

# Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

---

## § 1.

### Die Aufgabe und Zusammenstellung der Resultate.

Die von Herrn Hilb in zwei gleichbetitelten Arbeiten<sup>1)</sup> untersuchte Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung soll im folgenden auf neue Art behandelt werden. Dabei wird die Laplacesche Transformation nicht benutzt, und die bei ihrer Verwendung auftretenden Ausnahmefälle werden restlos und einheitlich miterledigt. Die Methode ist ganz elementar und setzt auch von der allgemeinen Theorie der unendlichen Matrices nichts voraus. Auf eine dritte Art hat Herr Helge von Koch in einer Arbeit, die während der Drucklegung der gegenwärtigen erschienen ist, das Problem angegriffen<sup>2)</sup>.

Ist  $f(x)$  eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion, so läßt sich in wenigen Zeilen beweisen, daß der Ausdruck

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|f^{(\nu)}(x)|}$$

für alle  $x$  den gleichen Wert hat<sup>3)</sup>. Wir nennen ihn die *Stufe* der Funktion  $f(x)$ . Die Stufe kann auch  $\infty$  sein; doch beschäftigen wir uns in dieser Arbeit nur mit Funktionen endlicher Stufe.

Man erkennt sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

A. Ist  $f(x)$  von der Stufe  $q$ , so sind auch alle Ableitungen  $f^{(\mu)}(x)$  von der Stufe  $q$ .

---

<sup>1)</sup> Die erste steht Math. Annalen 82 (1920), S. 1—39; die zweite geht der gegenwärtigen Arbeit unmittelbar voran.

<sup>2)</sup> H. von Koch: Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 16 (1921).

<sup>3)</sup> Vgl. die Einleitung der ersten Hilbschen Arbeit.

**B.** Sind  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  zwei Funktionen, deren Stufen  $\leq q$  sind, so ist  $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$  ebenfalls höchstens von der Stufe  $q$ .

**C.** Ist  $f(x)$  von der Stufe  $q$ , so ist  $f(ax)$  von der Stufe  $|a|q$ .

**D.** Ist  $f_1(x)$  von der Stufe  $q_1$ ,  $f_2(x)$  von der Stufe  $q_2$ , so ist das Produkt  $f_1(x)f_2(x)$  höchstens von der Stufe  $q_1 + q_2$ .

**E.** Die ganzen rationalen Funktionen sind von der Stufe Null.

**F.** Die Funktion  $e^{\sigma x}$  ist von der Stufe  $|\sigma|$ .

Nach diesen Vorbemerkungen stellen wir im Anschluß an Herrn Hilb folgende *Aufgabe*<sup>4)</sup>:

In der Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu}(x) y^{(\nu)} = f(x)$$

sei  $f(x)$  eine ganze Funktion höchstens von der Stufe  $q$ . Die  $g_{\nu}(x)$  seien Polynome vom höchstens  $p$ -ten Grad

$$(2) \quad g_{\nu}(x) = \alpha_{\nu 0} + \alpha_{\nu 1} x + \dots + \alpha_{\nu p} x^p \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

und zwar mindestens eines *genau* vom  $p$ -ten Grad<sup>5)</sup>. Dabei seien die Koeffizienten  $\alpha_{\nu \lambda}$  so beschaffen, daß die  $p + 1$  Funktionen

$$(3) \quad h_{\lambda}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu \lambda} z^{\nu} \quad (\lambda = 0, 1, \dots, p)$$

für  $|z| \leq q$  regulär sind (die Konvergenzradien also *größer* als  $q$ ). Die Funktion  $h_p(z)$  verschwindet, da mindestens ein  $g_{\nu}(x)$  genau vom  $p$ -ten Grad ist, nicht identisch; die Anzahl ihrer Nullstellen im Bereich  $|z| \leq q$  sei  $n$  (mehrfache mehrfach gezählt). Gesucht sind Integrale der Differentialgleichung (1), die ganze Funktionen höchstens von der Stufe  $q$  sind.

Zunächst mögen die Ergebnisse in zwei Sätzen formuliert werden. Der erste bezieht sich auf die *homogene* Differentialgleichung, d. h. bei der  $f(x) = 0$  ist.

