9. *Die Gesetze der Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen; von E. Ketteler.*

Die Theorie der dispergirenden und absorbirenden anisotropen Medien hat mir seit Jahren als hochinteressantes, erstrebenswerthes Ziel vorgeschwebt. Insbesondere war es die bei manchen Krystallen bekannte Dispersion der Symmetrieaxen, welche mich veranlasste, das ganze Problem von dem früheren, mehr statischen Gesichtspunkte auf einen allgemeineren dynamischen zu erheben.

Wenngleich meine bisherige Behandlung dieses Themas sich auf „Strahlschwingungen“ beschränkte und daher eine einseitige blieb, so reicht doch das in meinem Buche[1]) über durchsichtige Krystalle Gesagte vollständig hin, um die betreffenden Erscheinungen zu construiren. Dahingegen bedürfen die Entwickelungen bezüglich der absorbirenden Krystalle einer Ergänzung, die im Folgenden zunächst für einfache, nur aus einer einzigen Molecularqualität bestehende Medien gegeben werden soll. Die Erweiterung der Theorie auf complicirtere Medien ergiebt sich dann von selber.

Es möge vorab noch bemerkt werden, dass durch die jetzige völlige Coordinirung von Strahl und Normale die früher gebliebenen Unklarheiten beseitigt werden konnten, und dass, ungeachtet der rechnerischen Schwierigkeiten, welche die Auflösung biquadratischer Gleichungen mit sich bringt, das erhaltene Formelsystem ein so übersichtliches ist, dass es bei continuirlicher Abnahme der Reibungsconstante sich in stetiger und anschaulicher Weise den bekannten Formeln der durchsichtigen Krystalle nähert, um schliesslich in diese überzugehen.

Da bekanntlich in den absorbirenden Medien die Schwingungen im allgemeinen zur Wellebene schräg stehende (unter Umständen longitudinale) Ellipsen sind, so drängt sich u. a. die Frage auf, nach welchen Gesetzen sich die diesen elliptischen Schwingungen entsprechende Energie, d. h. die Summe

1) Ketteler, Theoretische Optik, p. 319—328.

der Quadrate der ohne Phasendifferenz zusammengelegten Amplitutencomponenten, also die Energie der sogenannten „restaurirten" Welle, fortpflanzen werde. Gerade das Aufwerfen dieser Frage hat wesentlich zur Lösung der Aufgabe beigetragen.

1. *Veranschaulichung der Begriffe der electrischen Kraft und der dielectrischen Polarisation mittels der Annahme des Zusammenschwingens von Aether und Molecülen.* Die in Betracht kommenden Differentialgleichungen sollen wieder auf die Symmetrieaxen des Krystalles als Coordinatenaxen bezogen werden; sie haben dann nach früherer Bezeichnung[1]) die Form:

$$
(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
m\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - B_1 m' \mathfrak{f}' \xi' &= \mathfrak{e}\,\Delta_2 (\xi + \xi^l)\\
m\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - B_2 m' \mathfrak{f}' \eta' &= \mathfrak{e}\,\Delta_2 (\eta + \eta^l)\\
m\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - B_3 m' \mathfrak{f}' \zeta' &= \mathfrak{e}\,\Delta_2 (\zeta + \zeta^l)
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,C + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} &= -\mathfrak{f}' \xi' - \mathfrak{g}' \frac{\partial \xi'}{\partial t}\\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,C + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} &= -\mathfrak{f}' \eta' - \mathfrak{g}' \frac{\partial \eta'}{\partial t}\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,C + \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} &= -\mathfrak{f}' \zeta' - \mathfrak{g}' \frac{\partial \zeta'}{\partial t}\ {}^{2)}
\end{aligned}\right.
$$

Darin beziehen sich m, ξ, η, ζ auf Dichtigkeit und transversale Schwingungscomponenten des mit dem Weltäther als gleich angenommenen intermolecularen Aethers, m', ξ', η', ζ'

1) Vgl. Ketteler, Theor. Optik, p. 308; Wied. Ann. **49.** p. 524. 1893 und **53.** p. 830. 1894.

2) Der in den Gleichungen (2) u. a. enthaltene Satz, dass die Lage der Absorptionsstreifen in einem absorbirenden Krystall von der Orientirung zu den Krystallaxen unabhängig sei, ist einige Jahre nach seiner Aufstellung durch Beobachtungen von H. Becquerel (Compt. rend. Januar und März 1887) bestätigt worden. — Die streng electrische Dispersionstheorie der Hrn. v. Helmholtz und Drude darf man als eine entsprechende Umformung dieser Gleichungen betrachten; dieselbe ergiebt die nämlichen Resultate. — Die ältere mechanische Theorie von Helmholtz dagegen führte zu Gleichungen, welche in einer gewissen eigenthümlichen Verbindung des Princips der Reaction mit dem der Resonanz bestanden. Bekanntlich haben diese heute nicht mehr haltbaren Gleichungen seinerzeit eine fast allseitige Zustimmung gefunden.

auf die entsprechenden Grössen der Körpermolecüle und ξ^l, η^l, ζ^l auf gewisse Longitudinalcomponenten des Aethers; e ist die Deformationsconstante desselben, Δ_2 hat die bekannte Laplace'sche Bedeutung, und sind B_1, B_2, B_3, C, $\mathfrak{k}' = 4\pi/T_m^2$ und $\mathfrak{g}' = G\,2\pi/T_m$ Constanten.

