} \ldots X^{(r_k)}$ ognuna di queste ultime essendo una forma lineare.* Quindi: *simbolicamente la forma differenziale di grado k può rappresentarsi come il prodotto di k forme lineari.*

Un sistema di funzioni a k gruppi di indici che si trasformano come i coefficienti di una forma differenziale di grado k, lo chiameremo un *sistema covariante a k gruppi di indici.*

Un tal sistema covariante è una generalizzazione degli ordinarii sistemi covarianti che si considerano nel Calcolo differenziale assoluto. Per $r_1 = \cdots = r_k = 1$ esso si riduce ad uno di questi.

Vediamo ora come da un sistema covariante a k gruppi se ne possano dedurre altri a $k+1$ gruppi.

§ 2.

I simboli fondamentali.
Le dedotte covarianti degli elementi di un sistema.

Formiamo la espressione

$$(3) \qquad \frac{\partial X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p}}{\partial x_g} - X_{i_1,\ldots,i_m g;\ldots;j_1,\ldots,j_p} - \cdots - X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p g}$$

sottraendo cioè dalla derivata indicata tutte le k X ottenute aggregando l'indice g successivamente a ciascun gruppo di indici; e indichiamo tale espressione con

$$(4) \qquad ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g))$$

avente $k+1$ gruppi di indici.

Similmente e più generalmente per definire il simbolo

$$(5) \qquad ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g_1, \ldots, g_q))$$

introduciamo la seguente convenzione.

Indichiamo con *operazione* Ω l'operazione per la quale da una derivata q^{ma} di una X dipendente da k gruppi di indici, derivata presa rispetto alle x cogli indici $g_1, \ldots, g_q$, cioè per es. da:

$$(6) \qquad \frac{\partial^q X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p}}{\partial x_{g_1} \ldots \partial x_{g_q}}$$

si deducono le derivate di ordine $q - 1^{mo}$ ottenute sopprimendo al denominatore un indice g, e aggregandolo invece a uno qualunque dei gruppi di indici del numeratore, cioè per es. le derivate:

$$(7) \qquad \frac{\partial^{q-1} X_{i_1,\ldots,i_m g_1;\ldots;j_1,\ldots,j_q}}{\partial x_{g_2} \ldots \partial x_{g_q}}, \ldots, \frac{\partial^{q-1} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p g_1}}{\partial x_{g_2} \ldots \partial x_{g_q}}.$$

Coll'operazione Ω applicata a (6) si hanno così kq termini diversi; riapplicando a ciascuno dei (7) la stessa operazione si hanno solo $\frac{k^2 q(q-1)}{2!}$ termini diversi, perchè è facile vedere che ciascuno resta ripetuto due volte; e così di seguito.

Ciò posto, il valore del simbolo (5) si ottiene sottraendo dalla derivata (6) tutti i termini diversi ottenuti da esso colla operazione Ω, indi sommando tutti quei diversi ottenuti colla operazione Ω^2, e così di seguito; in formola, indicando con D la derivata (6), il simbolo (5) è dato da:

$$(8) \qquad D - \Omega D + \frac{1}{2!}\Omega^2 D - \frac{1}{3!}\Omega^3 D + \cdots + (-1)^q \frac{1}{q!}\Omega^q D$$

intendendo con ΩD, $\Omega^2 D$, ... le somme di tutti i termini ottenuti operando su D le operazioni Ω, Ω^2, ...

Per $q = 1$ si ha la (3).

È evidente che le (5) dipendono da $k + 1$ gruppi di indici, e sono simmetriche negli indici di ciascuno di essi separatamente.

Se $q = 0$, la (5) si riduce al solo coefficiente $X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p}$ il quale quindi può ritenersi rappresentabile colla stessa formola (5) in cui si intenda sparito l'ultimo gruppo di indici.

Le formazioni così introdotte, che chiameremo *simboli fondamentali*, godono di una semplicissima ed elegante proprietà relativamente alle loro derivate, e cioè si ha la formola:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\omega}((i_1, \ldots, i_m; \ldots; g_1, \ldots, g_q)) = ((i_1, \ldots, i_m \omega; \ldots; g_1, \ldots, g_q)) + \cdots \\ \qquad \cdots + ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; g_1, \ldots, g_q \omega)); \end{cases}$$

la derivata del simbolo (5) *rispetto ad una* x_ω *è eguale alla somma dei* $k + 1$ *simboli ottenuti dal dato aggregando l'indice* ω *successivamente e separatamente al* 1°, *al* 2°, ... *al* $(k+1)^{mo}$ *gruppo.*

In effetti è evidente che le derivate $(q+1)^{me}$ al primo e secondo membro sono le medesime, nel secondo membro non comparendovi di tali derivate che una sola nell'ultimo termine.