**Satz 1.** *Die homogene Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung hat genau  $n - p + s$  linear unabhängige Integrale, deren Stufe  $\leq q$  ist.*

<sup>4)</sup> Um den Vergleich mit der zweiten Hilbschen Arbeit zu erleichtern, habe ich mich ihr in der Bezeichnung möglichst angeschlossen. Doch schien mir eine Indexverschiebung zweckmäßig, derzufolge meine  $g_{\nu}(x)$ ,  $h_{\lambda}(z)$ ,  $\alpha_{\nu \lambda}$  mit den Hilbschen  $g_{\nu+1}(x)$ ,  $h_{\lambda+1}(z)$ ,  $\alpha_{\nu+1, \lambda+1}$  identisch werden; außerdem ist meine Anzahl  $n$  die Hilbsche Anzahl  $n + p$ .

<sup>5)</sup> Es ist nicht ausgeschlossen, daß  $g_{\nu}(x)$  für alle hinreichend großen  $\nu$  identisch verschwindet, so daß die Differentialgleichung (1) nur von endlicher Ordnung ist. Auch für Differentialgleichungen endlicher Ordnung sind die Resultate dieser Arbeit neu und nicht trivial.

Dabei bedeutet  $s$  die Anzahl der linear unabhängigen im Bereich  $|z| \leq q$  regulären Integrale der linearen Hilfsdifferentialgleichung  $p$ -ter Ordnung:

$$\sum_{\lambda=0}^p h_{\lambda}(z) \frac{d^{\lambda} \varphi(z)}{d z^{\lambda}} = 0.$$

Naturgemäß ist  $0 \leq s \leq p$ , so daß mindestens  $n - p$  und höchstens  $n$  Integrale vorhanden sind. Der zweite Satz bezieht sich auf die inhomogene Differentialgleichung und lautet<sup>6)</sup>:

**Satz 2.** Die Differentialgleichung (1) hat dann und nur dann bei jeder Wahl der Funktion  $f(x)$ , deren Stufe  $\leq q$  ist, Integrale  $y$ , deren Stufe  $\leq q$  ist, wenn die betreffende homogene Differentialgleichung genau  $n - p$  Integrale hat, d. h. nach Satz 1, wenn die dort angegebene Hilfsdifferentialgleichung kein im ganzen Bereich  $|z| \leq q$  reguläres Integral hat.

Das allgemeine Integral  $y$  hat dann die Form

$$y = y_0 + C_1 y_1 + \dots + C_{n-p} y_{n-p},$$

wo  $y_0$  ein beliebiges Partikulärintegral ist, und  $y_1, \dots, y_{n-p}$  die Integrale der homogenen Differentialgleichung sind, die aber im Fall  $n = p$  natürlich wegfallen.  $C_1, \dots, C_{n-p}$  sind willkürliche Konstanten.

Der zweite Teil von Satz 2 bedarf, wenn alles andere bewiesen ist, natürlich keines Beweises mehr; er ist nur der Vollständigkeit halber hergesetzt.

Beim Beweis der beiden Sätze genügt es offenbar, sich auf den Fall  $q = 1$  zu beschränken, da der allgemeine Fall, wie man sofort sieht, aus diesem hervorgeht, indem man  $x$  durch  $qx$  ersetzt.

<sup>6)</sup> Diesen Satz hatte ich bei der ursprünglichen (am 22. 3. 1921 bei der Redaktion eingegangenen) Fassung meines Manuskriptes als Vermutung ausgesprochen; der Beweis war mir nur mit gewissen Einschränkungen gelungen. Auch Satz 1 hatte ich nur dahin formuliert und bewiesen, daß mindestens  $n - p$  und höchstens  $n$  Integrale vorhanden sind. Als ich bald darauf den ganzen Beweis beider Sätze fand, habe ich mein Manuskript von der Redaktion zurückerbeten und entsprechend abgeändert. Mittlerweile hatte ich Herrn Hilb von meinem ursprünglichen Manuskript Kenntnis gegeben, und es ist ihm gelungen, durch eine Verschmelzung seiner und meiner Methode gleichzeitig mit mir ans selbe Ziel zu gelangen (vgl. seine dritte Mitteilung). Unsere Beweise der beiden Sätze stimmen in den meisten Zwischenstationen überein; doch werden die einzelnen Teilstrecken auf verschiedenen Wegen durchlaufen. (25. 4. 1921.) — Herr von Koch führt a. a. O. statt meiner Hilfsdifferentialgleichung die dazu adjungierte ein. Er gelangt, soviel ich sehe, ebenfalls zum Satz 2, während er an Stelle von Satz 1 nur findet, daß mindestens  $n - p$  Integrale vorhanden sind.

