

Ueber einen Lüroth-Gordan'schen Satz.

Von

EUGEN NETTO in Giessen.

Herr Lüroth hat im neunten Bande der Annalen (S. 163—165) den Satz bewiesen, dass man eine unicursale Curve so auf eine Gerade beziehen kann, dass die Punkte beider sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Diesen Satz hat Herr Gordan in Band XXIX der Annalen (S. 318) dahin erweitert, dass „wenn zwei rationale Functionen

$$f_1(x, y, z, \dots), \quad f_2(x, y, z, \dots)$$

einer algebraischen Gleichung genügen, deren Coefficienten von x, y, z, \dots unabhängig sind, $G(f_1, f_2) = 0$, dann eine rationale Function λ von f_1, f_2 gefunden werden kann, durch welche umgekehrt f_1 und f_2 rational darstellbar sind.“ Ich habe den Beweis des Lüroth'schen Satzes aufgenommen, um zu zeigen, wie derselbe bei rein algebraischer Begründung eine Wendung zulässt, der zu Folge er ohne Weiteres auch die Richtigkeit der Gordan'schen Erweiterung vor Augen führt. Gern hätte ich dabei den rein arithmetischen Satz, dass der grösste gemeinsame Theiler zweier ganzen Functionen von der Gestalt

$$\varphi_1(x) \psi(x') - \varphi_1(x') \psi(x), \quad \varphi_2(x) \psi(x') - \varphi_2(x') \psi(x)$$

wieder die Form

$$\chi(x) \varpi(x') - \chi(x') \varpi(x)$$

besitzt, ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen bewiesen, doch ist mir das bisher noch nicht gelungen.

Wir wollen unter $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi(x)$ drei ganze Functionen der Variablen x verstehen, welche keinen, allen dreien gemeinsamen Theiler besitzen, und deren Coefficienten einem beliebigen Rationalitätsbereich angehören. Wir betrachten dann die beiden rationalen Functionen

$$(1) \quad g_1 = \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}, \quad g_2 = \frac{\varphi_2(x)}{\psi(x)}.$$

Keine der beiden Gleichungen

$$(2) \quad \varphi_i(x) \psi(x') - \varphi_i(x') \psi(x) = 0 \quad (i=1, 2)$$

hat, so lange x' einen unbestimmten Parameter bedeutet, eine Doppelwurzel. Wäre nämlich x_0 eine solche, so müsste nicht nur

$$(3) \quad \varphi_i(x_0) \psi(x') - \varphi_i(x') \psi(x_0) = 0$$

sein, sondern es müsste auch noch

$$\frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)}{x - x_0} \psi(x') - \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} \varphi_i(x')$$

für $x = x_0$ verschwinden. Diese letzte Bedingung geht für

$$(4) \quad \varphi_i = a_i x^{p_i} + b_i x^{p_i-1} + \dots, \quad \psi = \alpha x^q + \beta x^{q-1} + \dots$$

in

$$\begin{aligned} & (a_i p_i x_0^{p_i-1} + b_i (p_i - 1) x_0^{p_i-2} + \dots) \psi(x') \\ & - (\alpha q x_0^{q-1} + \beta (q - 1) x_0^{q-2} + \dots) \varphi_i(x') = 0 \end{aligned}$$

über; und hieraus würde in Verbindung mit (3) folgen

$$\begin{aligned} & (a_i p_i x_0^{p_i-1} + b_i (p_i - 1) x_0^{p_i-2} + \dots) (\alpha x_0^q + \beta x_0^{q-1} + \dots) \\ & - (\alpha x_0^{q-1} + b_i x_0^{p_i-1} + \dots) (\alpha q x_0^{q-1} + \beta (q - 1) x_0^{q-2} + \dots) \\ & = \alpha a_i (p_i - q) x_0^{p_i+q-1} \\ & + [\alpha b_i (p_i - q - 1) + a_i \beta (p_i - q + 1)] x_0^{p_i+q-2} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Identisch kann diese Gleichung nicht erfüllt sein, da dies nur für

$$p_i = q; \quad a_i : b_i : \dots = \alpha : \beta : \dots$$

möglich wäre, was durch die Voraussetzungen ausgeschlossen ist; sie kann also nur für eine endliche Anzahl von Werthen für x_0 befriedigt werden, und daraus ergibt sich auch nur eine endliche Anzahl von Werthen für x' , welche (3) erfüllen:

Wir suchen nun für die beiden ganzen Functionen

$$(5) \quad \begin{aligned} f_1(x; x') &= \varphi_1(x) \psi(x') - \varphi_1(x') \psi(x), \\ f_2(x; x') &= \varphi_2(x) \psi(x') - \varphi_2(x') \psi(x) \end{aligned}$$

nach dem Euklid'schen Verfahren den grössten gemeinsamen Theiler in x . Hier bedeutet x' einen willkürlichen Werth. Wir bilden

$$(E_1) \quad \begin{aligned} f_1 &= f_2 Q_2 + f_3, \\ f_2 &= f_3 Q_3 + f_4, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{r-1} &= f_r Q_r \quad (f_{r+1}(x, x') \equiv 0). \end{aligned}$$