Inoltre di derivate q^{me} ve ne sono kq nel primo membro e col segno negativo, mentre nel secondo membro ve ne sono k col segno positivo e $k(q+1)$ (contenute nell'ultimo termine) col segno negativo; di queste è facile vedere che k sono le stesse delle precedenti e quindi con esse si distruggono, e sono quelle nelle quali la derivata è fatta rispetto alle x coi soli indici $g_1, \ldots, g_q$ (senza ω), e le altre sono le stesse del primo membro. Similmente è facile la verifica per tutte le derivate di ogni altro ordine, e la formola resta dimostrata.

Le applicazioni della precedente formola sono importanti. Per facilità di locuzione introduciamo una denominazione.

La espressione (3) chiamiamola una *prima dedotta covariante* della $X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p}$.

Adoperiamo la parola *dedotta* invece di *derivata* per evitare una confusione colle denominazioni del Calcolo differenziale assoluto, e apponiamo la specificazione di *covariante* per una ragione simile a quella per la quale nel suddetto Calcolo si parla di *derivate covarianti,* come vedremo appresso esaminando le proprietà di trasformazione del simbolo generale (5).

Se di (3), cioè del simbolo (4), formiamo ancora, colla stessa regola, una *dedotta covariante*, considerando però (4) come elemento di un sistema sempre a k gruppi di indici, senza perciò tener conto dell'ultimo gruppo, se cioè formiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g)) - ((i_1, \ldots, i_m, \gamma; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g)) - \cdots$$
$$\cdots - ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p, \gamma; g))$$

in forza della formola (9) questa espressione, che sarebbe una 2^a *dedotta covariante* del sussegnato coefficiente X, non è altro che il simbolo

$$((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g, \gamma)).$$

Abbiamo così in generale:

Il simbolo

$$((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g_1, \ldots, g_q))$$

è una q^{ma} dedotta covariante del coefficiente $X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p}$.

Inoltre consideriamo il simbolo (5) come un elemento di un sistema a $k+1$ gruppi di indici. La formola (9) mostra che allora la sua 1^a dedotta covariante è identicamente zero, e quindi anche tutte le sue dedotte seguenti, onde:

I simboli fondamentali formano un sistema a $k+1$ gruppi di indici, dei cui elementi ogni dedotta covariante è sempre identicamente zero.

Se consideriamo un prodotto di due X, ognuna a più gruppi di indici, come una funzione dipendente da tutti i gruppi della prima X, e da tutti i gruppi della seconda, e formiamo, ponendoci da tal punto di vista, la dedotta covariante del prodotto, è evidente che otteniamo un risultato che può compendiarsi nel seguente semplice teorema:

La dedotta covariante di un prodotto si fa colla stessa regola con cui si fa la derivata del prodotto di più funzioni.

§ 3.

Formole di trasformazione dei simboli. Proprietà fondamentale delle dedotte covarianti.

Passiamo ora alle formole di trasformazione dei simboli, per le quali troverémo un risultato assai semplice ed elegante.

Formiamo una prima dedotta covariante del primo membro di (2), e calcoliamo indi la medesima mediante l'espressione del secondo membro. Per distinguere i simboli costruiti colle Y da quelli costruiti colle X, apponiamo l'una o l'altra di queste lettere come indice in basso a destra del simbolo stesso. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&((h_1, \ldots, h_\mu; \ldots; l_1, \ldots, l_\pi; \gamma))_Y \\
= &\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} \sum_g \frac{\partial}{\partial x_g} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu}_{xy} \cdots \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi}_{xy} \binom{g}{\gamma}_{xy} \\
+ &\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \left[\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu}_{xy}\right] \cdots \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi}_{xy} \\
+ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ &\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu}_{xy} \cdots \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi}_{xy} \\
- &\sum_{m=1}^{\mu+1} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu, \gamma}_{xy} \cdots \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi}_{xy} \\
- &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
- &\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi+1} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu}_{xy} \cdots \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi, \gamma}_{xy}.
\end{aligned}
$$

Le linee di questa formola sono $2k + 1$ essendo al solito k il numero dei gruppi di indici.

