

II. Ueber den allgemeinen Fortschritt der Fransen in dünnen Quarz- und Kalkspathplatten, welche unter einem beliebigen Winkel mit der optischen Axe zugeschnitten sind;
von Freyss und Schlagdenhauffen.

1. **B**ringt man zwischen den Polarisator und den Analysator eines passenden Polarisations-Apparates eine dünne paralleelseitige Platte, welche aus einem doppeltbrechenden Krystalle geschnitten ist, so sieht man homochromatische Fransen mit oder ohne neutrale Linien. Diese Phänomene kann man auf vielerlei Arten vermännichfaltigen, durch den Stoff des Krystalles, die Neigung des Schnittes gegen die optische Axe, die relativen Stellungen der Hauptschnitte des Polarisators, der Platte und des Analysators, das Aufeinanderlegen zweier Platten unter verschiedenen Bedingungen, u. s. w.; sehr viele solcher Beobachtungen sind gemacht worden, und mehrere einzelne Fälle hat man erklärt. Da wir nun bemerken, daß in den einaxigen Krystallen die Fransen kreisförmig sind, wenn die Axe winkelrecht ist, hyperbolisch, wenn sie parallel ist, und krummlinige Streifen bilden, wenn sie eine Neigung von 45° hat, so haben wir uns in dieser Abhandlung vorgenommen, die ununterbrochene Verwandlung der kreisförmigen Fransen in hyperbolische zu erforschen, wann die Axe, zuerst auf der Platte winkelrecht, sich immer mehr neigt bis sie parallel wird:

Unsere Beobachtungen haben wir mit der Turmalinzange und der Flamme des gesalzenen Alkohols gemacht, da uns sonst kein anderer Apparat zu Gebote stand.

2. Nennen wir, Fig 1 Taf. II, in horizontalem Durchschnitte, *FL* die Flamme des Alkohols, *PP* den Polarisations-Turmalin, *CC* die Krystallplatte, *AA* den Analysator-Turmalin, *O* das optische Centrum des Auges, welches in der geometrischen Axe *OF* des Apparates steht. Die Strah-

len, welche ein beliebiger Punkt L der Flamme ausgiebt, bilden einen konisch divergirenden Büschel, welcher in dem Auge auf einen Punkt l der Netzhaut convergirt; die Axe dieses Büschels ist der Strahl Ll , welcher durch das optische Centrum O geht, ohne von seiner Richtung abzuweichen: er erleidet nur eine Verrückung seitwärts durch die Brechkraft der Turmalinzange. Diesen einzigen Mittelstrahl ins Auge fassend, wollen wir nun seinen Gang in dem oben erwähnten Apparate untersuchen.

Der Punkt L der Flamme, Fig. 2 Taf. II, sendet einen Strahl LI aus, welcher durch den Turmalin PP zerlegt wird, einerseits in einen gewöhnlichen Strahl IO nach dem Hauptschnitte polarisirt, andererseits in einen aufsergewöhnlichen IE , nach dem Perpendiculärschnitte polarisirt; der gewöhnliche Strahl wird durch den Turmalin ausgelöscht, der aufsergewöhnliche allein entweicht nach EK mit seiner einfallenden Richtung gleichlaufend; während er die Platte CC durchläuft, wird er doppelt gebrochen; der gewöhnliche und der aufsergewöhnliche Strahl haben jeder eine besondere Richtung und Schnelligkeit im Innern der Platte, und dadurch erhalten sie einen gewissen Gangunterschied; die ausfahrenden Strahlen FL und $F'L'$ sind polarisirt, der eine in dem Hauptschnitte der Platte, der andere in einer auf den Hauptschnitt senkrechten Ebene. Der Analysator AA zerlegt jeden der beiden Strahlen, aber er löscht die gewöhnlichen Strahlen aus, und läßt nur die aufsergewöhnlichen LM und $L'M'$ durchlaufen, welche nach MN und $M'N'$ austreten. Diese austretenden Strahlen behalten den Gangunterschied, welche sie in ihrem Laufe durch die Platte erhalten haben, aber sie polarisiren sich beide in dem Perpendiculärschnitte des Analysators; jedoch interferiren sie nicht, weil sie zu weit von einander stehen. Wenn wir aber den Strahl $LKFN$ mit sich selbst gleichlaufend herabrücken, so daß der Punkt F auf F' fällt, wird er die Richtung $L'K'F'N'$ annehmen, und mit dem Strahle $LKF'N'$ von dem Punkt F' an coëndiciren; die Interferenz

wird nun stattfinden, wenn die zwei Strahlen aus dem Analysator treten.

Die Interferenz wird also durch zwei parallele und sehr benachbarte Strahlen LI und $L'I'$ hervorgebracht, deren einer gewöhnlich durch die Platte CC gebrochen wird, der andere aufsergewöhnlich, und welche sich in F' auf der zweiten Fläche der Platte vereinigen, von wo an sie in ihrem fernerem Gange coïncidiren.

3. Die Lichtstärke des ausfahrenden Strahls $M'N'$, welcher aus der Interferenz entsteht, erhält man durch die Formel

$$I = \sin^2 \beta + \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda};$$

δ ist der Gangunterschied; α und β sind die Winkel, welche respectiv die Hauptschnitte der Platte und des Analysators mit der ursprünglichen Polarisationssebene bilden (diese Polarisationssebene ist der Perpendiculärschnitt des Polarisator-Turmalins.)

Im Raume sind die Fransen konische Oberflächen, deren Scheitelpunkt das Centrum des Auges ist und deren Zeugenlinien die Interferenzstrahlen von gleicher Lichtstärke sind; die Mittellinien der hellen und dunklen Fransen entsprechen den Maxima und den Minima der Lichtstärke. Wenn man nun bei einer Beobachtung der Platte und dem Analysator gewisse Stellungen giebt, so nehmen die Winkel α und β bestimmte Werthe an, und die Fransen, welche man sieht, sind die geometrischen Oerter der Strahlen, welche den nämlichen Gangunterschied δ haben; kreuzt man z. B. die Turmaline, und stellt man den Hauptschnitt der Platte zu 45° , (welche Stellung das Phänomen am besten erzeugt) so hat man $\beta = 0$, $\alpha = 45^\circ$, und die Formel wird

$$I = \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}.$$

Die Mittellinien der hellen Fransen entsprechen alsdann $\delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, diejenigen der dunklen Fransen $\delta = 2n \frac{\lambda}{2}$.

Sind die Turmaline im Gegentheile parallel, so hat man $\beta = 90$ und $I = \cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}$; die Mittellinien der hellen Fransen entsprechen $\delta = 2n \frac{\lambda}{2}$, die der dunklen $\delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$.

4. Um die Form der Fransen zu bestimmen, ist also der Gangunterschied δ zu berechnen. Nennen wir (Fig. 3 Taf. II) CC die Krystallplatte, EK und $E'K'$ die zwei einfallenden parallelen Strahlen der Fig. 2, welche nach KF' und $K'F'$ gebrochen werden, und nach $F'L'$ auslaufen. Die Berechnung von I setzt voraus, daß die einfallenden Strahlen die nämliche Schwingungsweite haben; wir wollen ferner voraussetzen, daß sie den nämlichen Gang haben, d. h., daß wenn man KB senkrecht auf $E'K'$ zieht, die Punkte K und B in übereinstimmender Schwingung sind.

Dies vorausgesetzt, durchläuft der eine Strahl in der Luft den Weg BK' mit einer Schnelligkeit, welche wir $= 1$ setzen wollen, und in dem Krystalle den Weg $K'F'$ mit einer ihm eigenen Schnelligkeit; der andere Strahl durchläuft in dem Krystalle den Weg KF' mit einer anderen Schnelligkeit. Wir nehmen an, daß der Weg, welchen der Erste in der Luft durchläuft, durch das Wegübermaafs, das der zweite im Krystalle durchläuft, ausgeglichen werde. Diese Approximation kann man auf folgende Art rechtfertigen.