Wir setzen jetzt in den Gleichungen (1):

$$(3\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - B_1\,m'\,\mathfrak{k}'\,\xi' &= m\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\\ m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - B_2\,m'\,\mathfrak{k}'\,\eta' &= m\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\\ m\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - B_3\,m'\,\mathfrak{k}'\,\zeta' &= m\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}\end{aligned}\right.$$

oder auch, wenn $\mathfrak{k}'\xi'\ldots$ mittels der Gleichungen (2) eliminirt werden:

$$(3\text{b})\qquad \left\{\begin{aligned} (m + m'B_1\,C)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + m'B_1\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} + m'B_1\,\mathfrak{g}'\frac{\partial\xi'}{\partial t} &= m\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\\ (m + m'B_2\,C)\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + m\,B_2\frac{\partial^2\eta'}{\partial t^2} + m'B_2\,\mathfrak{g}'\frac{\partial\eta'}{\partial t} &= m\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\\ (m + m'B_3\,C)\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + m'B_3\frac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2} + m'B_3\,\mathfrak{g}'\frac{\partial\zeta'}{\partial t} &= m\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}\end{aligned}\right.$$

In beiden Fällen dürfen wir die rechts stehenden Grössen bezeichnen als *die auf reinen Aether reducirten Componenten der bewegenden Kraft der Aether- und Körpertheilchen*, dieselbe gemessen durch die Beschleunigungen. Die letzten Gleichungen lassen sich ohne weiteres einmal in Beziehung auf t integriren, sodass z. B. die erste derselben wird:

$$(m + m'B_1\,C)\frac{\partial\xi}{\partial t} + m'B_1\frac{\partial\xi'}{\partial t} + m'B_1\,\mathfrak{g}'\,\xi' = m\frac{\partial\lambda}{\partial t}.$$

Es bedeutet dann die rechts stehende Grösse *die auf reinen Aether reducirte Bewegungsquantität* ($\partial\lambda/\partial t$ *selber die Geschwindigkeitscomponente*) *der Aether- und Körpertheilchen.* Eine weitere Integration würde, sofern wenigstens die auf der linken Seite vorkommende Reibungsconstante $\mathfrak{g}'$ nicht verschwindet, die Anschaulichkeit stören, und soll aus diesem Grunde eine entsprechende Behandlung der Gleichungen (3a) überhaupt vermieden werden. Analytisch ist selbstverständlich eine solche Rücksichtnahme überflüssig und unter Umständen sogar schädlich.

Es liegt nun offenbar nahe, die ξ, η, ζ mit den Componenten der electrischen Kraft und die λ, μ, ν mit denen der dielectrischen Polarisation zu analogisiren. Schreibt man in der That die erste der Gleichungen (3a) so:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\left(1 + B_1 \mathfrak{k}' \frac{m' \xi'}{m \xi}\right)$$

und beachtet, dass nach späteren Entwickelungen der eingeklammerte Factor nichts anderes ist, als das Quadrat des Hauptbrechungsindex n_1, so erhält man nunmehr:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = n_1^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = n_2^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = n_3^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Diese Substitutionen in Gleichungen (1) führen sie dann sofort in die Form der Gleichungen (4) des vorigen Aufsatzes über, wenn man auch hier, wie dort geschehen, $v^2 = \mathfrak{e}/m = 1$ setzt.

Den beiden Gleichungensystemen (1) und (2) fügen wir schliesslich die Bedingungen der Senkrechtheit hinzu:

$$(5) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z} = 0$$

für die Strahlschwingungen und:

$$(6a) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) = 0$$

für die Normalschwingungen. Letztere Gleichung schreibt sich in Rücksicht auf (3a) auch so:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - m' B_1 \mathfrak{k}' \frac{\partial \xi'}{\partial x}\right] + \left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - m' B_2 \mathfrak{k}' \frac{\partial \eta'}{\partial y}\right] \\ & \qquad + \left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) - m' B_3 \mathfrak{k}' \frac{\partial \zeta'}{\partial z}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

In der Optik führt man die beiden ersten Bedingungen (5) auf ein Incompressibilitätsprincip zurück; bezüglich der letzten behalte ich mir besondere Darlegung vor.

2. *Die Schwingungsausdrücke und ihre Substitution.* Den Schwingungsausdrücken geben wir wie bisher die reellen Formen:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A}_x e^{-\varkappa \delta'} \cos(\varphi - \psi_x) \\ \eta &= \mathfrak{A}_y e^{-\varkappa \delta'} \cos(\varphi - \psi_y) \\ \zeta &= \mathfrak{A}_y e^{-\varkappa \delta'} \cos(\varphi - \psi_z) \end{aligned} \right.$$

für die Transversalcomponenten der Aethertheilchen,

$$(8)\quad \begin{cases} \xi' = \mathfrak{A}'_x e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_x - \varDelta) \\ \eta' = \mathfrak{A}'_y e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_y - \varDelta) \\ \zeta' = \mathfrak{A}_z e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi'_z - \varDelta) \end{cases}$$

für die der Molecüle und:

$$(9)\quad \begin{cases} \xi^l = \mathfrak{A}^l_x e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi_x - l) \\ \eta^l = \mathfrak{A}^l_y e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi'_y - l) \\ \zeta^l = \mathfrak{A}^l_z e^{-\varkappa\delta'} \cos(\varphi - \psi'_z - l) \end{cases}$$

für die Longitudinalcomponenten der Aethertheilchen. Darin bedeuten:

$$\delta' = u' x + v' y + w' z$$

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\nu(u x + v y + w z)}{\lambda}\right),$$

und sollen die hierin vorkommenden ν und $\varkappa$ als *Refractionscoefficient*, bez. *Extinctionscoefficient* bezeichnet werden, während λ wieder die Wellenlänge im Weltäther bedeutet.