Ora servendosi della formola per le derivate

$$\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \binom{i_1 \ldots}{h_1 \ldots}_{xy}$$

e con osservazioni analoghe a quelle fatte a pag. 372 della mia Nota: *Sulla costruzione dei simboli a carattere invariantivo*, etc. [Rend. Acc. dei Lincei, s. V, tomo XII (1903), 1° sem., pp. 367-377] si riconosce che le espressioni contenute rispettivamente nelle linee 2ª e $(k+2)^{\text{ma}}$, 3ª e $(k+3)^{\text{ma}}$, ... si raccolgono a due a due a formare le k altre espressioni:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} \sum_g X_{i_1,\ldots,i_m,g;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu}_{xy} \cdots \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi}_{xy} \binom{g}{\gamma}_{xy} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&-\sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} \sum_g X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p,g} \binom{i_1, \ldots, i_m}{h_1, \ldots, h_\mu}_{xy} \cdots \binom{j_1, \ldots, j_p}{l_1, \ldots, l_\pi}_{xy} \binom{g}{\gamma}_{xy}
\end{aligned}
$$

e quindi in complesso si ha la formola:

$$(10)\left\{\begin{aligned}&((h_1, \dots, h_\mu; \dots; l_1, \dots, l_\pi; \gamma))_Y\\ &= \sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\dots,j,g} ((i_1, \dots, i_m; \dots; j_1, \dots, j_p; g))_X \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ h_1, \dots, h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \cdots \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_p \\ l_1, \dots, l_\pi \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} g \\ \gamma \end{pmatrix}_{xy}.\end{aligned}\right.$$

Si può ora dimostrare per induzione che si ha in generale la formola

$$(11)\left\{\begin{aligned}&((h_1, \dots, h_\mu; \dots; \gamma_1, \dots, \gamma_\tau))_Y\\ &= \sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{i,\dots,g} ((i_1, \dots, i_m; \dots; g_1, \dots, g_q))_X \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ h_1, \dots, h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \cdots \begin{pmatrix} g_1, \dots, g_q \\ \gamma_1, \dots, \gamma_\tau \end{pmatrix}_{xy},\end{aligned}\right.$$

la quale per $\tau = 1$ è la (10). La dimostrazione procede cogli stessi calcoli fatti nella Nota succitata, calcoli che possono anche notevolmente abbreviarsi, come più sotto mostreremo.

Ma prima di ciò vogliamo far vedere come può farsi dipendere la formola (10) da quella analoga dimostrata nella predetta Nota, cioè per il caso in cui il numero dei gruppi di indici dei simboli sia *due*, mentre che in (10) si sottintende che tal numero sia $k + 1$.

Il primo membro di (10) è, come abbiamo sopra dimostrato, la 1ª *dedotta covariante* di $Y_{h_1,\dots,h_\mu;\dots;l_1,\dots,l_\pi}$.

Ora abbiamo già osservato che, rispetto alla trasformazione delle variabili, tale Y può simbolicamente rappresentarsi col prodotto

$$Y_{h_1,\dots,h_\mu} \cdots Y_{l_1,\dots,l_\pi},$$

e che la dedotta covariante di tal prodotto si fa colla solita regola della derivazione. Ma per la detta formola già ammessa e che è caso particolare della (10), la dedotta covariante (rispetto ad x_γ) di ciascuno dei precedenti fattori si trasforma come il prodotto del fattore medesimo per Y_γ; quindi per la trasformazione il primo membro di (10) si comporta come la somma di prodotti simbolici

$$(12)\qquad [Y_{h_1,\dots,h_\mu} Y_\gamma] \cdots Y_{l_1,\dots,l_\pi} + \cdots + Y_{h_1,\dots,h_\mu} \cdots [Y_{l_1,\dots,l_\pi} Y_\gamma],$$

cioè può essere simbolicamente rappresentato da tale espressione.

Applicando a ciascun termine di questa la formola di trasformazione, e osservando che alla espressione simbolica analoga alla (12) (ma nelle X) che si viene ad avere, sottoposta ai sommatorii, al secondo membro, bisogna naturalmente risostituire il suo significato effettivo, si ottiene esattamente la (10).

Dimostriamo ora la (11) per induzione. Il primo membro è la 1ª dedotta covariante di $((h_1, \dots, h_\mu; \dots; l_1, \dots, l_\pi; \gamma_1, \dots, \gamma_{\tau-1}))_Y$ (che indicheremo con $\eta_{h_1,\dots,h_\mu;\dots;l_1,\dots,l_\pi}$) rispetto ad y_{γ_τ}, dedotta calcolata senza tener conto dell'ultimo gruppo di indici, cioè considerando il precedente simbolo come dipendente da soli k gruppi e non da $k + 1$. Applicando dunque la formola (10) alle η possiamo scrivere:

$$(13)\left\{\begin{aligned}&((h_1, \dots, h_\mu; \dots; l_1, \dots, l_\pi; \gamma_\tau))_\eta\\ &= \sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\dots,j g} ((i_1, \dots, i_m; \dots; j_1, \dots, j_p; g))_\xi \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ h_1, \dots, h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \cdots \begin{pmatrix} g \\ \gamma_\tau \end{pmatrix}_{xy},\end{aligned}\right.$$

dove le ξ sono delle funzioni di x, legate alle η nello stesso modo che le X sono legate alle Y, cioè da formole come le (2); inoltre il primo membro di (13) è eguale, sotto altra forma, al primo membro di (11).