Ziehen wir $B'K'$ perpendicularär auf KF' , so haben wir $KB' = KK' \sin KK'B'$ und $BK' = KK' \sin BKK'$.

Nun ist BKK' der Einfallswinkel des Strahles EK , und $KK'B'$ ist sein Brechungswinkel; bezeichnet also n den Brechungsindex, so hat man $\sin BKK' = n \sin KK'B'$, und demzufolge $BK' = n KK' \sin KK'B' = n KB'$. Da nun der gebrochene Strahl den Weg KB' mit einer Schnelligkeit $\frac{1}{n}$ durchläuft, so hat er den nämlichen Gang, wie wenn er in der Luft einen Weg $nKB' = BK'$ durchlaufen hätte.

Andererseits ist der Unterschied zwischen der perpendicularären Linie $F'B'$ und der schiefen $F'K'$ sehr gering, und kann vernachlässigt werden, wegen des kleinen Werthes

des Winkels $K'F'B'$, welcher um so kleiner ist als die Einfallsneigung und die Doppelbrechkraft des Krystalls selbst geringer sind. Diese Approximation kommt darauf hinaus, den beiden Strahlen den nämlichen geometrischen Gang anzuweisen, so wohl außer dem Krystall als innerlich; der Gangunterschied wird nur aus dem Unterschiede des gewöhnlichen und des aufsergewöhnlichen Brechindices entstehen. Da der geometrische Gang des gewöhnlichen Strahls für die Berechnung am bequemsten ist, so haben wir denselben gewählt.

5. Das Problem also vereinfacht, wird der Gangunterschied durch die Formel $(m - \mu)e'$ ausgedrückt, in der m und μ respectiv der gewöhnliche und der aufsergewöhnliche Brechungsindex sind, und e' die durchlaufene Dicke.

Die Dicke e' berechnet sich leicht; wenn e die Dicke KD der Platte ist (Fig. 4 Taf. II), r der Brechungswinkel DKF' so hat man $e' = \frac{e}{\cos r}$. Der Brechungsindex m ist

bestimmt. Der Index μ muß aus den Principalindexen und aus der Neigung der optischen Axe berechnet werden. Nennen wir (Fig. 5 Taf. II), CBD die Fläche des Krystalls, LEK die Einfallsebene und LI den Einfallsstrahl, $NIA'A$ den Hauptschnitt und IA die Richtung der Axe; bezeichnen wir durch i den Einfallswinkel LIN , durch ψ die Neigung der Axe AIA' , durch π das Azimut der Einfallsebene $A'IK$. Die Huyghens'sche Construction bestimmt den aufsergewöhnlichen Strahl. Denken wir uns um den Punkt I als Centrum ein Revolutions-Ellipsoïd, dessen Axe IA ist; die Axen der Meridian-Ellipse sind $a = \frac{1}{m}$, $b = \frac{1}{m'}$, wenn m und m' die Hauptindexe bezeichnen. Führen wir durch den Punkt I die einfallende Welle, deren Spur auf der Einfallsebene, die Linie IM , auf LI perpendicular ist. Im Winkel MIK sey eine Linie MK , auf IM perpendicular, und $= 1$, gezogen (wir setzen die Schnelligkeit des Lichtes in der Luft $= 1$); durch den Punkt K und in der Fläche des Krystalls, sey DB perpendicular auf IK gezo-

gen; endlich führen wir durch DB eine das Ellipsoid tangierende Ebene, und sey R der Tangenzpunkt; der außerwöhnliche Strahl wird nach IR gerichtet seyn, und sein Index ist $\mu = \frac{1}{IR}$.

Wir müssen also $\frac{1}{IR}$ berechnen aus den gegebenen Quantitäten m, m', i, π, ψ . Führen wir (Fig. 5 Taf. II) eine Linie ID perpendicular auf IB und demzufolge auf IA . Nehmen wir IA für Z -Axe, ID für X -Axe und für Y -Axe eine Linie IY , die auf den beiden vorhergehenden perpendicular ist (Fig. 6); dann ziehen wir in der Fig. 6 die Linien IB, BD, IK der Fig. 5 Taf. II.

Durch die Linie BD soll eine Ebene geführt werden, die das um IZ beschriebene Revolutions-Ellipsoid tangirt, und dann muß die Länge des Trägerstrahls, der auf den Berührungspunkt zuläuft, berechnet werden. Ohne diese Rechnung ausführlich niederzuschreiben, geben wir nur folgende Resultate:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{e} = & \frac{P^2 - bp}{P^2 b} + \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{P^2 N^4} \sin i \cos \pi \\ & + \frac{a^2 b p (a^2 p^2 - P^4) + b^2 (P^2 - bp) P^4}{2 P^6 b} \sin^2 i \\ & + \frac{a^4 N^4 (b^4 - p^4) - a^2 P^4 N^6 (b^2 - p^2) - 5 a^4 b^4 (a^2 - b^2)^2 P^4}{2 p N^6 P^6} \sin^2 i \cos^2 \pi \end{aligned}$$

$$\text{wo } p^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi, \quad P^4 = a^4 \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \psi, \\ N^4 = a^4 \cot \psi + b^4 \tan \psi;$$

alle Potenzen von $\sin i$, die die zweite übersteigen, sind vernachlässigt worden.

6. Wir haben gesehen, daß eine Franse eine konische Oberfläche ist, deren Scheitelpunkt das optische Centrum des Auges ist, und deren Zeugelinien die Interferenzstrahlen von gleicher Lichtstärke sind. Das Auge sieht die Fransen nach dem Durchschnitte dieser Oberfläche mit einer Ebene V (Fig. 7), welcher senkrecht auf der Axe des Apparats in der Gesichtswerte OD steht. Suchen wir also die Gleichung dieses Durchschnittees.

Nehmen wir (Fig. 7) für X -Axe die Linie DX , Spur des Hauptschnittes der Platte auf der Ebene V ; für Y -Axe eine Linie DY , senkrecht auf DX . Betrachten wir einen Strahl LO , Zeugelinie der Oberfläche, und verlängern wir ihn bis M , wo er auf die Ebene V stößt. Da die Linie OD auf der Platte senkrecht ist, so ist der Winkel MOD dem Einfallswinkel i gleich, und die Ebene MDO ist die Einfallsebene; da ODX der Hauptschnitt ist, so hat man $MDX = \pi$. Dieses vorausgesetzt, ziehen wir die Coordinaten x und y des Punktes M , so haben wir $x = MD \cos \pi$, $y = MD \sin \pi$, $MD = OD \operatorname{tg} i = OD \sin i$, wenn der Winkel i gering genug ist. Demzufolge, wenn wir $OD = 1$ setzen, $x = \sin i \cos \pi$, $y = \sin i \sin \pi$. Setzt man nun diese Werthe in die allgemeine Gleichung des Gangunterschiedes, so erhält man die Gleichung der Fransen, welche von folgender Form ist

$$Ay^2 + Bx^2 + Cx + D + \frac{\delta}{e} = 0.$$

7. Die Coëfficienten sind zu complicirt, als dafs man die Gleichung unter dieser allgemeinen Form discutiren könnte. Wir haben sie mit Zahlen auf zwei bestimmte Fälle angewendet, den Quarz und den Kalkspath, welche die Typen der positiven und der negativen Krystalle vorstellen.