Was dann zunächst die Integration der Gleichungen (2) betrifft, so liefert die Substitution der Ausdrücke (7) und (8) die Beziehungen:

$$(10)\qquad \mathfrak{A}'_x/\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}'_y/\mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}'_z/\mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}'/\mathfrak{A},$$

$$(11)\quad \frac{\mathfrak{A}' \cos\varDelta}{\mathfrak{A}} = \frac{C\left(\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1\right)^2 + G^2\dfrac{T^2}{T_m^2}}, \quad \frac{\mathfrak{A}' \sin\varDelta}{\mathfrak{A}} = \frac{C\,G\,\dfrac{T}{T_m}}{\left(\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1\right)^2 + G^2\dfrac{T^2}{T_m^2}}$$

Ferner lässt sich die erste der beiden sogenannten Incompressibilitätsgleichungen (5) bezüglich der Strahlschwingungen auf die Gestalt bringen:

$$\mathfrak{A}_x f_x \sin(\varphi - \psi'_x - \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_y)$$
$$+ \mathfrak{A}_z f_z \sin(\varphi - \psi'_z - \vartheta_z) = 0,$$

worin f_x, f_y, f_z; ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z die Bedeutung haben:

$$f_x = \sqrt{\nu^2 u^2 + \varkappa^2 u'^2}, \quad f_y = \sqrt{\nu^2 v^2 + \varkappa^2 v'^2}, \quad f_z = \sqrt{\nu^2 w^2 + \varkappa^2 w'^2}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_x = \frac{\varkappa u'}{\nu u}, \quad \operatorname{tg}\vartheta_y = \frac{\varkappa v'}{\nu v}, \quad \operatorname{tg}\vartheta_z = \frac{\varkappa w'}{\nu w}.$$

Sie zerfällt bei Eliminirung der laufenden Zeit in die beiden Einzelgleichungen:

$$\mathfrak{A}_x f_x \cos(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \cos(\psi_y + \vartheta_y) + \mathfrak{A}_z f_z \cos(\psi_z + \vartheta_z) = 0$$
$$\mathfrak{A}_x f_x \sin(\psi_x + \vartheta_x) + \mathfrak{A}_y f_y \sin(\psi_y + \varphi_y) + \mathfrak{A}_z f_z \sin(\psi_z + \vartheta_z) = 0.$$

Diese auch für isotrope Medien geltende Doppelgleichung ist selbstverständlich unabhängig von der Richtung der Coordinatenaxen. Bezieht man sie auf ein erstes System, für welches etwa $v = 0$ wird, so fallen bei passendem Quadriren und Addiren die Phasen aus der resultirenden Gleichung heraus, und diese bleibt auch dann von ihnen frei, wenn die Axen durch Drehung in irgend welche neue Richtungen übergeführt werden. Demnach verlangt die Coexistenz beider Gleichungen, dass gleichzeitig:

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi_x + \vartheta_x = \psi_y + \vartheta_y = \psi_z + \vartheta_z \\ \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_y f_y + \mathfrak{A}_z f_z = 0 \end{cases}$$

werde. Dividirt man die zweite durch $\sqrt{\nu^2 + \varkappa^2}$ und setzt, der Cosinusbedingung entsprechend:

$$(13) \quad \mathfrak{u} = \sqrt{\frac{\nu^2 u^2 + \varkappa^2 u'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}}, \quad \mathfrak{v} = \sqrt{\frac{\nu^2 v^2 + \varkappa^2 v'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}}, \quad \mathfrak{w} = \sqrt{\frac{\nu^2 w^2 + \varkappa^2 w'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}},$$

so schreibt sich dieselbe, unter $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Richtungscosinus der restaurirten electrischen Kraft verstanden, definitiv [1]:

$$(14) \qquad \mathfrak{U}\mathfrak{u} + \mathfrak{V}\mathfrak{v} + \mathfrak{W}\mathfrak{w} = 0.$$

Es ordnet sich also einer gegebenen Strahlrichtung u, v, w, eine gewisse Hülfsrichtung $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *zu, welche senkrecht auf der restaurirten electrischen Kraft steht.* Dieselbe Folgerung ergiebt die zweite der Gleichungen (5).

3. *Fortsetzung.* Behandeln wir in ähnlicher Weise die für Normalschwingungen geltende Bedingungsgleichung (6), so geht beispielsweise das erste Glied derselben bei Substitution der Ausdrücke (7) und (8) über in:

$$-4\pi^2 f_x \left[m \frac{\mathfrak{A}_x}{T^2} \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) + m' B_1 \frac{\mathfrak{A}'_x}{T_m^2} \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x - \Delta) \right]$$
$$= -\frac{4\pi^2}{T^2} f_x \left[\left(m\,\mathfrak{A}_x + m' B_1 \frac{T^2}{T_m^2} \mathfrak{A}'_x \cos\Delta \right) \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) \right.$$
$$\left. + m' B_1 \frac{T^2}{T_m^2} \mathfrak{A}'_x \sin\Delta \cos(\varphi - \psi_x - \vartheta_x) \right],$$

[1] In meiner Optik bin ich 1885 zu diesem Schlusse noch nicht direct, sondern auf theilweise mühsamen Umwegen gelangt (vgl. p. 303).