## § 2.

**Ein Hilfssatz über Summgleichungen.**

Die Grundlage meiner Methode ist der folgende Hilfssatz, den ich kürzlich auf ganz elementare Weise bewiesen habe<sup>7)</sup>:

Hilfssatz. *Die Koeffizienten der Summgleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\mu\nu}) x_{\mu+\nu} = c_{\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

mögen die Bedingungen erfüllen:

$$(I) \quad a_0 + b_{\mu 0} \neq 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(II) \quad |a_{\nu}| \leq G \vartheta^{\nu}$$

$$(III) \quad |b_{\mu\nu}| \leq k_{\mu} \vartheta^{\nu} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (II) \\ (III) \end{matrix}} \right\} \vartheta < 1,$$

$$(IV) \quad \lim_{\mu=\infty} k_{\mu} = 0,$$

$$(V) \quad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c_{\mu}|} \leq 1,$$

so daß jedenfalls die Funktion

$$(VI) \quad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

im Bereich  $|z| \leq 1$  regulär ist. Ist  $n (\geq 0)$  die Anzahl ihrer Nullstellen in diesem Bereich (mehrfache mehrfach gezählt), so enthält die allgemeine Lösung der Summgleichung mit der Nebenbedingung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_{\nu}|} \leq 1$$

genau  $n$  willkürliche Konstanten  $C_{\kappa}$  und hat die Form

$$x_{\nu} = x_{\nu 0} + \sum_{\kappa=1}^n C_{\kappa} x_{\nu \kappa}.$$

Ist  $M$  ein genügend großer Index, so gibt es eine und nur eine derartige Lösung, für welche die  $n$  Unbekannten  $x_M, x_{M+1}, \dots, x_{M+n-1}$  vorgegebene Werte haben.

Hiernach hat insbesondere die homogene Summgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\mu\nu}) x_{\mu+\nu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

<sup>7)</sup> Über Summgleichungen und Poincarésche Differenzgleichungen. Dieser Band, S. 1. Der Hilfssatz ist der dortige Satz 2; sein Beweis ist in den §§ 1, 3, 4 enthalten, § 2 ist dafür entbehrlich.

genau  $n$  linear unabhängige Lösungen  $x_\nu$  mit der Nebenbedingung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leq 1.$$

Wir bezeichnen diese (falls nicht  $n = 0$  ist) mit  $x_{\nu 1}, \dots, x_{\nu n}$  und können sie etwa dadurch festlegen, daß wir für einen hinreichend großen, aber festen Index  $M$

$$\begin{pmatrix} x_{M1}, x_{M+1,1}, \dots, x_{M+n-1,1} \\ x_{M2}, x_{M+1,2}, \dots, x_{M+n-1,2} \\ \dots \\ x_{Mn}, x_{M+1,n}, \dots, x_{M+n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

setzen.

### § 3.

#### Beweis der beiden Sätze.

Nach der Schlußbemerkung des § 1 dürfen wir  $q = 1$  setzen. In der Differentialgleichung (1) ist dann die ganze Funktion  $f(x)$  höchstens von der Stufe 1; wenn also

$$(4) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu!} x^\nu$$

gesetzt wird, so ist

$$(5) \quad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|d_\nu|} \leq 1.$$