Für jeden Coëfficienten haben wir die Zahlenwerthe berechnet, welche er annimmt, wenn ψ von 10 zu 10 Graden zunimmt; wir haben alsdann die Werthe von ψ als Abscisse, die des Coëfficienten als Ordinaten genommen, und eine Reihe von Punkten erhalten, durch welche wir eine ununterbrochene Linie gezogen haben; dann haben wir eine Interpolationsformel gesucht, welche diese Linie auf eine einfachere Art darstellt als der allgemeine Ausdruck des Coëfficienten. Endlich haben wir die Interpolationsformel an die Stelle des Coëfficienten in die Gleichung der Fransen gesetzt, und so folgende Gleichungen erhalten.

$$\begin{aligned} \text{Quarz. } & (0,00283 - 0,00091 \cos 2\psi) y^2 + (0,00090 \\ & - 0,00284 \cos 2\psi) x^2 + 0,00592 \sin 2\psi \cdot x \\ & + 0,00916 \cos^2 \psi + \frac{\delta}{e} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Kalkspath.} & \left. \begin{array}{l} - 0,05242 \\ + 0,03062 \cos 2\psi \\ - 0,00965 \cos^2 2\psi \end{array} \right\} y^2 & \left. \begin{array}{l} + 0,00546 \\ + 0,05731 \cos 2\psi \\ - 0,04083 \cos^2 2\psi \end{array} \right\} x^2 \\
 & \left. \begin{array}{l} - 0,11094 \sin 2\psi \\ + 0,03582 \sin 2\psi \cos 2\psi \end{array} \right\} x & \begin{array}{l} - 0,17353 \cos^2 \psi + \frac{\delta}{e} = 0 \\ - 0,01682 \sin^2 2\psi \end{array}
 \end{array}$$

8. Hier außerdem zwei Beispiele von Berechnung der Coëfficienten, das erste sich auf den Quarz beziehend, das zweite auf den Kalkspath:

Quarz; Coëfficient von y^2 . — Die allgemeine Formel giebt

$$A = \frac{-a^2 b p (a^2 p^2 - P^4) - b^2 (P^2 - b p) P^4}{2 P^6 b}$$

wo $p^2 = a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi$ $P^4 = a^4 \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \psi$.

Setzt man nach und nach $\psi = 0^\circ, 10^\circ \dots 90^\circ$, so erhält man die Werthe von A , welche sich in der ersten Columnne der Tabelle I befinden; die Linie, welche aus diesen Zahlen entsteht, ist in der Fig. 8 Taf. II dargestellt. Um sie zu interpoliren, bemerken wir, daß sie die Form einer Cosinusoide hat, deren Gleichung $y = a + b \cos 2\psi$ ist. Setzt man $\psi = 0$ und $\psi = 90^\circ$, so sieht man, daß a die Halbsumme der äußersten Werthe von A ist, und b die Halbdifferenz; daraus folgt $a = 0,00283$ und $b = -0,00091$; folglich wird die Formel $y = 0,00283 - 0,00091 \cos 2\psi$. Es bleibt übrig uns zu überzeugen, daß sie die Linie treu genug ausdrücke; zu diesem Zwecke berechnen wir die Werthe von y für $\psi = 0^\circ, 10^\circ \dots 90^\circ$; sie befinden sich in der dritten Columnne der Tabelle I. Die Differenzen sind in der vierten Columnne; wie man sieht, können sie vernachlässigt werden.

Tabelle I.

Werthe von ψ .	Werthe von A .	Werthe von y .	Diffe- renzen.
0	0,00192	0,00192	0
10	0,00198	0,00198	0,00000
20	0,00214	0,00213	0,00001
30	0,00239	0,00237	0,00002
40	0,00269	0,00268	0,00001
50	0,00301	0,00299	0,00002
60	0,00331	0,00329	0,00002
70	0,00354	0,00353	0,00001
80	0,00369	0,00368	0,00001
90	0,00375	0,00374	0,00001

Kalkspath; Constante $D = -\frac{P^2 - bp}{P^2 h}$. Die Linie der Fig. 9 Taf. II ist die graphische Darlegung der Werthe von D , welche in der zweiten Columnne der Tab. II enthalten sind; sie hat die Form einer Cosinusoide, deren Gleichung ist $y = -a - a \cos 2\psi = -2a \cos^2 \psi$; setzt man $\psi = 0$, so erhält man $2a = 0,17353$, demzufolge $y = -0,17353 \cos^2 \psi$. Die Werthe von y befinden sich in der dritten Columnne, und die Differenzen $D' = D - y$ in der vierten. Da diese Differenzen nicht können vernachlässigt werden, so muß man sie wieder interpoliren.

Diese Interpolation wird wie die vorhergehende ausgeführt: die Linie der Werthe von D' (Fig. 9) hat die Form einer Cosinusoide, deren Gleichung ist $y' = -a' + a' \cos 4\psi = -2a' \sin^2 2\psi$; die Constante $2a'$ ist für jeden Werth von ψ durch die Formel $D' = -2a' \sin^2 2\psi$ berechnet worden; ihr mittlerer Werth ist 0,01682; die Formel $y' = -0,01682 \sin^2 2\psi$ giebt alsdann die Zahlen der fünften Columnne der Tab. II.; die Differenzen zwischen D' und y' , welche sich in der sechsten Columnne befinden, sind vernachlässigt worden, so daß $D' = y'$. Die Gleichung $D' = D - y$ giebt daher $D = y + y'$, und, wenn man an die Stelle von y und y' ihre Werthe setzt:

$$D = -0,17353 \cos^2 \psi - 0,01682 \sin^2 2\psi.$$

Tabelle II.

ψ	Werthe von D	Werthe von y	Werthe von D'	Werthe von y'	Unterschiede
0	-0,17353	-0,17353	0	0	0
10	-0,16993	-0,16830	-0,00163	-0,00197	0,00038
20	-0,15918	-0,15323	-0,00595	-0,00695	0,00100
30	-0,14145	-0,13015	-0,01130	-0,01262	0,00131
40	-0,11735	-0,10183	-0,01552	-0,01632	0,00060
50	-0,08830	-0,07170	-0,01660	-0,01632	-0,00028
60	-0,05712	-0,04338	-0,01374	-0,01262	-0,00112
70	-0,02833	-0,02030	-0,00803	-0,00695	-0,00108
80	-0,00760	-0,00523	-0,00237	-0,00197	-0,00040
90	0	0	0	0	0

9. Die Fig. 10 Taf. II giebt die Linien, die sich auf den Quarz beziehen (Q) und auf den Spath (S), diese letzteren in zehn Mal geringerem Maassstabe als die ersten. Man sieht leicht, dass die Coëfficienten der nämlichen Glieder durch Linien von nämlicher Form, aber von entgegengesetztem Zeichen dargestellt sind. Es folgt daraus, dass, wenn man die Zeichen der Gleichung des Kalkspaths verändert, beide Gleichungen von der Form sind:

$$Ay^2 + Bx^2 + Cx + D \pm \frac{\delta}{e} = 0,$$

das Zeichen $+$ bezieht sich auf den Quarz und auf positive Krystalle im Allgemeinen, das Zeichen $-$ auf den Kalkpath und negative Krystalle; die Coëfficienten wechseln nach den Linien der Fig. 10 Taf. II.

Discussion.

10. Die zu discutirenden Gleichungen sind

Quarz.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} 0,00283 \\ -0,00091 \cos 2\psi \end{array} \right\} y^2 \left. \begin{array}{l} +0,00090 \\ -0,00284 \cos 2\psi \end{array} \right\} x^2 \\
 & + (0,00592 \sin 2\psi)x + 0,00916 \cos^2 \psi + \frac{\delta}{e} = 0
 \end{aligned}$$

Kalkspath.

$$\begin{array}{rcl}
0,05242 & & - 0,00546 \\
- 0,03062 \cos 2\psi & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0,05242 \\ - 0,03062 \cos 2\psi \\ + 0,00965 \cos^2 2\psi \end{array}} \right\} y^2 & - 0,05731 \cos 2\psi \\
+ 0,00965 \cos^2 2\psi & & + 0,04083 \cos^2 2\psi \left. \vphantom{\begin{array}{l} - 0,05731 \cos 2\psi \\ + 0,04083 \cos^2 2\psi \end{array}} \right\} x^2 \\
+ 0,11094 \sin 2\psi & \left. \vphantom{\begin{array}{l} + 0,11094 \sin 2\psi \\ - 0,01791 \sin 4\psi \end{array}} \right\} x & + 0,17353 \cos^2 \psi - \frac{\delta}{e} = 0 \\
- 0,01791 \sin 4\psi & & + 0,01682 \sin^2 \psi
\end{array}$$

Ihre allgemeine Form ist $Ay^2 + Bx^2 + Cx + D \pm \frac{\delta}{e} = 0$. Die Mittellinie der Fransen entsprechen einem Gangunterschiede $\delta = n \frac{\lambda}{2}$, wo n eine ganze, gerade oder ungerade Zahl ist, die den Rang der Fransen angiebt.