worin f_x die obige Bedeutung hat. Setzt man die eingeklammerten Factoren gleich $m\mathfrak{A}_x'(1+pD_1)$, bez. gleich $m\mathfrak{A}_x q D_1$ und schreibt abkürzungsweise:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{n}_1{}^2 = \sqrt{(1+pD_1)^2+(qD_1)^2} \\ \mathfrak{n}_2{}^2 = \sqrt{(1+pD_2)^2+(qD_2)^2}, \\ \mathfrak{n}_3{}^2 = \sqrt{(1+pD_3)^2+(qD_3)^2} \end{cases}$$

so lässt sich Gleichung (6) die Form geben:

$$\mathfrak{n}_1{}^2\mathfrak{A}_x f_x \sin(\varphi-\psi_x-\vartheta_x-\beta_x)+\mathfrak{n}_2{}^2\mathfrak{A}_y f_y\sin(\varphi-\psi_y-\vartheta_y-\beta_y) + \mathfrak{n}_3^2\mathfrak{A}_z f_z\sin(\varphi-\psi_z-\vartheta_z-\beta_z)=0.$$

Sie zerfällt vermöge einer ähnlichen Ueberlegung wie oben in zwei Einzelgleichungen, von denen die hier in Betracht kommende die definitive Gestalt bekommt:

$$(16)\qquad \mathfrak{n}_1{}^2\mathfrak{U}\mathfrak{u}+\mathfrak{n}_2{}^2\mathfrak{B}\mathfrak{v}+\mathfrak{n}_3{}^2\mathfrak{W}\mathfrak{w}=0.$$

Die darin vorkommenden Grössen p, q; D_1, D_2, D_3 erhalten durch Zuziehung der Gleichungen (11), wenn in diesen noch die Quotienten T/T_m durch die ihnen proportionalen λ/λ_m ersetzt werden, die Bedeutung:

$$(17)\qquad \begin{cases} D_1=\dfrac{m'}{m}B_1C, \quad D_2=\dfrac{m'}{m}B_2C, \quad D_3=\dfrac{m'}{m}B_3C \\[2ex] p=\dfrac{1-\dfrac{\lambda^2_m}{\lambda^2}}{\left(1-\dfrac{\lambda^2_m}{\lambda^2}\right)^2+G^2\dfrac{\lambda^2_m}{\lambda^2}}, \quad q=\dfrac{G\dfrac{\lambda_m}{\lambda}}{\left(1-\dfrac{\lambda^2_m}{\lambda^2}\right)^2+G^2\dfrac{\lambda^2_m}{\lambda^2}}, \end{cases}$$

während nach wie vor $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ durch die Ausdrücke (13) definirt sind. Schreiben wir Gleichung (16) so:

$$(16\,\mathrm{b})\qquad \mathfrak{U}_p\mathfrak{u}+\mathfrak{B}_p\mathfrak{v}+\mathfrak{W}_p\mathfrak{w}=0,$$

so lässt sich sagen: *Jeder gegebenen Normalrichtung u, v, w ordnet sich eine gewisse Hülfsrichtung* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *zu, welche senkrecht auf der restaurirten dielectrischen Polarisation steht.*

Was nunmehr schliesslich die Integration der Differentialgleichungen (1) betrifft, so führt dieselbe, wie bereits früher[1]) gezeigt, zu dem definitiven Gleichungssystem:

---

[1]) Vgl. Ketteler, Theoret. Optik, p. 310. 1885; Wied. Ann. **49.** p. 526. 1893.

Auf dem *kürzesten* Wege erhält man diese Gleichungen, wenn

$$(18)\left\{\begin{aligned}\sqrt{p^2+q^2}\,(D_1-D)\,\mathfrak{U} &= \operatorname{tang}\Theta\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)+4\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}\,.\,\mathfrak{u}\\ \sqrt{p^2+q^2}\,(D_2-D)\,\mathfrak{V} &= \operatorname{tang}\Theta\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)+4\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}\,.\,\mathfrak{v}.\\ \sqrt{p^2+q^2}\,(D_3-D)\,\mathfrak{W} &= \operatorname{tang}\Theta\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)+4\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}\,.\,\mathfrak{w}\end{aligned}\right.$$

Darin entspricht die Variable D den Gleichungen:

$$(19)\qquad \nu^2-\varkappa^2=1+p\,D,\quad 2\,\nu\,\varkappa\cos\varrho=q\,D$$

und ist sonach:

$$(19\text{b})\quad\left\{\begin{aligned}&\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}=\sqrt{(1+p\,D)^2+(q\,D)^2}=\mathfrak{n}^2,\\ &\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2-1)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2\varrho}=\sqrt{p^2+q^2}\,.\,D.\end{aligned}\right.$$

ϱ ist der Winkel zwischen Propagationsrichtung und Extinctionsrichtung und daher in unserem Falle gleich dem Brechungswinkel r, sodass

$$(20)\qquad \cos\varrho=\cos r=u\,u'+v\,v'+w\,w'.$$

Endlich ist $\operatorname{tg}\Theta=\mathfrak{A}^l/\mathfrak{A}$ der Quotient der restaurirten Longitudinal- und Transversalschwinguugen des Aethers (der elektrischen Kraft), und Θ selbst misst den Winkel zwischen der restaurirten electrischen Kraft und der restaurirten dielectrischen Polarisation oder den gleich grossen Winkel zwischen den Richtungen $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$ und $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$.