Gesucht werden Integrale  $y$

$$(6) \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu!} x^\nu$$

der Differentialgleichung (1), deren Stufe ebenfalls  $\leq 1$  ist, so daß

$$(7) \quad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} \leq 1$$

sein muß. Da ferner die  $p + 1$  Funktionen  $h_\lambda(z)$  für  $|z| \leq 1$  regulär vorausgesetzt sind, ist

$$(8) \quad |\alpha_{\nu\lambda}| \leq G \vartheta^\nu \quad (\vartheta < 1).$$

Setzt man jetzt das Integral (6) in die Differentialgleichung (1) ein, so darf man wieder nach Potenzen von  $x$  ordnen. Dadurch erhält man zur Berechnung der Koeffizienten  $D_\nu$  das Gleichungssystem:

$$(9) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu\lambda} D_\nu = d_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \dots, p-1)^8),$$

<sup>8)</sup> Für  $p = 0$  fallen die Gleichungen (9) natürlich weg.

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\mu\nu}) D_{\mu+\nu} = c_{\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei die  $\gamma_{\nu\lambda}$ ,  $a_{\nu}$ ,  $b_{\mu\nu}$ ,  $c_{\mu}$  die folgende Bedeutung haben:

$$(11) \quad \gamma_{\nu\lambda} = \left( \alpha_{\nu\lambda} + \frac{\alpha_{\nu-1, \lambda-1}}{1!} + \dots + \frac{\alpha_{\nu-\lambda, 0}}{\lambda!} \right) \lambda!,$$

$$(12) \quad a_{\nu} = \alpha_{\nu p},$$

$$(13) \quad \begin{cases} b_{\mu 0} = 0, \\ b_{\mu \nu} = \frac{\alpha_{\nu-1, p-1}}{\mu+1} + \frac{\alpha_{\nu-2, p-2}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \dots + \frac{\alpha_{\nu-p, 0}}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+p)} \quad (\text{für } \nu \geq 1)^9, \end{cases}$$

$$(14) \quad c_{\mu} = \frac{\mu!}{(\mu+p)!} d_{\mu+p}.$$

Soweit die hier auftretenden  $\alpha$  einen negativen ersten Index haben, sind sie durch Null zu ersetzen.

Hiernach ist wegen (8)

$$|a_{\nu}| \leq G \vartheta^{\nu}, \quad |b_{\mu\nu}| \leq \frac{p G \vartheta^{\nu-p}}{\mu+1},$$

und wegen (14) und (5)

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c_{\mu}|} \leq 1.$$

Die Summengleichung (10) erfüllt somit gerade die Bedingungen unseres Hilfssatzes, wenn wir noch voraussetzen, daß  $\alpha_{0p} \neq 0$  ist. *Diese Voraussetzung soll vorläufig gemacht werden*, wobei man beachte, daß sie von der Transformation, welche den allgemeinen Fall auf den Fall  $q=1$  zurückführt, unabhängig ist.

Nun untersuchen wir zunächst die *homogene* Differentialgleichung; sei also  $f(x) = 0$ , daher  $d_{\mu} = 0$ ,  $c_{\mu} = 0$ . Dann ist die Summengleichung (10) ebenfalls homogen und sie hat nach unserem Hilfssatz genau  $n$  linear unabhängige Lösungen  $D_{\nu}$  mit der Nebenbedingung (7), weil ja jetzt

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu p} z^{\nu} = h_p(z)$$

ist, also nach Voraussetzung  $n$  Nullstellen im Bereich  $|z| \leq 1$  hat. Diese  $n$  Lösungen seien, falls nicht  $n=0$  ist<sup>10</sup>),  $D_{\nu_1}, \dots, D_{\nu_n}$ ; wir können sie dadurch festlegen, daß wir nach Wahl eines genügend großen Index  $M$

<sup>9</sup>) Falls  $p=0$ , ist  $b_{\mu\nu} = 0$  zu setzen.