Betrachten wir zuerst den besonderen Fall, wo $n = 0$. Die Fransen dieses Ranges bildet, wie wir es bald sehen werden, das Centrum der Kreise, welche man in den perpendiculären Platten beobachtet; wir nennen sie demzufolge Centralfransen. Ihre Gleichung

$$Ay^2 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

stellt eine Linie zweiten Grades vor, welche, wegen der Veränderlichkeit der Coëfficienten, zugleich ihre Form, ihre Gröfse und ihre Stellung verändert.

11. *Veränderung der Stellung.* Erinnern wir uns, dafs die Fransen auf zwei rechtwinklige Axen bezogen sind, welche durch den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes, den Ursprung der Coordinaten, geführt sind; die X-Axe ist nach dem Hauptschnitte der Platte gerichtet, und ihr positiver Theil ist die Projection desjenigen Theiles der optischen Axe, welcher gegen das Einfallslight steht: dieses fließt aus dem Vergleiche der Figuren 5 und 7, in welchen der Winkel π auf die nämliche Art gezählt werden soll. Dieses vorausgesetzt, zeigen die Anwesenheit eines Gliedes in x , und die Abwesenheit eines Gliedes in y , dafs die eine Axe der Linie beständig auf der X-Axe steht, während die andere in einer veränderlichen Entfernung von der Y-Axe steht, welcher sie fortwährend parallel ist. Die Linie verändert also ihre Stellung, indem sie nach dem Hauptschnitte verrückt

wird. Untersuchen wir wie diese Verrückung mit der Neigung der optischen Axe fortschreitet.

Zu diesem Zwecke, bestimmen wir zuerst die Abscisse des Centrums; wenn wir sie α nennen, und die Linie auf ihr Centrum und ihre Axen beziehen, so müssen wir x in $x + \alpha$ umwandeln, und den Coëfficienten des Gliedes in $x = 0$ setzen; daraus wird

$$Ay^2 + Bx^2 + (2B\alpha + C)x + B\alpha^2 + C\alpha + D = 0$$

mit $2B\alpha + C = 0$.

Die Abscisse des Centrums ist alsdann $\alpha = -\frac{C}{2B}$ und die Franse auf ihr Centrum und ihre Axen bezogen, hat zur Gleichung

$$Ay^2 + Bx^2 + D' = 0, \text{ wo } D' = D - \frac{C^2}{4B}.$$

Wenn wir die Werthe von α für $\psi = 0, 10 \dots 90$ berechnen, so erhalten wir die Zahlen der Columnne der Tab. III (Seite 27), und eine Linie, welche in der Fig. 4 Taf. I unter dem Namen Linie der Centra dargestellt ist. Der Fortschritt dieser Linie zeigt, daß je nachdem ψ abnimmt von 90° an, das Centrum der Fransen sich mehr und mehr vom Mittelpunkte des Gesichtsfeldes entfernt, auf dem negativen Theile der X Axe. Es entweicht ins Unendliche, wenn ψ einen bestimmten Werth annimmt, welchen man findet, indem man den Nenner B des Werthes von $\alpha = 0$ setzt; daraus folgt

Quarz $0,00090 - 0,00284 \cos 2\psi = 0$ woraus $\psi = 35^\circ 46'$
 Spath $-0,00546 - 0,05731 \cos 2\psi + 0,04083 \cos^2 2\psi = 0$
 woraus $\psi = 47^\circ 34'$.

Von da an erscheint das Centrum der Fransen wieder auf der Seite der positiven X Axe, und nähert sich unaufhörlich dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes, mit welchem es coïncidirt, wenn $\psi = 0$.

Wir haben diese Consequenzen auf experimentellem Wege bewährt gefunden, wenigstens in den Gränzen der Genauigkeit, welche die Turmalinzange gestattet. In den

perpendicularären Platten ist das Centrum der Fransen im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes; giebt man der optischen Axe eine zunehmende Neigung, so entfernt es sich von dem Mittelpunkte, in der Richtung nach welcher sich derjenige Theil der optischen Axe, welcher gegen das ausfallende Licht liegt, projicirt.

12. *Veränderung der Form.* Um die Veränderung der Form, abgesondert von der Veränderung der Stellung, bequem zu untersuchen, nehmen wir die Gleichung der Linie, die auf das Centrum und die Axen bezogen ist; sie ist, wie man gesehen hat, von der Form

$$Ay^2 + Bx^2 + D' = 0, \text{ wo } D' = D - \frac{C^2}{4B}.$$

Die Zahlenwerthe von D' sind in der Tab. III, und die Coëfficienten A , B , D' in der Fig. 11 Taf. II dargestellt, in welcher die Linien Q sich auf dem Quarz, S auf den Spath beziehen, diese letzteren in 10mal geringerem Maafsstabe als die ersten.

Tabelle III.

Werthe von D' .

ψ	Quarz	Spath
0	0,00916	0,1735
10	0,00949	0,1788
20	0,01106	0,1956
30	0,02010	0,2389
40	—0,01101	0,4673
50	—0,00174	—0,2589
60	—0,00039	—0,0405
70	—0,00006	—0,0060
80	—0,00002	—0,0002
90	0	0

Diese Linien erleichtern sehr die Discussion. Man sieht zuerst, dafs, wenn ψ zwischen 90° und dem Werthe, welcher B vernichtet, enthalten ist, die Coëfficienten A und B positiv sind, während D' negativ ist. Demzufolge stellt die Gleichung eine Ellipse vor.

Wenn ψ zwischen 0 und dem Werthe, welcher B vernichtet, enthalten ist, so ist A positiv, B negativ und D' positiv. Die Gleichung stellt eine Hyperbel vor, deren reelle Axe nach der X -Axe, und deren imaginäre Axe nach der Y -Axe gerichtet ist.

Endlich wenn ψ einen solchen Werth hat, daß $B = 0$, so stellt die Gleichung $Ay^2 + Bx^2 + D' = 0$ nichts mehr vor, denn um sie zu erhalten, haben wir durch B dividirt, nur das Glied in x in der ursprünglichen Gleichung zu vernichten, was nicht mehr erlaubt ist, wenn $B = 0$. Kommen wir also zur ursprünglichen Gleichung zurück. Wenn $B = 0$, so wird sie $Ay^2 + Cx + D = 0$, und stellt eine Parabel vor, weil A, C, D endliche und bestimmte Werthe haben.

Untersuchen wir etwas näher jede dieser drei Formen der Fransen.

13. *Ellipse.* Für $\psi = 0$ hat man $D' = 0$; da A und B positiv sind, kann die Gleichung nur durch $x = 0, y = 0$ bewährt werden, und giebt den Ursprungspunkt der Coordinaten. Die Franse ist also zu einem Centralpunkt reducirt. Da man zu gleicher Zeit $A = B$ hat, kann man immer diesen Centralpunkt als das Aequivalent eines Kreises betrachten.

Wenn ψ von 90° an abnimmt, so stellt die Gleichung eine Ellipse vor, deren Axen sind $a^2 = -\frac{D'}{B}, b^2 = -\frac{D'}{A}$, wenn man a diejenige nennt, welche nach der X -Axe, b diejenige, welche nach der Y -Axe gerichtet ist. Die Form der Ellipse hängt von dem Verhältniß $\frac{a}{b} = \frac{B}{A}$ ab, dessen Werthe sich in der Tab. IV befinden; wenn man die Einheit durch b darstellt, und durch a das Verhältniß der Axen, so erhält man die punctirten Linien der Fig. 11 Taf. II.