---

man in Ansehung der ebenfalls zulässigen, complexen Schwingungsausdrücke:

$$\xi=\mathfrak{A}_x(\cos\psi_x+\sqrt{-1}\sin\varphi_x)$$

$$\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{[\nu u+\sqrt{-1}\,\varkappa u']x+[\nu v+\sqrt{-1}\,\varkappa v']y+[\nu w+\sqrt{-1}\,\varkappa w']z}{\lambda}\right)\ldots$$

in den Hauptgleichungen (26) p. 535, und zwar in der Form:

$$A_x(n^2-n_1^2)=(n\,f\,A)\,n\,u=F\,n\,u\;\ldots$$

die Substitutionen macht:

$$A_x=\mathfrak{A}_x(\cos\psi_x+\sqrt{-1}\sin\psi_x),\quad F=F_1+F_2\sqrt{-1}$$

$$n^2=1+(p+q\sqrt{-1})\,D,\qquad n\,u=\nu\,u+\varkappa\,u'\sqrt{-1}\ldots$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären spaltet sich dann jede dieser Gleichungen in zwei einzelne, und durch Quadriren und Addiren derselben erhält man schliesslich:

$$\sqrt{p^2+q^2}\,(D_1-D)\,\mathfrak{A}_x=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\,\sqrt{\nu^2u^2+\varkappa^2u'^2}\ldots,$$

welche Gleichungen materiell mit denen des Textes übereinstimmen.

4. *Die Gesetze der Doppelbrechung und Doppelabsorption.* Von jetzt ab werde ich Strahlrichtung und Normalrichtung durch angehängte s und n unterscheiden.

Man erhält zunächst durch bekannte Behandlung der Hauptgleichungen (18) in Verbindung mit der Bedingungsgleichung (14) der Strahlschwingungen:

$$\frac{\mathfrak{u}_s^2}{D_1 - D_s} + \frac{\mathfrak{v}_s^2}{D_2 - D_s} + \frac{\mathfrak{w}_s^2}{D_3 - D_s} = 0 \tag{21}$$

$$D_s = D_1 \mathfrak{U}^2 + D_2 \mathfrak{V}^2 + D_3 \mathfrak{W}^2 \tag{22}$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\mathfrak{n}_s^2 \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{u}_s}{D_1 - D_s}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}_s}{D_2 - D_s}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{w}_s}{D_3 - D_s}\right)^2}}. \tag{23}$$

$$\begin{cases} \nu_s^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_s \\ 2\, \nu_s \varkappa \cos r_s = q\, D_s. \end{cases} \tag{24}$$

Dagegen liefert die Verbindung der Gleichungen (18) mit der Bedingungsgleichung (16) der Normalschwingungen:

$$\frac{\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{u}_n^2}{D_1 - D_n} + \frac{\mathfrak{n}_2^2 \mathfrak{v}_n^2}{D_2 - D_n} + \frac{\mathfrak{n}_3^2 \mathfrak{w}_n^2}{D_3 - D_n} = 0 \tag{25}$$

$$D_n = \frac{\mathfrak{n}_1^2 D_1 \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{n}_2^2 D_2 \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{n}_3^2 D_3 \mathfrak{W}^2}{\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{n}_2^2 \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{n}_3^2 \mathfrak{W}^2} \tag{26}$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\mathfrak{n}_n^2 \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{u}_n}{D_1 - D_n}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}_n}{D_2 - D_n}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{w}_n}{D_3 - D_n}\right)^2}}. \tag{27}$$

$$\begin{cases} \nu_n^2 - \varkappa^2 - 1 - p\, D_n \\ 2\, \nu_n \varkappa \cos r_n = q\, D_n. \end{cases} \tag{28}$$

Dabei ist zu bemerken, dass nur der Refractionscoefficient ν, nicht aber der Extinctionscoefficient $\varkappa$ für Strahl und Normale verschiedene Werthe hat. [1])

Sofern nun die Gleichungen (21) und (25) für eine gegebene Richtung $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zwei verschiedene D liefern, so er-

1) Dass in der That $\varkappa_n = \varkappa_s = \varkappa$ sein muss, ergiebt sich am einfachsten aus der p. 531 aufgestellten Bedingungsgleichung $n_n \delta_n = n_s \delta_s$, sofern man darin zunächst die Ausdrücke (14) und sodann für absorbirende Medien die in der Anmerkung auf p. 547 benutzten complexen Ausdrücke einführt. Sie zerfällt so in die Einzelgleichungen: $\nu_n \delta_n = {}_s \delta_s$, $\varkappa_s = \varkappa_n$.

hält man bei successivem Einsetzen derselben in die Gleichungen (24) und (28) und Auflösen dieser letzteren in Beziehung auf ν und $\varkappa$ zwei verschiedene Paare von Refractions- und Extinctionscoefficienten, welche sich dieser Richtung zuordnen. Der Krystall zeigt also zugleich doppelte Brechung und doppelte Absorption.

Dies vorausgesetzt, denken wir uns die Normale einer an den Krystall geschliffenen ebenen Fläche zugleich als Einfallsloth und als Extinctionsnormale durch die auf die Krystallaxen bezogenen Cosinus u', v', w' gegeben. Als anstossendes Medium wurde der Einfachheit halber der dispersionslose Aether angenommen. Der Krystall selbst möge durch seine axialen Attribute D_1, D_2, D_3, sowie durch seine charakteristische Wellenlänge λ_m und seine Reibungsconstante G vollständig bestimmt sein. Es soll dann für eine beliebige Farbe zu jeder im Inneren desselben gegebenen Strahlrichtung die zugehörige Normale und die entsprechende äussere Welle und zu jeder im Inneren gegebenen Normale die coordinirte Strahlrichtung und äussere Welle gefunden und gleichzeitig Refractions- und Extinctionscoefficient berechnet werden.