Ma poichè noi ammettiamo che la (11) sia vera quando per τ poniamo $\tau - 1$, e gli altri indici li lasciamo o li mutiamo come ci piace, abbiamo in generale:

$$((h_1, \ldots, h_\mu; \ldots; l_1, \ldots, l_\pi; \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1}))_Y = \eta_{h_1,\ldots,h_\mu;\ldots;l_1,\ldots,l_\pi}$$
$$= \sum_{m=1}^{\mu} \cdots \sum_{p=1}^{\pi} \sum_{i,\ldots,j} \left[\sum_{q=1}^{\tau-1} \sum_{g} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g_1, \ldots, g_q))_X \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy} \right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_m \\ h_1, \ldots, h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \cdots \begin{pmatrix} j_1, \ldots, j_p \\ l_1, \ldots, l_\pi \end{pmatrix}_{xy},$$

onde abbiamo, paragonando con una formola come la (2),

$$(14) \quad \xi_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} = \sum_{q=1}^{\tau-1} \sum_{g} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g_1, \ldots, g_q))_X \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy}$$

e con questi elementi ξ dobbiamo formare il secondo membro della formola (13). Dobbiamo cioè formare la dedotta covariante del secondo membro rispetto ad x_g, sostituirla nel secondo membro di (13) e indi fare le opportune riduzioni.

Ora si ha da (14):

$$((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g))_\xi$$
$$= \sum_{q=1}^{\tau-1} \sum_{g} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g_1, \ldots, g_q, g))_X \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy}$$
$$+ \sum_{q=1}^{\tau-1} \sum_{g} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g_1, \ldots, g_q))_X \frac{\partial}{\partial x_g} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy}.$$

Ma possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x_g} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy} = \sum_s \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}_{yx} \frac{\partial}{\partial y_s} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy}$$
$$= \sum_s \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}_{yx} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1}, s \end{pmatrix}_{xy} - \frac{1}{q} S_{g_q} \sum_s \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}_{yx} \begin{pmatrix} g_q \\ s \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_{q-1} \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy} \text{*)}$$

coll'avvertenza che questo secondo termine deve porsi zero per $q = 1$.

Il simbolo operativo S_{g_q} e la divisione per q possono sopprimersi dovendo sottoporre queste espressioni a dei sommatorii pei quali ognuno degli indici g deve avere ciascuno di tutti i valori da 1 ad n.

Possiamo perciò scrivere:

$$\sum_g ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; j_1, \ldots, j_p; g))_\xi \begin{pmatrix} g \\ \gamma_\tau \end{pmatrix}_{xy}$$
$$= \sum_{q=1}^{\tau-1} \sum_{g} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; g_1, \ldots, g_q, g))_X \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} g \\ \gamma_\tau \end{pmatrix}_{xy}$$
$$+ \sum_{q=1}^{\tau-1} \sum_{g,s} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; g_1, \ldots, g_q))_X \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}_{yx} \begin{pmatrix} g \\ \gamma_\tau \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_q \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} s \end{pmatrix}_{xy}$$
$$- \sum_{q=2}^{\tau-1} \sum_{g,s} ((i_1, \ldots, i_m; \ldots; g_1, \ldots, g_q))_X \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}_{yx} \begin{pmatrix} g_q \\ s \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} g \\ \gamma_\tau \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} g_1, \ldots, g_{q-1} \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau-1} \end{pmatrix}_{xy}.$$

---

*) Vedi la mia Nota: *Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque* [Rend. Acc. dei Lincei, s. V, tomo XII (1903), 1° sem., pp. 325-332] (p. 329).

Ora

$$\sum_g \binom{s}{g}_{yx} \binom{g}{\gamma_\tau}_{xy} = 1 \qquad \text{se } s = \gamma_\tau,$$
$$= 0 \qquad \text{in ogni altro caso,}$$
$$\sum_s \binom{s}{g}_{yx} \binom{g_q}{s}_{xy} = 1 \qquad \text{se } g = g_q,$$
$$= 0 \qquad \text{in ogni altro caso,}$$

onde riducendo e facendo degli opportuni mutamenti di indici si vede che tutta la terza riga della precedente formola si distrugge con una parte eguale contenuta nella prima riga, di cui resta solo l'ultima parte del sommatorio rispetto a q, cioè quella per $q = \tau - 1$. Questa è poi quella che risulterebbe dalla seconda riga per $q = \tau$, onde infine, sostituendo in (13), resta esattamente il secondo membro della (11).