Die Linien D' und a wachsen zuerst sehr langsam bis zu einem bestimmten Werthe von ψ , welcher ungefähr 70° ist für den Quarz, 80° für den Spath. Es folgt daher, daß die Ellipse, zuerst zum Centralpunkt reducirt und dann einem Kreise äquivalent, damit anfängt sich sehr langsam

auszudehnen, und zu gleicher Zeit sich nach der X-Axe zu verlängern. Bemerken wir ferner, daß die Ellipse sich in dem Spath schneller verlängert als in dem Quarz.

Wenn ψ fortfährt abzunehmen, so fährt die Ellipse fort zuzunehmen und sich zu verlängern; ihre Veränderung schreitet besonders schnell fort von $50''$ an für den Quarz, $70''$ für den Spath. Sie convergirt also gegen ihre Gränze, welche die Parabel ist.

Vergleicht man den Fortschritt der Ellipse mit dem ihres Centrums, so sieht man, daß die Abscisse α des Centrums und die große Axe a der Ellipse beide von 0 an zu ∞ convergiren; es ist also interessant zu sehen, was aus den Spitzen der großen Axe wird, deren Abscissen sind, Spitze zur rechten Hand $\alpha - a$, Spitze zur linken $\alpha + a$. Die Werthe dieser Abscissen sind in die Tab. IV eingeschrieben; die Linien der Spitzen sind in der Fig. 4 Taf. I dargestellt. Man sieht, daß die Spitze zur Rechten in einer endlichen Entfernung vom Mittelpunkt des Gesichtsfeldes bleibt, während die Spitze zur Linken ins Unendliche entweicht.

14. *Hyperbel.* Nehmen wir zuerst den Fall wo $\psi = 0$; im Quarze kann man annehmen, daß die Hyperbel gleichzeitig ist, weil A in absolutem Werthe fast B gleich ist im Spath ist $B < A$; der Halbwinkel der Asymptoten, welcher die Fransen einschließt, ist also geringer als 45° .

Wenn ψ von 0 an zunimmt, so verändert die Hyperbel ihre Form; ihre Axen sind $a^2 = \frac{-D'}{B}$, $b^2 = \frac{-D'}{A}$, wenn a die reelle Axe, b die imaginäre ist. Der Halbwinkel der Asymptoten ergibt sich aus der Formel $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$. Die Form der Hyperbel hängt von dem Verhältniß der Axen $\frac{a}{b}$ ab; setzt man $b = 1$, und stellt man a durch die Werthe von $\frac{a}{b}$ dar, so erhält man die punctirten Linien der Fig. 11 Taf. II. Sie zeigen, daß die reelle Axe der Hyperbel schneller und schneller zunimmt im Verhältniß mit der imaginären, und daß sie zuletzt unendlich wird; es

folgt daraus, daß das inverse Verhältniß bis 0 abnimmt, und daß der Winkel β selbst abnimmt, bis er $= 0$ wird.

Die Vergleichung der Linien D' und B zeigt, daß a in absolutem Werthe bis ∞ zunimmt, weil $a^2 = \frac{-D'}{B}$. Also, so wie ψ zunimmt, dehnt sich die Hyperbel nach ihrer reellen Axe aus, und zu gleicher Zeit biegen sich ihre Arme gegen diese Axe; die Formveränderungen sind denen der Ellipse correlativ.

Da die Abscisse α des Centrums und die reelle Axe a zu gleicher Zeit unendlich werden, wie im Falle der Ellipse, wollen wir wieder die Abscissen der Spitzen der Hyperbel berechnen, welche sind: Spitze zur Rechten $\alpha + a$, Spitze zur Linken $\alpha - a$. Die Zahlenwerthe dieser Abscissen sind in die Tab. IV eingeschrieben; die Linie der Spitzen ist in der Fig. 4 Taf. II dargestellt. Man sieht, daß die Spitze zur Linken in einer endlichen Entfernung vom Mittelpunkt des Gesichtsfeldes bleibt, während die Spitze zur Rechten ins Unendliche entweicht.

15. *Parabel.* Die Parabel bezieht sich auf den Werth von ψ , für welchen $B=0$; dieser Werth ist $35^{\circ},8$ für den Quarz, $41^{\circ},8$ für den Spath. Ihre Gleichung ist $Ay^2 + Cx + D = 0$; ihr Parameter ist also $= \frac{-C}{2A}$ und die Abscisse ihrer Spitze $= \frac{q}{2p} = -\frac{D}{C}$, wenn man die Gleichung unter die Form $y^2 = 2px + q$ stellt. Die Zahlenwerthe dieser Quantitäten befinden sich in der Tab. IV.

Bemerken wir, daß die Spitze der Parabel die Linie der Spitzen zur Rechten der Ellipse mit der Linie der Spitzen zur Linken der Hyperbel vereinigt. Dieses führt uns dahin anzunehmen, daß die Parabel ein Uebergang der Ellipse zur Hyperbel ist. Man weiß in der That, daß die Ellipse, deren eine Spitze, die zur Linken, z. B. in einer endlichen Entfernung vom Ursprungspunkte der Coordinaten bleibt, und deren Axen ins Unendliche zunehmen, an der Gränze die Form einer Parabel annimmt. Diese Parabel stellt dann den Theil der Ellipse vor, welcher

die Spitze zur Rechten benachbart; der Theil, welcher die Spitze zur Linken benachbart, ist ins Unendliche entweichen. Da aber das Unendliche, wie 0, nur ein Uebergang vom Positiven ins Negative ist, kann man annehmen, daß dieser Fortschritt fort dauert. Die Spitze zur Linken wird alsdann zur Seite des positiven ∞ erscheinen, und sich der Spitze zur Rechten nähern; sobald sie in eine endliche Entfernung gekommen seyn wird, wird man eine zweiar-mige Linie haben, welche eine Hyperbel ist. Von nun an werden die Spitzen ihre Namen umtauschen, und die Linie wird ein anderes Centrum und andere Axen annehmen.

16. *Veränderung der Gröfse.* Die Veränderung der Gröfse hängt von den absoluten Werthen der Axen ab, welche ihrerseits von den absoluten Werthen der Coëfficienten abhängen. Man hat schon gesehen, daß die Ellipse, aus einem Punkte entsprungen, immerfort zunimmt bis zur Parabel, während die Hyperbel, aus dieser Parabel entsprungen, abnimmt bis zu einer gewissen Gröfse, welche sie erhält, wenn $\psi = 0$.

Folgende Tabelle vereinigt die Zahlenwerthe aller Elemente der Centralfransen. Bemerkenswerth ist es, daß die Werthe der Axen im Spath denen im Quarz nicht sehr überlegen sind, obgleich die Coëfficienten viel stärker sind.

Tabelle IV.

Natur des Krystalls.	Neigung der Axen.	Form der Flächen.	Entfernung des Centrums α .	Axe parallel zur Haupt- section α .	Axe perp. auf der Haupt- section β .	Verhältnis der Axen $\frac{a}{b}$	Entfernung der Spitzen von der Mitte des Feldes.	Winkel der Asymptot.	
Quarz	0	Hyperbel	0	2,173	$2,184\sqrt{-1}$	0,995	Linke Spitze —2,173	Rechte Spitze —2,173	45° 9'
	10		0,579	2,316	$2,189\sqrt{-1}$	1,058	—1,737	—2,895	43 24
	20		1,561	2,999	$2,273\sqrt{-1}$	1,319	—1,438	—4,560	37 10
	30		5,150	6,340	$2,913\sqrt{-1}$	2,176	—1,190	—11,490	24 35
	35° 8	Parabel	$\pm \infty$	Parameter = —1,104		∞	—1,125	$\pm \infty$	
	40	Ellipse	—5,606	4,601	2,023	2,274	Rechte Spitze —1,005	Linke Spitze —10,207	
	50		—1,897	1,066	0,760	1,403	—0,831	—2,963	
	60		—1,050	0,407	0,348	1,172	—0,643	—1,457	
	70		—0,598	0,138	0,130	1,063	—0,640	—0,736	
	80	Centralpunkt	—0,276	0,029	0,028	1,015	—0,247	—0,305	
	90		0	0	0	0	0	0	