I. Gegeben sei eine Krystallrichtung als *Strahl*richtung durch die Cosinus u_s, v_s, w_s und durch den sich nach Gleichung (20) ergebenden Strahlbrechungswinkel r_s. Die Gleichungen (24) ergeben dann in Verbindung mit (21) und (13) folgende Formen:

$$(29)\quad \begin{cases} \nu_s^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_s = p\, F_s(\nu_s,\ \varkappa;\ u_s,\ v_s,\ w_s;\ u',\ v',\ w') \\ 2\, \nu_s\, \varkappa \cos r_s = q\, D_s = q\, F_s(\nu_s,\ \varkappa;\ u_s,\ v_s,\ w_s;\ u',\ v',\ w'), \end{cases}$$

worin F_s ein Functionszeichen bedeutet. Diese Gleichungen seien in Beziehung auf ν_s und $\varkappa$ aufgelöst. Man erhält dann sofort aus Gleichungen (13) die der Richtung u_s, v_s, w_s sich zuordnende Richtung $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$, sowie aus Gleichung (19b) den Werth von $\mathfrak{n}_s^2$ und weiter aus Gleichung (23) den Winkel Θ. Um die Ebene kennen zu lernen, in welcher derselbe an $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$ anzulegen ist, um die Richtung $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ zu erhalten, construire man an Fläche der Gleichung (21) im Schnittpunkt mit dem gegebenen Hülfsstrahle eine Tangentialebene und fälle vom Mittelpunkt auf dieselbe ein Perpendikel; die Ebene von Perpendikel und Strahl ist dann aus Symmetriegründen die gesuchte Ebene. Ist so $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ gefunden, so gibt Gleichung (25) das entsprechende D_n, und man erhält weiter sowie aus Gleichungen (28) die Werthe von ν_n und $\cos r_n$. Schliesslich geben die Beziehungen:

$$\nu_s / \nu_n = \cos \vartheta, \quad \nu_n \sin r_n = \sin e$$

den Winkel ϑ zwischen Strahl und Normale sowie den Austritts- oder Einfallswinkel e. — Für senkrechten Eintritt wird insbesondere:

$$u_s = u' = \mathfrak{u}_s, \ v_s = v' = \mathfrak{w}_s, \ w_s = w' = \mathfrak{w}_s; \ r_s = 0$$

und sind die Gleichungen (24) ohne weiteres auflösbar.

II. Gegeben sei eine Krystallrichtung als *Normal*richtung durch die Cosinus u_n, v_n, w_n und durch den Normalbrechungswinkel r_n. Die Gleichungen (28) ergeben dann in Verbindung mit (25) und (13) die Formen:

$$(30) \begin{cases} \nu_n^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_n = p\, F_n(\nu_n, \varkappa; u_n, v_n, w_n; u', v', w') \\ 2\, \nu_n \varkappa \cos r_n = q\, D_n = q\, F_n(\nu_n, \varkappa; u_n, v_n, w_n; u', v', w'). \end{cases}$$

Diese Gleichungen seien in Beziehung anf ν_n und $\varkappa$ aufgelöst. $\nu_n \sin r_n$ gibt dann sofort den Einfallswinkel e. Weiter erhält man aus Gleichungen (13) die der Richtung u_n, v_n, w_n sich zuordnende Richtung $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{v}_n$, $\mathfrak{w}_n$ sowie aus Gleichung (27) den Winkel θ. Um wieder die Ebene dieses Winkels kennen zu lernen, bilde man zur Fläche der Gleichung (25) die Enveloppe und suche denjenigen Berührungspunkt, welchen die am Endpunkte der Richtung $\mathfrak{u}_n, \mathfrak{v}_n, \mathfrak{w}_n$ senkrecht zu derselben construirte Ebene mit der Enveloppe gemein hat. Eine durch diese Normale und den Berührungspunkt hindurchgelegte Ebene ist alsdann aus Symmetriegründen die gesuchte Ebene. Ist so durch Anlegung des Winkels θ an $\mathfrak{u}_n, \mathfrak{v}_n, \mathfrak{w}_n$ die Richtung $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}_s$ gefunden, so gibt Gleichung (21) das entsprechende D_s, und man erhält schliesslich aus Gleichungen (24) die Werthe von ν_s und $\cos r_s$. Der Quotient von ν_s und ν_n liefert wiederum ϑ. — Für senkrechten Eintritt wird insbesondere:

$$u_n = u' = \mathfrak{u}_n, v_n = v' = \mathfrak{v}_n, w_n = w' = \mathfrak{w}_n; r_n = e = 0,$$

und sind die Gleichungen (28) ohne Weiteres auflösbar.

5. *Specialisirung für die Hauptschnitte.* Leider sind die hier verlangten Rechnungen ziemlich verwickelt und umständlich. Sie vereinfachen sich natürlich beträchtlich für optisch einaxige Medien sowie für die Hauptschnitte der optisch zweiaxigen.

Nehmen wir nun an, dass die XZ-Ebene ein solcher Hauptschnitt sei, dass also Strahl und Normale in ihr liegen und folglich $v_s = v_n = 0$ seien.