La formola di trasformazione (11) viene a dire che *il simbolo con $k + 1$ gruppi di indici si trasforma come il prodotto di $k + 1$ X ognuna portante per indici quelli di un solo gruppo, cioè si trasforma come una X coi medesimi $k + 1$ gruppi.*

In altri termini, ricordando quanto abbiamo detto di sopra, possiamo dire:

Le 1^e, 2^e, ... dedotte covarianti degli elementi di un sistema covariante a k gruppi di indici, formano a loro volta un sistema covariante a $k + 1$ gruppi di indici.

Questa è la ragione per la quale abbiamo creduto di introdurre la denominazione di *dedotta covariante.*

§ 4.

Una classe di covarianti della forma fondamentale.

Se costruiamo la forma differenziale di grado $k + 1$ del tipo della (1), ma avente per coefficienti le dedotte covarianti dei coefficienti della (1) stessa, per le proprietà dimostrate *tale espressione sarà un covariante della* (1); abbiamo così l'estensione dei covarianti indicati con $X^{(s,p)}$ nella Nota: *Una classe di covarianti,* etc. [Rend. Acc. dei Lincei, s. V, tomo XII (1903), 1° sem., pp. 399-408]. Indicheremo una tal forma covariante con

(15) $$X^{(s_1, s_2, \ldots, s_{k+1})},$$

essendo s_1, s_2, ... numeri che non possono superare certi limiti dipendenti dagli r_1, r_2, ... relativi alla forma fondamentale (1).

Quali sono questi limiti? Essi sono imposti da ciò che i coefficienti di (15), che sono dei simboli come (5), devono potersi costruire mediante le sole X della forma fondamentale, senza l'inclusione di altre nuove, cioè che le X a k gruppi mediante cui si abbiano a costruire i simboli (5), non abbiano più di r_1 indici nel primo gruppo, di r_2 nel secondo, ... di r_k nel k^{mo}.

Ora per potere costruire un simbolo (5), occorrono X le quali abbiano *al più* $m + q$ indici nel primo gruppo, ... $p + q$ nell'ultimo; onde si hanno subito le disuguaglianze

$$(16) \qquad m + q \leqq r_1, \quad \ldots, \quad p + q \leqq r_k;$$

e poichè per la costruzione di (15) occorrono simboli (5) nei quali m è al massimo eguale a s_1, ... p è al massimo eguale a s_k, q è al massimo s_{k+1}, così abbiamo per i numeri s le disuguaglianze

$$(17) \qquad s_1 + s_{k+1} \leqq r_1, \ldots, s_k + s_{k+1} \leqq r_k.$$

Se in particolare supponiamo in (15) $s_{k+1} = 0$, possiamo ritenere come casi limiti delle (15), le forme differenziali di grado k (non più $k + 1$) costruite cogli stessi coefficienti della (1) stessa; quelle cioè che noi, con denominazione già altra volta adoperata (vedi Nota ora citata) possiamo chiamare i *covarianti evidenti* della (1), fra cui è compresa la (1) stessa.

Ed ora possiamo stabilire una elegante formola per il differenziale di una (15). Si ha semplicemente:

$$(18) \qquad d X^{(s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1})} = \sum_{i=1}^{k+1} X^{(s_1, \ldots, s_i + 1, \ldots, s_{k+1})};$$

basta cioè accrescere di un'unità ciascuno degli s separatamente volta per volta, e sommare tutte le X così ottenute.

La dimostrazione di questa formola non differisce sostanzialmente da quella della formola per $k = 1$ che noi abbiamo già fatta nella succitata Nota, e quindi per brevità la ometteremo.

§ 5.

Matrici formate cogli elementi di un sistema covariante.

Passiamo ora alla dimostrazione di una notevole proprietà delle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante nel senso definito sul principio. Avremo un teorema che comprende come particolari tutti quelli della stessa natura da noi dimostrati in altre occasioni.

Supponiamo che il sistema comprenda m gruppi di indici, che scinderemo in due classi, la prima formata di k gruppi e la seconda di $m - k$. Formiamo la matrice costruita con tutti gli elementi, col dare a ciascun gruppo di indici tutto lo sviluppo di cui è suscettibile, dal minimo al massimo, e a ciascun indice tutti i valori da 1 ad n, e ponendo sempre in una stessa linea orizzontale tutti gli elementi aventi rispettivamente eguali i k gruppi scelti, e in una stessa colonna gli elementi aventi eguali i rimanenti $m - k$ gruppi. Di tali matrici se ne possono costruire tante facendo variare k, e per uno stesso k considerando una piuttosto che un'altra delle separazioni degli m gruppi.

La proprietà importante di tali matrici è questa:

Le caratteristiche di queste matrici sono invarianti per ogni trasformazione di variabili.