<sup>10</sup>) Für  $n=0$  hat (10) mit  $c_{\mu} = 0$  nur die triviale Lösung  $D_{\nu} = 0$ . Also gibt es auch keine Integrale der homogenen Differentialgleichung außer  $y=0$ . Damit ist für  $n=0$  der Satz 1 bereits bewiesen, da in diesem Fall offenbar  $s=p$  ist.

$$(15) \quad \begin{pmatrix} D_{M1}, & D_{M+1,1}, & \dots, & D_{M+n-1,1} \\ D_{M2}, & D_{M+1,2}, & \dots, & D_{M+n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{Mn}, & D_{M+1,n}, & \dots, & D_{M+n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

setzen. Die allgemeine Lösung der (homogen gemachten) Summgleichung (10) mit der Nebenbedingung (7) ist dann

$$(16) \quad D_v = \sum_{z=1}^n C_z D_{vz},$$

wo  $C_1, \dots, C_n$  willkürliche Konstanten sind.

Nun sind aber noch die  $p$  Gleichungen (9) zu befriedigen<sup>11)</sup>, die jetzt ebenfalls homogen sind ( $d_\lambda = 0$ ). Setzt man in diese für  $D_v$  den Ausdruck (16) ein, so ist die entstehende Reihe wegen (7) absolut konvergent, und man erhält zur Berechnung der  $n$  Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  die  $p$  linearen homogenen Gleichungen

$$(17) \quad \sum_{z=1}^n \omega_{\lambda z} C_z = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots, p-1),$$

wobei

$$(18) \quad \omega_{\lambda z} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{v\lambda} D_{vz}.$$

Im nächsten Paragraphen werden wir die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (17)

$$(19) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \omega_{01}, & \omega_{02}, & \dots, & \omega_{0n} \\ \omega_{11}, & \omega_{12}, & \dots, & \omega_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p-1,1}, & \omega_{p-1,2}, & \dots, & \omega_{p-1,n} \end{array} \right\|$$

untersuchen und zeigen, daß ihr Rang gleich  $p - s$  ist, wo  $s$  die in Satz 1 angegebene Bedeutung hat. Nehmen wir das vorläufig als bewiesen an, so bleiben von den Konstanten  $C_z$  noch  $n - p + s$  willkürlich. So groß ist also die Anzahl der linear unabhängigen Integrale (6), und damit ist Satz 1 bewiesen.<sup>12)</sup>

Wir wenden uns jetzt zu der *inhomogenen* Differentialgleichung (1).

<sup>11)</sup> Der Fall  $p = 0$  erübrigt sich. Denn weil dann offenbar auch  $s = 0$  ist, weil außerdem die Gleichungen (9) wegfallen, also keine Bedingungen mehr zu befriedigen sind, ist Satz 1 für diesen Fall durch die vorausgehenden Betrachtungen schon erledigt.

<sup>12)</sup> Zunächst nur unter der Voraussetzung  $\alpha_{0p} \neq 0$ , von der wir uns aber in § 5 befreien werden.

Dann hat die allgemeine Lösung der Summengleichung (10) nach unserem Hilfssatz die Form

$$D_\nu = D_{\nu 0} + \sum_{\kappa=1}^n C_\kappa D_{\nu \kappa}.$$

Setzt man das in (9) ein, so ergeben sich für die  $n$  Konstanten  $C_\kappa$  wieder  $p$  lineare Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix (19)<sup>13</sup>). Sie sind bekanntlich dann und nur dann bei *beliebiger* Wahl der Werte auf der rechten Seite auflösbar, wenn der Rang  $p - s$  gleich  $p$  ist, also für  $s = 0$ . Damit ist auch Satz 2 bewiesen<sup>12</sup>).

#### § 4.

#### Der Rang der Matrix (19).

Es muß jetzt gezeigt werden, daß der Rang der Matrix (19) gleich  $p - s$  ist. Zu dem Zweck betrachten wir wieder die homogen gemachten Gleichungen (9), (10), wo also  $d_\lambda = 0$ ,  $c_\mu = 0$  ist, und fragen, wie viele lineare Verbindungen der  $p$  Gleichungen (9) durch alle  $n$  Lösungen von (10) befriedigt werden. Sind  $P_0, P_1, \dots, P_{p-1}$  die Koeffizienten einer solchen linearen Verbindung, so handelt es sich also darum, ob die Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu \lambda} D_\nu \right) P_\lambda = 0$$

für alle  $n$  Lösungen  $D_\nu = D_{\nu \kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ) erfüllt ist, ob also das Gleichungssystem besteht:

$$(20) \quad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \omega_{\lambda \kappa} P_\lambda = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n),$$

wo  $\omega_{\lambda \kappa}$  wieder die in (18) angegebene Bedeutung hat.