Für die *extraordinären*, ebenfalls im Hauptschnitt liegenden Schwingungen erhalten dann die auf den *Strahl* bezüglichen Gleichungen (20) die Form:

$$(29\text{b})\quad \left\{\begin{aligned} \nu_s^2 - \varkappa^2 - 1 &= p\left(D_1 \frac{\nu_s^2 w_s^2 + \varkappa^2 w'^2}{\nu_s^2 + \varkappa^2} + D_3 \frac{\nu_s^2 u_s^2 + \varkappa^2 u'^2}{\nu_s^2 + \varkappa^2}\right) \\ 2\,\nu_s\,\varkappa \cos r_s &= q\left(D_1 \frac{\nu_s^2 w_s^2 + \varkappa^2 w'^2}{\nu_s^2 + \varkappa^2} + D_3 \frac{\nu_s^2 u_s^2 + \varkappa^2 u'^2}{\nu_s^2 + \varkappa^2}\right)\end{aligned}\right.$$

Man leitet daraus ab:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\nu_s^4 - \varkappa^4 - \nu_s^2 A - \varkappa^2 B = 0 \\ &\nu_s^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\,\nu_s \varkappa\, C = 0,\end{aligned}\right.$$

in welchen Gleichungen A, B, C die Bedeutung haben:

$$A = p\,(D_1 w_s^2 + D_3 u_s^2),\quad B = p\,(D_1 w'^2 + D_3 u'^2)$$

$$C = \frac{p \cos r_s}{q}.$$

Eliminirt man aus ihnen den Brechungsindex ν, so erhält man den Extinctionsindex $\varkappa$ mittels einer Gleichung IV. Grades.[1]) Sind so ν_s und $\varkappa$ und weiter $\mathfrak{u}_s$, $\mathfrak{w}_s$ gefunden, so gewinnt man θ mittels der einfacheren Gleichung:

$$(23\text{b})\quad \operatorname{tang}\Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\mathfrak{n}_s^2 \sqrt{\left(\dfrac{\mathfrak{u}_s}{D_1 - D_s}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathfrak{w}_s}{D_3 - D_s}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{p^2 + q^2}\,(D_1 - D_3)}{\mathfrak{n}_s^2}\,\mathfrak{u}_s\,\mathfrak{w}_s,$$

1) Die sämmtlichen Coefficienten derselben habe ich Wied. Ann. **59.** p. 529. 1893, mitgetheilt. — Für den speciellen Fall der Totalreflexion an anisotropen Medien ist übrigens die Lösung der Gleichungen (29b) schon 1885 in meinem Buche p. 370—372 gegeben und ist daselbst ausdrücklich auf den hier bearbeiteten allgemeinen Fall hingewiesen worden.

und die Ebene dieses Winkels ist die Ebene des Hauptschnittes selber.

Nachdem auch $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{w}_n$ bekannt, gibt Gleichung (25) in der einfacheren Form:

$$D_n = \frac{\mathfrak{n}_1^2 D_3 \mathfrak{u}_n^2 + \mathfrak{n}_3^2 D_1 \mathfrak{w}_n^2}{\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{u}_n^2 + \mathfrak{n}_3^2 \mathfrak{w}_n^2} \tag{25b}$$

den Werth von D_n.

Wäre dagegen die *Normalrichtung* gegeben, so würde die erste der Gleichungen (30) vermöge des vorstehenden Werthes von D_n sich auf die Form bringen lassen:

$$\nu_n^2 - \varkappa^2 - 1 = p\, D_n = p\, \frac{\nu_n^2 P + \varkappa^2 Q}{\nu_n^2 R + \varkappa^2 S},$$

und so würden die zusammengehörigen Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\nu_n^4 R - \nu_n^2 \varkappa^2 (R - S) - \nu_n^2 (P + R) - \varkappa^2 (Q + S) - \varkappa^4 S = 0 \\ &\nu_n^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\, \nu_n\, \varkappa\, M = 0, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

deren Coefficienten P, Q, R, S, M den oben stehenden A, B, C ähnlich gebaut sind. Für Θ und D_s gelten die Beziehungen:

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{\sqrt{p^2 + q}}{\mathfrak{n}_n^2 \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{u}_n}{D_1 - D_n}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{w}_n}{D_3 - D_n}\right)^2}} \tag{27b}$$

$$D_s = D_1 \mathfrak{w}_s^2 + D_3 \mathfrak{u}_s^2. \tag{22b}$$

Was endlich die auf dem Hauptschnitt senkrechten *ordinären* Schwingungen betrifft, so fallen für dieselben Strahl und Normale zusammen, und D, welches von der Orientirung unabhängig wird, erlangt den constanten Werth D_2.

Man erhält dann einfach mittels der Gleichungen (24) oder (28) in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} &\nu^2 - \varkappa^2 = 1 + p\, D_2 \\ &2\, \nu\, \varkappa = \frac{q\, D_2}{\cos r} \end{aligned}\right. \tag{33}$$

die Auflösung:

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\nu^2 &= \sqrt{(1 + p\, D_2)^2 + \left(\frac{q\, D_2}{\cos r}\right)^2} + (1 + p\, D_2) \\ 2\,\varkappa^2 &= \sqrt{(1 + p\, D_2)^2 + \left(\frac{q\, D_2}{\cos r}\right)^2} - (1 + p\, D_2). \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Sofern übrigens $\nu \cos r = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 e}$, so lässt sich vorstehendes Gleichungenpaar auch durch das folgende ersetzen:

$$
(35) \qquad \begin{aligned} \nu^2 - \varkappa^2 &= 1 + p\, D_2 \\ 2\, \varkappa \sqrt{\nu^2 - \sin^2 e} &= q\, D_2. \end{aligned}
$$

Mittels desselben erhält man:

$$
(36) \quad \begin{cases} 2\, \nu^2 = \sqrt{(1 + p\, D_2 - \sin^2 e)^2 + (q\, D_2)^2} + (1 + p\, D_2 + \sin^2 e) \\ 2\, \varkappa^2 = \sqrt{(1 + p\, D_2 - \sin^2 e^2) + (q\, D_2)^2} - (1 + p\, D_2 - \sin^2 e). \end{cases}
$$

Im Falle der ordinären Schwingungen kann man daher ebenso wie für isotrope Medien nach Willkür sowohl die äussere wie die innere Welle zum Ausgang der Behandlung wählen. Die letzten Gleichungen gewähren zugleich eine Uebersicht über die Abhängigkeit des Refractions- wie Extinctionsindex vom Einfallswinkel.