Per la dimostrazione del teorema, supponiamo prima che si tratti di *due* soli gruppi di indici, e formiamo perciò la matrice:

$$(19)\quad \left\|\begin{array}{ccccccccc} Y_{h;1} & \ldots & Y_{h;n} & Y_{h;11} & Y_{h;12} & \ldots & Y_{h;111} & \ldots \\ Y_{h_1h_2;1} & \ldots & Y_{h_1h_2;n} & Y_{h_1h_2;11} & Y_{h_1h_2;12} & \ldots & Y_{h_1h_2;111} & \ldots \\ Y_{h_1h_2h_3;1} & \ldots & Y_{h_1h_2h_3;n} & Y_{h_1h_2h_3;11} & Y_{h_1h_2h_3;12} & \ldots & Y_{h_1h_2h_3;111} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\| \begin{array}{r} (h=1,\ldots n) \\ (h_1, h_2 = 1,\ldots n) \\ (h_1, h_2, h_3 = 1,\ldots n) \\ \ \end{array}$$

e teniamo presenti le formole (2) che esprimono le Y per le X.

Essendo

$$Y_{h_1,\ldots,h_\mu;l} = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \sum_{ij} X_{i_1,\ldots,i_\sigma;j} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\sigma \\ h_1, \ldots, h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}$$

$$Y_{h_1,\ldots,h_\mu;l_1,l_2} = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \sum_{ij} X_{i_1,\ldots,i_\sigma;j} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\sigma \\ h_1, \ldots, h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l_1, l_2 \end{pmatrix} + \sum_{\sigma=1}^{\mu} \sum_{ij} X_{i_1,\ldots,i_\sigma;j_1,j_2} \begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\sigma \\ h_1, \ldots, h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1, j_2 \\ l_1, l_2 \end{pmatrix},$$

se moltiplichiamo le prime n colonne di (19) rispettivamente per $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che sia

$$(20)\qquad \sum_{l=1}^{n} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}_{xy} \lambda_l = \begin{pmatrix} j \\ l_1, l_2 \end{pmatrix}_{xy}$$

(equazioni risolubili rispetto alle λ perchè il loro determinante è il determinante funzionale, diverso da zero, delle x rispetto alle y) e sottragghiamo la somma di questi prodotti dagli elementi della colonna contenente gli elementi $Y_{h_1,\ldots;l_1,l_2}$, tale colonna si riduce semplicemente coi termini contenenti per fattori

$$\begin{pmatrix} j_1, j_2 \\ l_1, l_2 \end{pmatrix}_{xy}$$

che è formato di derivate *prime* delle x rispetto alle y, cioè è propriamente (secondo le nostre solite convenzioni)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_{j_1}}{\partial y_{l_1}} \frac{\partial x_{j_2}}{\partial y_{l_2}} + \frac{\partial x_{j_1}}{\partial y_{l_2}} \frac{\partial x_{j_2}}{\partial y_{l_1}}\right).$$

Similmente, tenendo presente la formola che dà il valore di $Y_{h_1,\ldots,h_\mu;l_1,l_2,l_3}$, se dalla colonna che contiene questi elementi sottragghiamo le prime n moltiplicate rispettivamente per $\mu_1, \ldots, \mu_n$, e le seguenti moltiplicate rispettivamente per $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots$ determinate dalle equazioni lineari

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}_{xy} \mu_l = \begin{pmatrix} j \\ l_1, l_2, l_3 \end{pmatrix}_{xy} \\ \displaystyle\sum_{l'_1=1}^{n} \sum_{l'_2=1}^{n} \begin{pmatrix} j_1, j_2 \\ l'_1, l'_2 \end{pmatrix}_{xy} \lambda_{l'_1 l'_2} = \begin{pmatrix} j_1, j_2 \\ l_1, l_2, l_3 \end{pmatrix}_{xy} \end{array}\right. \qquad (\lambda_{l'_1 l'_2} = \lambda_{l'_2 l'_1})$$

[(anche risolubili per le stesse ragioni, osservando che il determinante delle $\begin{pmatrix} j_1, j_2 \\ l'_1, l'_2 \end{pmatrix}_{xy}$ è una potenza del determinante funzionale delle x rispetto alle y *)] anche la suddetta

*) Un tal determinante non è che un determinante cosidetto di SCHOLTZ-HUNYADY; vedi il § 26 del mio trattato sui *Determinanti* (Milano 1897, Leipzig 1900) e una mia recente Memoria in questi medesimi Rendiconti (t. XXII).

colonna si riduce con elementi contenenti per fattori

$$\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & j_3 \\ l_1, & l_2, & l_3 \end{pmatrix}_{xy}$$

cioè prodotti di derivate *prime* solamente (delle x rispetto alle y). Così si continui per tutte le colonne seguenti.