Nun bestimmen wir gewisse Größen  $P_p, P_{p+1}, \dots$  rekursorisch aus dem Gleichungssystem

$$(21) \quad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_{\nu \lambda} P_\lambda = - \sum_{\mu=0}^{\nu} (a_{\nu-\mu} + b_{\mu, \nu-\mu}) \frac{(\mu+p)!}{\mu!} P_{p+\mu},$$

was wegen  $a_0 + b_{\nu 0} = \alpha_{0p} \neq 0$  möglich ist. Setzt man hier für  $\gamma_{\nu \lambda}$ ,  $a_{\nu-\mu}$ ,  $b_{\mu, \nu-\mu}$  die Werte aus (11), (12), (13) ein, so geht (21) über in:

$$(21a) \quad \sum_{\mu=0}^{p+\nu} [\alpha_{\nu-\mu, 0} + \alpha_{\nu-\mu+1, 1} \mu + \alpha_{\nu-\mu+2, 2} \mu(\mu-1) + \dots \\ + \alpha_{\nu-\mu+p, p} \mu(\mu-1) \dots (\mu-p+1)] P_\mu = 0 \\ (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

<sup>13</sup>) Die Fälle  $n = 0$  und  $p = 0$  erledigen sich wieder ohne weiteres.



Diese Gleichung besagt aber, daß die Funktion

$$(22) \quad \varphi(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_{\mu} z^{\mu}$$

ein Integral der in Satz 1 eingeführten linearen Hilfsdifferentialgleichung  $p$ -ter Ordnung

$$(23) \quad \sum_{\lambda=0}^p h_{\lambda}(z) \frac{d^{\lambda} \varphi(z)}{dz^{\lambda}} = 0$$

ist. Da die Gleichung (23) genau  $s$  für  $|z| \leq 1$  reguläre Integrale haben soll, kann man die Größen  $P_0, P_1, \dots, P_{p-1}$  auf  $s$  unabhängige Arten so wählen, daß der Konvergenzradius der Reihe (22) größer als 1 wird, also

$$(24) \quad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|P_{\mu}|} < 1.$$

Dann zeigt sich aber, daß die Gleichungen (20) erfüllt sind, die daher mindestens  $s$  linear unabhängige Lösungen haben. In der Tat verbürgt die Ungleichung (24) die absolute Konvergenz der nachstehenden Doppelreihe, so daß die vorgenommene Gliederumstellung erlaubt ist, und man erhält:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{p-1} \omega_{\lambda\nu} P_{\lambda} &= \sum_{\lambda=0}^{p-1} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu\lambda} D_{\nu\lambda} \right) P_{\lambda} && \text{(nach (18))} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_{\nu\lambda} P_{\lambda} \right) D_{\nu\nu} \\ &= - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} (a_{\nu-\mu} + b_{\mu, \nu-\mu}) \frac{(\mu+p)!}{\mu!} P_{p+\mu} D_{\nu\nu} && \text{(nach (21))} \\ &= - \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\mu\nu}) D_{\mu+\nu, \nu} \right) \frac{(\mu+p)!}{\mu!} P_{p+\mu} = 0, \end{aligned}$$

da ja die innere Summe verschwindet. Da die Gleichungen (20) somit mindestens  $s$  linear unabhängige Lösungen haben, ist der Rang des Koeffizientensystems, also auch der Rang der Matrix (19) höchstens  $p - s$ .