Natur des Krystalls.	Neigung der Axen.	Form der Frausen.	Entfernung des Centrums α .	Axe parallel zur Haupt- section α .	Axe perp. auf der Haupt- section b .	Verhältnis der Axen $\frac{a}{b}$	Entfernung der Spitzen von der Mitte des Feldes.	Mittel der Asymptot.
Kalk- spath.	0	} Hyperbel	0	2,813	$2,348\sqrt{-1}$	1,198	Linke Spitze -2,813	Rechte Spitze 2,813
	10		0,649	2,888	$2,349\sqrt{-1}$	1,230	-2,139	3,537
	20		1,391	3,174	$2,358\sqrt{-1}$	1,346	-1,783	4,565
	30		2,607	4,006	$2,454\sqrt{-1}$	1,636	-1,399	6,613
	40		7,761	8,864	$3,233\sqrt{-1}$	2,742	-1,103	16,625
	44° 8	Parabel	$\pm \infty$	Parameter = -0,989		∞	-0,945	$\pm \infty$
	50	} Ellipse	-6,306	5,455	2,130	2,561	Rechte Spitze -0,851	Linke Spitze -11,761
	60		-1,740	1,103	0,744	1,483	-0,637	-2,843
	70		-0,764	0,318	0,272	1,270	-0,446	-1,082
	80		-0,310	0,065	0,063	1,038	-0,245	-0,375
	90	Centralpunkt	0	0	0	0	0	0

17. Bis daher haben wir nur die Centralfransen beobachtet, deren Rang ist $n=0$; geben wir nun n ganze Werthe, positive und negative, indem wir die Fransien vom Range $+1, +2, +3 \dots -1, -2, -3 \dots$ betrachten. Ihre allgemeine Gleichung ist $Ay^2 + Bx^2 + Cx + D \pm \frac{n\lambda}{2e} = 0$; Das Zeichen $+$ bezieht sich auf die positiven Krystalle, das Zeichen $-$ auf die negativen. Da diese Gleichung von derjenigen der Centralfransen nur durch das constante Glied unterschieden ist, so sieht man voraus, dafs die Fransien, welche sie vorstellt, ähnliche Veränderungen befolgen. Sie bieten jedoch in ihrem Fortschritte bemerkenswerthe Einzelheiten dar, welche wir nun untersuchen wollen. Die allgemeine Gleichung stellt wieder eine Linie vom zweiten Grade vor, welche ist eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem B positiv, Null oder negativ ist; das Centrum aller dieser Fransien ist wie vorhin durch die Gleichung $\alpha = \frac{-C}{2B}$ gegeben, welches auch das constante Glied seyn mag; die Linie der Centra, welche wir für die Centralfransen gezogen haben, ist also dieselbe für alle anderen Fransien. Untersuchen wir nun die Veränderung der Form, und betrachten wir zuerst die positiven Krystalle.

Um diese Veränderungen leichter zu bestimmen, verwandeln wir wieder x in $x + \alpha$, um die Fransien auf ihr Centrum und ihre Axen zu beziehen; das Glied in x verschwindet, und das constante Glied wird $D - \frac{C^2}{4B} + \frac{n\lambda}{2e} = D' + \frac{n\lambda}{2e}$, so dafs die Gleichung ist

$$Ay^2 + Bx^2 + D' = 0 \text{ wo } D' = D + \frac{n\lambda}{2e}.$$

Ellipsen. Damit die Gleichung eine Ellipse vorstelle, genügt es nicht, dafs A und B positiv seyn; das constante Glied D' mufs noch negativ seyn; nun ist diese Bedingung nicht auf dieselbe Art für alle Fransien erfüllt.

Setzen wir zuerst $\psi = 90^\circ$. Da in diesem Falle $D' = 0$, so hat man $D' = \frac{n\lambda}{2e}$, und also kann das constante Glied

nur dann negativ seyn, wenn n selbst negativ ist; die einzigen Fransen, welche vorhanden seyn können, sind diejenigen vom Range $-1, -2, -3 \dots$. Sie sind kreisförmig, weil $A = B$, und drängen sich vom Centrum aus immer mehr zusammen, weil ihre Radien, durch $\sqrt{\frac{n\lambda}{2eA}}$ vorgestellt, unter sonst gleichen Umständen, \sqrt{n} proportionirt sind.

Auf der Ordinate, welche der Abscisse $\psi = 90^\circ$ (Fig. 11 Taf. II) correspondirt, zeichnen wir gleichweitige Punkte an, welche die Werthe von D' darstellen, wenn man der Reihe nach $n = -1, -2, -3 \dots$ und $n = +1, +2, +3 \dots$ setzt. Je nachdem ψ abnimmt, bleiben die Linien, welche die Veränderungen dieser verschiedenen constanten Glieder vorstellen, in gleicher verticaler Entfernung von der Linie D' ; es folgt daraus, daß die constanten Glieder, die den Fransen $+1, +2, +3 \dots$ entsprechen, sich der Reihe nach annulliren, und dann mit den Fransen $-1, -2, -3 \dots$ negative Werthe annehmen, die bis zu $-\infty$ zunehmen. Schließen wir daraus, daß die Fransen vom Range $-1, -2, -3 \dots$ Ellipsen sind, welche sich auf die nämliche Art wie die Centralfransen ausdehnen, und daß die Fransen vom Range $+1, +2, +3 \dots$ nach und nach in der Mitte als Punkte erscheinen, um sich nachher auch als Ellipsen auszudehnen. Alle diese Ellipsen sind außerdem gleichförmig, weil das Verhältniß ihrer Axen dasselbe ist.

Parabeln. Die Parabeln entsprechen dem Falle wo $B = 0$; man muß also wieder zur ursprünglichen Gleichung zurückkehren, welche wird $Ay^2 + Cx + D + \frac{n\lambda}{2e} = 0$. Sie stellt eine Reihe von Parabeln vor, welche in ihrer Form identisch sind, denn sie haben alle den nämlichen Parameter $-\frac{C}{2A}$, unabhängig vom Range der Fransen. Sie stehen auch gleichweitig von einander, weil die Abscisse der Spitze, deren Ausdruck ist $-\frac{D}{C} - \frac{n\lambda}{2Ce}$ nach den Gliedern einer

arithmetischen Progression wechselt, deren Verhältniß ist $\frac{2Ce}{\lambda}$. Man kennt schon die Stellung der Parabel, welche die Centralfranse darstellt, und deren Abscisse die Spitze ist $-\frac{D}{C}$; die Franse vom Range $-1, -2, -3 \dots$ reihen sich zu ihrer Rechten, die vom Range $+1, +2, +3 \dots$ zu ihrer Linken.

Hyperbeln. Die Hyperbeln entstehen, wie wir es bei der Centralfranse gesehen haben, aus der fernerer Veränderung der Parabeln; ihre allgemeine Gleichung ist $Ay^2 + Bx^2 + D + \frac{n\lambda}{2e} = 0$, und die der Centralfranse leitet man davon ab, indem man $n=0$ setzt. Das Verhältniß der Axen $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{B}{A}}$ und der Winkel der Asymptoten $\lg \frac{D}{2} = \frac{b}{a}$, hängt nur von den Coëfficienten A und B ab, und keineswegs von n ; alle diese Hyperbeln sind daher unter einander gleichförmig, und haben die nämlichen Asymptoten. Das Verhältniß der Axen und der Winkel der Asymptoten sind für die Centralfransen bekannt; es bleibt also nur übrig zu sehen, welche Abänderungen die Veränderlichkeit des constanten Gliedes in den Fortschritt der Hyperbel einführt.