Facciamo ora le stesse operazioni fra le linee, e cioè la linea che avea gli elementi $Y_{h_1 h_2; l_1 l_2, \ldots}$ riduciamola ad una i cui elementi [che sono già venuti ad avere per fattori i prodotti di derivate prime: $\begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}_{xy}$, $\begin{pmatrix} j_1, & j_2 \\ l_1, & l_2 \end{pmatrix}_{xy}$, $\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & j_3 \\ l_1, & l_2, & l_3 \end{pmatrix}_{xy}$, ...] riescano ad avere per fattori solamente: $\begin{pmatrix} i_1, & i_2 \\ h_1, & h_2 \end{pmatrix}_{xy}$, e così di seguito.

In tal modo la matrice (19) resta trasformata in una i cui elementi sono tutti del tipo:

$$\sum_{ij} X_{i_1,\ldots,i_\mu; j_1,\ldots,j_p} \begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_\mu \\ h_1, & \ldots, & h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} j_1, & \ldots, & j_p \\ l_1, & \ldots, & l_p \end{pmatrix}_{xy}, \tag{22}$$

che, con opportuni mutamenti di indici, possono sempre scriversi sotto la forma *):

$$\sum_{ij} X_{i_1,\ldots,i_\mu; j_1,\ldots,j_p} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{h_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_\mu}}{\partial y_{h_\mu}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial y_{l_1}} \cdots \frac{\partial x_{j_p}}{\partial y_{l_p}}. \tag{23}$$

Ora la matrice degli elementi (23) è il prodotto di una matrice come la (19) dove le Y sieno sostituite dalle X, cioè di:

$$(24)\qquad \begin{Vmatrix} X_{i;1} & \ldots & X_{i;n} & X_{i;11} & \ldots & X_{i;111} & \ldots \\ X_{i_1 i_2;1} & \ldots & X_{i_1 i_2;n} & X_{i_1 i_2;11} & \ldots & X_{i_1 i_2;111} & \ldots \\ X_{i_1 i_2 i_3;1} & \ldots & X_{i_1 i_2 i_3;n} & X_{i_1 i_2 i_3;11} & \ldots & X_{i_1 i_2 i_3;111} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots n) \\ (i_1, i_2 = 1, 2, \ldots n) \\ (i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \ldots n) \end{matrix}$$

due volte di seguito per la matrice:

$$(25)\qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 \;\ldots\; 0 & \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \;\ldots\; 0 & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\frac{\partial x_1}{\partial y_n}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\frac{\partial x_2}{\partial y_n}, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

---

*) Si ricordi che $\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_\mu \\ h_1, & \ldots, & h_\mu \end{pmatrix}_{xy}$ dovendo intendersi simmetrico negli indici, non è esattamente $\frac{\partial x_1}{\partial y_{h_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_\mu}}{\partial y_{h_\mu}}$, ma la $(\mu!)^{ma}$ parte della somma dei prodotti ottenuti da questo permutando le h in tutti i modi possibili fra loro.

ed eseguendo il primo prodotto combinando le *linee orizzontali* di (24) con quelle di (25) e indi il secondo combinando le *colonne* del prodotto già ottenuto [in cui si intenda che si siano disposti in *linea orizzontale* i risultati ottenuti da una medesima linea orizzontale di (24)] con le linee di (25). La formazione della matrice (25) è facile ad intendersi; sia D la matrice funzionale delle x rispetto alle y; $D^{(1)}$ la matrice di ordine n^2 i cui elementi sono i prodotti a due a due degli elementi di D (ponendo sempre in una stessa linea i prodotti di elementi delle stesse due linee di D); $D^{(2)}$ la matrice (di ordine n^3) i cui elementi sono i prodotti a tre a tre in analogo modo degli elementi di D, e così di seguito; la matrice (25) è allora

$$(26)\qquad \left\|\begin{matrix} D & 0 & 0 & \dots \\ 0 & D^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & D^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\|.$$

I determinanti delle matrici $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, ... sono tutte potenze del determinante D, e ciò per un noto teorema detto di KRONECKER *).

Da quanto si è detto risulta che un minore qualunque di ordine ν della matrice (19) si comporrà come somma di prodotti di minori dello stesso ordine della matrice (24) per minori dello stesso ordine di (25); e poichè col procedimento inverso, cioè partendo dalla (24) e giungendo in modo simile alla (19), si deduce che viceversa anche ogni minore di ordine ν di (24) si esprime come funzione lineare omogenea di minori dello stesso ordine di (19), si ricava infine che le due matrici (19) e (24) non possono che avere la medesima caratteristica.