Um zu zeigen, daß er auch mindestens  $p - s$  ist, betrachten wir die Differentialgleichung

$$(25) \quad \frac{d^{M+n}}{dz^{M+n}} \left( \sum_{\lambda=0}^p h_{\lambda}(z) \frac{d^{\lambda} \varphi(z)}{dz^{\lambda}} \right) = 0,$$

wo  $M$  die seitherige Bedeutung hat (vgl. (15)). Die Gleichung (25) ist linear homogen und von der Ordnung  $M + n + p$ . Ihre Koeffizienten sind im Bereich  $|z| \leq 1$  regulär, und der Koeffizient der höchsten Ab-

leitung hat daselbst  $n$  Nullstellen; also hat die Gleichung mindestens  $M + p$  Integrale, die für  $|z| \leq 1$  regulär sind<sup>14</sup>). Für diese Integrale  $\varphi(z)$  wird der Ausdruck

$$\sum_{\lambda=0}^p h_{\lambda}(z) \frac{d^{\lambda} \varphi(z)}{dz^{\lambda}}$$

ein Polynom vom höchstens  $(M + n - 1)$ -ten Grad. Durch lineare Verbindung erhält man noch mindestens  $p$  Integrale, für die das Polynom den Faktor  $z^M$  hat. Solche  $p$  Integrale seien  $\varphi_1(z), \dots, \varphi_p(z)$ . Dann ist also

$$(26) \quad \sum_{\lambda=0}^p h_{\lambda}(z) \frac{d^{\lambda} \varphi_{\varrho}(z)}{dz^{\lambda}} = \sum_{\nu=M}^{M+n-1} B_{\nu\varrho} z^{\nu} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, p),$$

wo die  $B_{\nu\varrho}$  gewisse Konstanten sind. Der Rang der Matrix

$$(27) \quad \begin{vmatrix} B_{M1}, & B_{M+1,1}, & \dots, & B_{M+n-1,1} \\ B_{M2}, & B_{M+1,2}, & \dots, & B_{M+n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{Mp}, & B_{M+1,p}, & \dots, & B_{M+n-1,p} \end{vmatrix}$$

ist  $\geq p - s$ ; denn andernfalls könnte man durch lineare Verbindung der  $p$  Gleichungen (26) mehr als  $s$  Integrale der homogenen Gleichung (23) herleiten, während diese doch bloß  $s$  hat. Setzt man

$$(28) \quad \varphi_{\varrho}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu\varrho} z^{\nu} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, p)$$

und führt das in (26) ein, so ergibt sich analog zu (21a):

$$\sum_{\mu=0}^{p+\nu} [\alpha_{\nu-\mu,0} + \alpha_{\nu-\mu+1,1} \mu + \alpha_{\nu-\mu+2,2} \mu(\mu-1) + \dots + \alpha_{\nu-\mu+p,p} \mu(\mu-1)\dots(\mu-p+1)] P_{\mu\varrho} = B_{\nu\varrho},$$

wobei  $B_{\nu\varrho}$  für  $\nu < M$  und  $\nu > M + n - 1$  durch 0 zu ersetzen ist. Analog zu (21) kann man statt der letzten Gleichung auch schreiben:

$$(29) \quad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_{\nu\lambda} P_{\lambda\varrho} = - \sum_{\mu=0}^{\nu} (a_{\nu-\mu} + b_{\mu,\nu-\mu}) \frac{(\mu+p)!}{\mu!} P_{\mu+\nu,\varrho} + B_{\nu\varrho}.$$

Multipliziert man (29) mit  $D_{\nu\kappa}$  und summiert nach  $\nu$  von 0 bis  $\infty$ ,

<sup>14</sup>) Nach Satz 2 meiner Arbeit: „Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten“, *Math. Annalen* 70 (1911), S. 1–32. Einen erheblichen Teil meines Beweises hat kürzlich Herr Hilb in einer gleichbetitelten Arbeit wesentlich vereinfacht, *Math. Annalen* 82 (1921), S. 40 und 41.

so verschwindet genau wie vorhin S. 39 rechts wieder die Doppelreihe und man erhält:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_{\nu\lambda} P_{\lambda\varrho} \right) D_{\nu\kappa} = \sum_{\nu=M}^{M+n-1} B_{\nu\varrho} D_{\nu\kappa}.$$