Wenn in dem Ausdrücke $D + \frac{n\lambda}{2e}$ man der Reihe nach setzt $n = +1, +2, +3 \dots$ und $n = -1, -2, -3 \dots$, so erhält man die constanten Glieder, welche den verschiedenen Fransen entsprechen; man sieht leicht, daß die Linien, welche sie darstellen, immer von der Linie D in gleicher verticaler Entfernung stehen, (Fig. II Taf. II). Alle constanten Glieder fangen also an positiv zu seyn und sehr groß, denn, je nachdem ψ abnimmt, nehmen diejenigen, welche den positiven Werthen von n entsprechen, in absolutem Werthe ab, obgleich sie fortwährend positiv bleiben; es verhält sich ebenso mit denen, welche den ersten negativen Werthen von n entsprechen; aber diejenigen, welche den ersteren negativen Werthen entsprechen, annulliren sich

der Reihe nach, werden negativ und nehmen in absolutem Werthe zu, bis zu einer bestimmten Gränze.

Ist nun das constante Glied positiv, so hat die Hyperbel ihre Queraxe nach der X -Axe gerichtet, und ist also gänzlich in dem Winkel der Asymptoten enthalten, dessen Theilungslinie der Hauptschnitt ist. Ist das constante Glied negativ, so ist die Queraxe auf der X -Axe perpendicular, und die Hyperbel ist in dem ergänzenden Winkel der Asymptoten enthalten; wir nennen sie direct in der ersten Stellung, inverse in der zweiten. Endlich, wenn das constante Glied 0 gleich ist, so ist die Hyperbel zu den Asymptoten reducirt, weil die Gleichung wird $Ay^2 + Bx^2 = 0$, und also zwei Linien $y + \pm \sqrt{-\frac{B}{A}} x$ vorstellt. Man sieht ausserdem, dafs die Queraxe sich im nämlichen Sinne wie das constante Glied D' verändert, und dafs sie zu gleicher Zeit Null ist, weil sie $\sqrt{\frac{D'}{B}}$ gleich ist, wenn die Hyperbel direct, und $\sqrt{\frac{D'}{A}}$, wenn die Hyperbel inverse ist.

Daraus folgt, dafs alle Fransen damit anfangen, directe Hyperbeln zu seyn, wenn der Winkel ψ anfängt, den der Parabel entsprechenden Werth zu übersteigen. Man kennt schon die ferneren Veränderungen der Centralfranse, welche fortwährend directe Hyperbel bleibt, und sich dem Centrum nähert. So verhalten sich auch die Fransen vom positiven Range, welche der Centralfranse zur Linken stehen, und die ersten Fransen vom negativen Range, welche ihr zur Rechten stehen. Die anderen Fransen vom negativen Range sind zuerst direct, und verfolgen den Fortschritt der Centralfransen, d. h. sie nähern sich fortwährend dem Centrum, dann reduciren sie sich zu den Asymptoten so wie ihre Queraxen sich annulliren, und dieses findet um so früher statt, als der Rang der Fransen höher steht; endlich werden sie inverse, und, ihren Fortschritt verfolgend, entfernen sie sich mehr und mehr von den Asymptoten. Es giebt also zwei Systeme von Hyperbeln, die ersten direct,

die zweiten invers; und so wie ψ abnimmt, gehen der Reihe nach die directen Hyperbeln durch die Asymptoten in inverse über, und entfernen sich alsdann bis die optische Axe dem Krystalle parallel ist.

Es bleibt uns noch der Fall der negativen Krystalle übrig; die allgemeine Gleichung, welche sich darauf bezieht, ist $Ay^2 + Bx^2 + Cx + D - \frac{n\lambda}{2e} = 0$, wenn diejenige der positiven Krystalle ist $Ay^2 + Bx^2 + Cx + D + \frac{n\lambda}{2e} = 0$. Die Gegeneinanderstellung dieser beiden Gleichungen zeigt, daß wenn man in der ersten $n = +n'$ setzt, man das nämliche Resultat hat, wie wenn man in der zweiten $n = -n'$ setzt. Die Franse vom Range $+n'$ verfolgt also in den negativen Krystallen die nämlichen Veränderungen wie die Franse $-n'$ in den positiven. Es folgt daraus, daß der allgemeine Fortschritt der Franse derselbe ist in den zwei Arten von Krystallen, nur, weil ihre Zeichen umgewandelt sind, folgen sie einander in inverser Ordnung.

In der vorhergehenden Discussion haben wir vorausgesetzt, daß der Krystall eine constante Dicke e habe, und daß man mit einem homochromatischen Lichte beobachte, dessen Wellenlänge λ ist. Untersuchen wir nun, welche Abänderungen die Veränderungen von e und λ in den Fortschritt der Fransen einführen.

Nehmen wir zuerst an, daß die Dicke e veränderlich sey, und kehren wir zur allgemeinen Gleichung $Ay^2 + Bx^2 + Cx + D \pm \frac{n\lambda}{2e} = 0$ zurück. Die Abscisse des Centrums $\alpha = -\frac{C}{2B}$, und die Gleichung der Centralfransen $Ay^2 + Bx^2 + Cx + D = 0$ sind von e unabhängig; so bleiben denn das Centrum und die Centralfranse identisch dieselben in den Krystallen, welche nur in der Dicke verschieden sind. Die anderen Fransen verändern nicht ihre Form, aber nur ihre Größe, weil in ihrer allgemeinen Gleichung das constante Glied von der Dicke abhängt, während die Coëfficienten A und B davon unabhängig sind; da die Axen der

Fransen in dem nämliche Sinne wie das constante Glied wechseln, und dieses letztere von einer Franse zur andern um die Quantität $\frac{\lambda}{2e}$ abnimmt, so sind die Fransen um so weiter als die Dicke geringer, und um so gedrängter als die Dicke gröfser ist. Bemerken wir jedoch, dafs in dem Falle der Hyperbeln, der Wechsel der Dicke die Fransen von einem Winkel der Asymptoten in den andern übertragen kann, weil er das Zeichen des constanten Gliedes ändern kann. Nehmen wir z. B. einen positiven Krystall; wenn für eine gewisse Dicke e die Franse $-n'$ direct ist und die Franse $-(n' + 1)$ inverse, so ist das constante Glied positiv für $+n = n'$, und negativ für $n = -(n' + 1)$: wenn nun e abnimmt, so nimmt $\frac{n'\lambda}{2e}$ zu, und wird e gering genug, so kann $\frac{n'\lambda}{2e}$ grofs genug werden, um das constante Glied negativ zu machen; dann wird die Franse $-n'$ inverse.

Nehmen wir nun an, dafs die Wellenlänge λ veränderlich sey, und dafs man der Reihe nach mit den verschiedenen einfachen Farben des Sonnenspectrums beobachte, oder mit dem Sonnenlichte, welches sie alle enthält. In dieser Discussion, wo es sich um die Farbe der Fransen handelt, mufs man das Maximum oder Minimum ihrer Lichtstärke in Betracht ziehen, was in der Discussion der Dicke und der Neigung unnöthig war, da dieselbe Franse immer dieselben geometrischen Veränderungen verfolgt, gleichviel ob sie hell oder dunkel sey. Sind die Turmaline gekreuzt, so entsteht das Maximum der Lichtstärke in den Fransen von ungeradem Range, das Minimum in denen von geradem Range; aber umgekehrt ist es, wenn die Turmaline parallel sind.

Welches auch die Farbe des einfachen Lichtes seyn mag, bleibt doch das Centrum der Franse immer dasselbe, weil seine Abscisse von λ unabhängig ist. Die Centralfranse bleibt auch unverändert, sie sey hell oder dunkel, weil die Wellenlänge aus der allgemeinen Gleichung verschwindet, wenn man $n = 0$ setzt. Die anderen Fransen verändern

ihre Gröfse, weil das constante Glied $D' \pm \frac{n\lambda}{2e}$ von der Wellenlänge abhängt; da ihre Entfernung von einander um so gröfser ist als die Quantität $\frac{n\lambda}{2e}$, um die das constante Glied zu- oder abnimmt, selbst gröfser ist, so sind die Fransen um so weiter als die Farbe, welche sie erzeugt, eine gröfsere Wellenlänge hat, und also nimmt ihre Weite zu vom Violetten ins Rothe in der Farbenordnung des Spectrums.