Con ciò il nostro teorema è dimostrato per il caso di X a due soli gruppi di indici. Ma è facile vedere che un'analoga dimostrazione potrebbe farsi se si trattasse di *più* gruppi. Se per es. si tratti di 3 gruppi, e le colonne della matrice si compongano facendo variare gli indici del secondo e terzo gruppo, per modo che una linea qualunque della matrice sia:

$$(27)\quad \| Y_{h_1,\dots;1;1}, \dots, Y_{h_1,\dots;1;n}, \dots, Y_{h_1,\dots;n;n}\, Y_{h_1,\dots;11;1}, \dots, Y_{h_1,\dots;11;n}, \dots, Y_{h_1,\dots;11;11}, \dots \|$$

in luogo delle equazioni (20) o delle prime delle (21) bisognerà considerare le

$$(28)\qquad \sum \binom{j}{l}_{xy} \binom{j'}{l'}_{xy} \lambda_{ll'} = \binom{j}{l_1,\ l_2\ \dots}_{xy} \binom{i'}{l'_1,\ l'_2\ \dots}_{xy}$$

e indi sottrarre dalla colonna degli elementi $Y_{h_1,\dots;l_1 l_2,\,.\,;l'_1 l'_2,\dots}$ le prime n^2 colonne moltiplicate rispettivamente per le λ così determinate [le equazioni (28) sono risolubili per ragioni analoghe a quelle di sopra; il determinante dei coefficienti è un determinante di KRONECKER di quelli ora citati].

Si vede che il teorema può così intendersi definitivamente dimostrato.

---

*) Vedi il § 27 del mio citato trattato sui *Determinanti*.

Come conseguenza di esso abbiamo che *anche le matrici formate, nel solito modo, colle dedotte covarianti di un sistema covariante dato, hanno caratteristiche invarianti.*

In particolare si ha una proprietà delle dedotte covarianti a due gruppi di indici, cioè delle formazioni da noi nei lavori precedenti denominate *simboli secondarii.*

Se i gruppi di indici sono k, ma ognuno non può contenere che *un solo* indice, si ha una proprietà delle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante ma nel senso del Calcolo differenziale assoluto, perchè infatti in tal caso i sistemi covarianti nel nostro senso più esteso, diventano quelli del Calcolo assoluto *).

§ 6.

Costruzione dell'invariante simultaneo Λ.

Prima di terminare non vogliamo tralasciare di far osservare l'estensione della costruzione dell'invariante Λ che ha avuto un ufficio così importante nelle altre nostre precedenti ricerche sulle forme *lineari* nei differenziali δ.

Invece di considerare una espressione lineare nelle derivate parziali di una funzione, consideriamo una espressione multilineare nelle derivate parziali di varie funzioni diverse, cioè del tipo:

$$(29)\quad \Xi_{s_1,\ldots,s_k} \equiv \sum_{m=1}^{s_1} \cdots \sum_{p=1}^{s_k} \sum_{i,\ldots,j} \xi_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \frac{\partial^m f_1}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \cdots \frac{\partial^p f_k}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p}}.$$

Può dimostrarsi che *la espressione:*

$$(30)\quad \Lambda = \sum_{m=1}^{s_1} \cdots \sum_{p=1}^{s_k} \sum_{i,\ldots,j} X_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p} \xi_{i_1,\ldots,i_m;\ldots;j_1,\ldots,j_p}$$

è un invariante simultaneo di $X^{(r_1,\ldots,r_k)}$ *e* $\Xi_{s_1,\ldots,s_k}$, *ammesso che le* s *sieno sempre non maggiori delle corrispondenti* r.

La dimostrazione di questa proprietà importante è del resto perfettamente simile a quella che abbiamo fatta in altra occasione per $k = 1$, e quindi potremo dispensarci dal riportarla.

Ma si può dare una dimostrazione che fa dipendere questa proprietà da quella già dimostrata per il caso di $k = 1$.

Colla trasformazione di variabili la Ξ diventi coi coefficienti $\eta_{h_1,\ldots,h_\mu;\ldots;l_1,\ldots,l_\pi}$ i quali si esprimeranno mediante i ξ con formole che mostrano subito che *le* ξ *a* k *gruppi di indici si trasformano come i prodotti delle* ξ *a un solo gruppo di indici.*

Infatti sostituendo in (29) per le derivate rispetto alle x di $f_1, f_2, \ldots$ i loro valori espressi per le derivate rispetto alle y, la detta proprietà resta immediatamente dimostrata.

*) Vedi una mia recente Nota: *Sulle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante* [Atti Ist. Veneto, tomo XLV (1905-06), parte II, pp. 1117-1120].

Ricordando ora che un'analoga proprietà sussiste anche per i coefficienti X, si riconosce che la trasformazione di Λ dato da (30) si fa come quella del prodotto di tanti altri Λ ognuno relativo a delle X e ξ relativi ad un solo gruppo di indici; la invariantività di questi ultimi porta perciò con sè quella del Λ dato da (30).

Milano, luglio 1906.

E. PASCAL.