Lässt man in allen vorstehenden Formeln die Reibungsconstante G fort und fort stetig abnehmen, so gehen dieselben successive in die bekannten Formeln der durchsichtigen Medien über.

Beziehen sich dieselben sämmtlich auf ein nur aus einer einzigen Molecülart bestehendes Medium, so würde nunmehr der Uebergang zu Medien, die aus beliebig vielen Molecülarten bestehen, selbst für den Fall nicht schwierig sein, dass dieselben nicht um drei identische Symmetrieaxen, sondern um beliebig viele, aber je unter sich rechtwinklige Axen geordnet sind. [1]

Endlich sind auch die Formeln für die Metallreflexion der Krystalle [2] durch die vorstehenden beiden Abhandlungen in ihrer Handhabung sehr viel bequemer geworden, als sie es früher waren.

Die gesammte Dioptrik wie Katoptrik der anisotropen Medien ist demnach gegenwärtig mit wesentlicher Beihülfe der Maxwell'schen Ideen zu einem gewissen definitiven Abschluss gekommen. Mitarbeiter habe ich bei diesen meinen Bestrebungen [3] meines Wissens nicht gehabt, wohl aber vielfache Angriffe und Ausfälle über mich ergehen lassen müssen.

---

1) Vgl. Ketteler, Theor. Optik p. 319–328.

2) Ebendaselbst p. 355–364.

3) Freilich sind manche meiner Sätze und Formeln unter fremder Bezeichnung und ohne Quellenangabe in die Arbeiten Anderer übergegangen.

Nachtrag. Wenn man, wie p. 548 und 549 geschehen ist, zunächst ν und $\varkappa$ direct berechnet, so erhält man weniger übersichtliche Formeln, als wenn man sofort das entsprechende D berechnet. Beispielsweise lassen sich für die extraordinären Schwingungen im Hauptschnitt ($v = v' = 0$) Gleichungen (21) und (25) mittels (13) auf die gemeinsame Form bringen:

$$\nu^2(\alpha - \beta D) + \varkappa^2(\alpha' - \beta' D) = 0, \tag{37}$$

worin die Coefficienten α, β; $\alpha' \beta'$ die folgende Bedeutung haben.

Für die Normalrichtung ist:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{n}_1{}^2 D_3 u^2 + \mathfrak{n}_3{}^2 D_1 w^2, & \beta &= \mathfrak{n}_1{}^2 u^2 + \mathfrak{n}_3{}^2 w^2 \\ \alpha' &= \mathfrak{n}_1{}^2 D_3 u'^2 + \mathfrak{n}_3{}^2 D_1 w'^2, & \beta' &= \mathfrak{n}_1{}^2 u'^2 + \mathfrak{n}_3{}^2 w'^2 \end{aligned}$$

und für die Strahlrichtung:

$$\begin{aligned} \alpha &= D_3 u^2 + D_1 w^2, & \beta &= 1 \\ \alpha' &= D_3 u'^2 + D_1 w'^2, & \beta' &= 1. \end{aligned}$$

Combinirt man vorstehende Gleichung mit den für ein beliebiges D geltenden Ausdrücken (34), so geht dieselbe über in:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[(1 + pD)^2 + \left(\frac{q}{\cos r} D\right)^2\right] [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D]^2 \\ \quad = (1 + pD)^2 [(\alpha - \alpha') - (\beta - \beta') D]^2, \end{array}\right. \tag{38}$$

aus welcher sich D unmittelbar als Function von u, w; u'; w', r berechnen lässt. Die vier Wurzeln dieser Gleichung beziehen sich gleichmässig auf diejenigen beiden möglichen Stellen, von welchen die eine durch Vertauschung von ν und $\varkappa$ und damit zugleich der Propagationsrichtung und Extinctionsrichtung aus der anderen hervorgeht ($\nu_2 = \nu_1 \sqrt{-1}$, $\varkappa_2 = \varkappa_1 \sqrt{-1}$).

Bringt man dieselbe noch schliesslich auf die Form:

$$D^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'}\right) D + \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{Q^2}{4\beta\beta'} [(\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') D]^2 = 0,$$

so lässt sie sich, so lange wenigstens bei nicht zu starker *Absorption* das Quadrat des Ausdrucks:

$$Q = \frac{q\,D}{[1 + pD] \cos r}$$

oder bei nicht zu starker *Doppelbrechung* und *Refraction* das Product von Q^2 in seinen eingeklammerten Factor als kleine

Grösse betrachtet werden darf, näherungsweise als *quadratische* Gleichung auflösen; den ersten Näherungswerth von D erhält man dann für $Q = 0$.

Für mässige Absorption, verbunden mit mässiger Doppelbrechung und mässiger Refraction, darf man daher überhaupt ohne nennenswerthen Fehler die beiden Richtungen u, v, w und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *behufs Berechnung der Variablen D als identisch ansehen und demgemäss auch in den Hauptgleichungen* (18) *die eine durch die andere ersetzen.*

Durch diesen Nachweis wird jedenfalls die praktische Verwerthung der hier vorgetragenen Formeln in wünschenswerthester Weise vereinfacht.

Weitere Anwendungen der Gleichungen (37) und (38) sollen in einem dritten Aufsatze mitgetheilt werden.

Münster i. W., im Mai 1895.