Im Sonnenlichte entstehen die Fransen, welche man erblickt, offenbar aus der mehr oder weniger vollkommenen Auseinanderlegung der verschiedenen farbigen Fransen, welche die zusammensetzenden Farben, jede für sich, einnehmen würden. Nehmen wir zuerst an, dafs die Turmaline gekreuzt seyen; die zusammensetzenden Fransen sind dunkel, wenn sie von geradem Range sind, hell, wenn sie von ungeradem sind, und ihre Weite nimmt vom Violetten ins Rothe zu. Setzt man sie auf einander, so dafs die Mittellinien der Centralfransen coëndiciren, so ersieht man leicht, dafs die entstehende Centralfranse dunkel ist, und dafs die hellen positiven und negativen Fransen, welche zu beiden Seiten stehen, irisirt sind, und von der Centralfranse an folgende Farbenreihe darbieten: Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange, Roth; zwischem dem Grün und dem Gelb kann Weifs vorhanden seyn, das aus der Mischung aller Farben entsteht, aber so wie die Franse sich entfernt, so verschwindet das Weifs, die zwischenliegenden Farben setzen sich aufeinander und bilden Grün, so dafs man am Ende nur noch einen Wechsel von Grün und Roth sieht.

Sind die Turmaline parallel, so sind die zusammensetzenden Fransen hell, wenn sie von geradem Range sind, dunkel, wenn sie von ungeradem sind, und ihre Weite nimmt wieder vom Violetten ins Rothe zu. Aus ihrer Auseinandersetzung entsteht folgende Erscheinung: Die Centralfranse ist weifs, der ganzen Länge des zusammensetzenden Violetts nach, aber ihre Ränder sind irisirt mit gelb, orange und roth. Die hellen positiven und negativen Fransen bieten die näm-

liche Farbenfolge dar wie bei den gekreuzten Turmalinen, aber wenn man beide Phänomene auf einander legen würde, würde eine einförmige farblose Tinte entstehen, weil die complementären Farben sich genau bedecken würden.

Die positiven und die negativen Fransen bieten dieselbe Farbenfolge dar, wenn man sie in entgegengesetzter Richtung von der Centralfranse aus durchgeht; durchgeht man sie im Gegentheile alle in derselben Richtung, so ist ihre Irisation umgekehrt. Die Centralfranse unterscheidet sich von den andern Fransen, weil sie die Linie bezeichnet, wo die Farbumkehrung stattfindet.

Schlussfolgerung.

Es folgt aus dieser Discussion, dass der allgemeine Fortschritt der Fransen derselbe ist in den positiven und in den negativen Krystallen, ausgenommen diesen Unterschied, dass die Fransen vom Range $+1, +2, +3 \dots$, in welchem der gewöhnliche Strahl gegen den aufsergewöhnlichen einen Vorsprung hat, in den positiven Krystallen die nämlichen Veränderungen befolgen, wie in den negativen Krystallen die Fransen vom Range $-1, -2, -3 \dots$, in welchem der aufsergewöhnliche Strahl gegen den gewöhnlichen den Vorsprung hat, und *vice versa*. Die Franse vom Range 0, in welcher der Gangunterschied 0 ist, befolgt die nämlichen Veränderungen in beiden Arten von Krystallen. Es genügt also den allgemeinen Fortschritt der Franse in den positiven Krystallen anzugeben.

Wenn die optische Axe auf der Fläche des Krystalls senkrecht ist, so sieht man Kreise, welche vom Centrum aus die Fransen vom Range $-1, -2, - \dots$ darstellen, und das Centrum selbst stellt die vom Range 0 vor, welche wir daher Centralfranse genannt haben. Je nachdem sich die Axe neigt, dehnen sich die Kreise aus, und zu gleicher Zeit verlängern sie sich nach der Richtung des Hauptschnittes, und nehmen die Form von Ellipsen an, welche alle das nämliche Centrum haben, und untereinander gleichförmig sind; zugleich scheinen neue Ellipsen vom Range 0,

+1, +2, +3... aus dem Centrum hervorzutreten. Endlich wird das ganze System der Fransen mit seinem Centrum in der Richtung des Hauptschnittes verschoben und folgt der Projection desjenigen Theiles der optischen Axe, welcher zur Seite des ausfallenden Lichtes gelegen ist; wir nehmen an, daß der Krystall so orientirt sey, daß diese Verschiebung nach der Linken des Beobachters stattfindet.

Die Verlängerung der großen Axe und die Verschiebung des Centrums gehen zu gleicher Zeit ins Unendliche über; jedoch bleiben die Spitzen zur Rechten der Ellipsen in einer endlichen Entfernung, und werden nur auf die linke Seite geschoben, während die Spitzen zur Linken sich ins Unendliche entfernen. Diese Gränze wird erreicht, wenn die optische Axe eine bestimmte Neigung genommen hat, welche einzig von den Principalindexen des Krystalls abhängt, und keineswegs von seiner Dicke; sie ist von ungefähr 36° für den Quarz, 45° für den Spath. Die Ellipsen gehen alsdann in Parabeln über, welche in ihrer Form identisch sind, und gleichweit von einander stehen. Sie sind von der rechten zur linken Seite nach einer Reihe geordnet, welche mit einer negativen Franse vom Range $-n$ anfängt, und mit einer positiven Franse vom Range $+n$ endigt, die Zahl n nur durch die physikalischen Bedingungen der Interferenz begrenzt; die Centralfranse, mittleres Glied der Reihe, befindet sich in einer bestimmten Entfernung zur Linken des Mittelpunktes des Gesichtsfeldes.

Wenn die optische Axe fortfährt sich zu neigen, so gehen die Parabeln in hyperbolische Arme über, deren transverse Axe nach dem Hauptschnitte gerichtet ist, und deren ergänzende Arme bald zur Rechten erscheinen. So wie die Ellipsen haben alle diese Hyperbeln das nämliche Centrum, welches sich nach und nach vom Unendlichen zur rechten Hand herannähert, und damit endigt, mit dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes zu coïncidiren, wenn die optische Axe der Fläche des Krystalls parallel geworden ist; sie sind auch gleichförmig untereinander, und haben demzufolge die nämlichen Asymptoten, deren Winkel, der zu-

erst $= 0$ ist, nach und nach zunimmt, und damit endigt, einen Werth zu erreichen, der 90° mehr oder weniger nahe steht. Endlich fahren die Arme linker Hand fort sich zu verschieben gegen die Linke des Gesichtsfeldes; das Centrum, das sich nach derselben Richtung verschiebt, schreitet schneller voran, so daß die transversen Axen abnehmen, der Reihe nach sich annulliren, und dann imaginär werden; die Arme der Hyperbeln nähern sich also dem Centrum, reduciren sich zu den Asymptoten, und geben in den ergänzenden Winkel als inverse Hyperbeln über. Diese Veränderung der directen Hyperbeln in inverse fängt mit dem ersten Glied der Fransen-Reihe an, und steigt nach und nach die Reihe hinauf, nachdem sich die optische Axe mehr neigt; jedoch kann sie niemals die Central-Franse erreichen, und hält ein an einem vorhergehenden Gliede, das um so ferner ist, als die Dicke des Krystalls größer ist.

III. *Ueber die Umstände, unter denen der kohlen-saure Kalk sich in seinen heteromorphen Zuständen als Kalkspath, Aragonit und Kreide abscheidet; von Gustav Rose.*

Fortsetzung ¹⁾).

(Aus den Monatsberichten der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften vom November 1860.)

Versuche mit verdünnten Flüssigkeiten.

Um die Wirkung zu untersuchen, welche die Verdünnung der Flüssigkeiten, aus denen sich der kohlen-saure Kalk absetzt, auf den Zustand und die Form desselben ausübt, und um zu gleicher Zeit Krystalle von möglichster Größe zu er-

1) Vergl. den Anfang dieser Abhandlung in den Monatsberichten der Akad. vom Juli 1860 S. 365 und in diesen Annalen Bd. 111, S. 156.