Hier ist aber die rechte Seite wegen (15) gleich  $B_{M+\kappa-1, \varrho}$ , und die linke Seite gleich  $\sum_{\lambda=0}^{p-1} \omega_{\lambda\kappa} P_{\lambda\varrho}$ , wie man aus den zwei ersten Zeilen der Gleichungskette auf S. 39 ersieht. Also

$$(30) \quad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \omega_{\lambda\kappa} P_{\lambda\varrho} = B_{M+\kappa-1, \varrho} \quad \left( \begin{array}{l} \kappa = 1, 2, \dots, n \\ \varrho = 1, 2, \dots, p \end{array} \right).$$

Da der Rang der Matrix (27)  $\geq p - s$  gefunden wurde, sind die  $(p - s)$ -reihigen Determinanten dieser Matrix nicht alle Null. Diese Determinanten setzen sich aber wegen (30) nach bekannten Determinantensätzen linear homogen zusammen aus gewissen  $(p - s)$ -reihigen Determinanten der Matrix (19), die also auch nicht alle verschwinden können. Somit ist auch der Rang der Matrix (19)  $\geq p - s$ . W. z. b. w.

## § 5.

### Nachträgliche Befreiung von einer einschränkenden Voraussetzung.

In den beiden letzten Paragraphen sind die Sätze 1 und 2 unter der einschränkenden Annahme bewiesen, daß  $\alpha_{0p} \neq 0$  ist. Um uns jetzt von dieser Einschränkung zu befreien, machen wir die Substitution

$$(31) \quad y = e^{\sigma x} Y,$$

wodurch die Differentialgleichung (1) übergeht in die folgende:

$$(32) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{h_0^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!} + \frac{h_1^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!} x + \dots + \frac{h_p^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!} x^p \right) Y^{(\nu)} = f(x) e^{-\sigma x}.$$

Das ist eine Differentialgleichung der gleichen Bauart wie (1). An die Stelle der Funktion  $f(x)$ , deren Stufe  $\leq q$  sein sollte, ist die Funktion  $f(x) e^{-\sigma x}$  getreten, deren Stufe dann  $\leq q + |\sigma|$  ist (vgl. S. 32 die Sätze D und F). An die Stelle von  $\alpha_{0p}$  ist  $h_p(\sigma)$ , endlich an die Stelle der Funktionen

$$h_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu\lambda} z^\nu$$

sind die Funktionen

$$\psi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\lambda^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!} z^\nu = h_\lambda(\sigma + z)$$

getreten, die im Bereich  $|z| \leq q + |\sigma|$  regulär sind, sofern nur  $|\sigma|$  klein genug gewählt ist. Auch hat dann die Funktion  $\psi_p(z) = h_p(\sigma + z)$  im Bereich  $|z| \leq q + |\sigma|$  genau  $n$  Nullstellen. Nun kann man offenbar  $\sigma$  absolut beliebig klein und so wählen, daß  $h_p(\sigma) \neq 0$  ist. Für die Differentialgleichung (32) ist dann die einschränkende Voraussetzung erfüllt, die wir in den beiden letzten Paragraphen machen mußten. Für sie gelten daher die betreffenden Existenzsätze, wobei die Stufe der Integrale  $Y$  höchstens  $q + |\sigma|$  ist. Diesen Integralen  $Y$  entsprechen aber vermöge (31) Integrale  $y$  von (1), deren Stufe  $\leq q + 2|\sigma|$  ist. Da aber  $|\sigma|$  beliebig klein sein darf, ist die Stufe der Integrale  $y$  sogar  $\leq q$ . In der Tat kann man z. B. im Fall des Satzes 1 folgendermaßen schließen:

Es gibt genau  $n - p + s$  Integrale  $y_1, \dots, y_{n-p+s}$ , deren Stufe  $\leq q + 2|\sigma|$  ist. Wenn eines darunter wäre, dessen Stufe  $> q$ , etwa gleich  $q + \tau$  ist, so würden weniger als  $n - p + s$  Integrale übrigbleiben, deren Stufe  $< q + \tau$  ist. In Wahrheit gibt es aber doch  $n - p + s$  solche Integrale, da man ja  $|\sigma|$  auch entsprechend kleiner, insbesondere  $|\sigma| < \frac{\tau}{2}$  wählen kann.

(Eingegangen am 22. 3. 1921.)