Die $f_1, f_2, \dots, f_r; Q_2, Q_3, \dots, Q_r$ sind dabei ganz in x und rational

in x' ; alle diese Functionen sollen bereits auf ihre kleinsten Nenner gebracht sein. So möge

$$f_r(x, x') = \frac{c_0(x') F_r(x, x')}{d(x')}$$

die Form von f_r werden, wobei die Coefficienten von $F_r(x, x')$ keinen gemeinsamen Theiler mehr besitzen. Dann ist

$$F_r(x, x') = c(x) x^n + c_1(x') x^{n-1} + c_2(x') x^{n-2} + \dots + c_n(x')$$

der grösste gemeinsame Theiler von f_1, f_2 nach der Variablen x , und also, wenn μ_i eine passend gewählte ganze positive Zahl bedeutet

$$c(x')^{\mu_i} f_i(x, x') = F_r(x, x') T_i(x, x') \quad (i = 1, 2).$$

Da jedoch F_r keinen, allen seinen Coefficienten gemeinsamen Theiler besitzt, so muss $c(x')^{\mu_i}$ in allen Coefficienten von T_i aufgehen; hebt man ihn fort, so ergibt sich

$$(6) \quad f_i(x, x') = F_r(x, x') U_i(x, x') \quad (i = 1, 2),$$

wobei U_i wie F_r in x und x' ganz ist.

$F_r(x, x') = 0$ kann keine Doppelwurzeln $x = x_0$ besitzen, da dies sonst bei den beiden Functionen (5) und folglich bei (3) eintreten würde. Wir wollen die Wurzeln von $F_r = 0$ mit

$$(7) \quad x = x', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$$

bezeichnen. Das Auftreten von $x = x'$ ist klar.

Vertauscht man nun in (6) x mit x' und berücksichtigt (5), so entsteht

$$f_i(x, x') = -F_r(x', x) U_i(x', x) \quad (i = 1, 2).$$

Hier haben $U_1(x', x)$, $U_2(x', x)$ keinen Theiler gemeinsam; denn sonst hätten auch $U_1(x, x')$, $U_2(x, x')$ einen solchen, und das widerspräche der Definition von $F_r(x, x')$. Folglich ist auch $F_r(x', x)$ grösster gemeinsamer Theiler von f_1, f_2 ; und da $F_r(x, x')$ keinen Factor hat, der nur von x' abhängt, so ist

$$F_r(x', x) = F_r(x, x') \cdot \text{const.}$$

Es steigt also auch $F_r(x', x)$ nach x' bis zum n^{ten} Grade auf, und folglich auch $F_r(x, x')$ nach x' bis zum gleichen Grade.

Bildet man nun

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{F_r(x, x')}{c(x')} &= x^n + \frac{c_1(x')}{c(x')} x^{n-1} + \frac{c_2(x')}{c(x')} x^{n-2} + \dots \\ &= (x - x') (x - x'_1) (x - x'_2) \dots (x - x'_{n-1}), \end{aligned}$$

so bleibt jeder Coefficient als symmetrische Function der Wurzeln bei jeder Vertauschung derselben untereinander ungeändert; d. h. es ist

$$(8a) \quad \frac{c_\kappa(x')}{c(x')} = \frac{c_\kappa(x'_1)}{c(x'_1)} = \dots = \frac{c_\kappa(x'_{n-1})}{c(x'_{n-1})} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n),$$

so dass die Gleichungen

$$(9) \quad c_{\kappa}(x) c(x') - c_{\kappa}(x') c(x) = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n)$$

die Grössen (7) als Wurzeln besitzen. Da aber, wie wir bewiesen haben, $c(x)$ und alle $c_{\kappa}(x)$ höchstens bis zum n^{ten} Grade aufsteigen, so ist eine jede der Gleichungen (9) entweder identisch erfüllt, oder die Grössen (7) liefern ihre sämtlichen Wurzeln. Die erste Eventualität kann nicht für sämtliche κ eintreten, da sonst alle $c_{\kappa}(x)$ gleich $c(x)$ wären und also $F_r(x, x')$ einen von x unabhängigen Theiler hätte. Da nun (9) mit $F_r(x, x') = 0$ alle Wurzeln gemeinsam hat, so können sich beide Polynome höchstens durch einen von x' allein abhängigen Factor unterscheiden; bei passend gewähltem κ ist sonach

$$A(x') F_r(x, x') = c_{\kappa}(x) c(x') - c_{\kappa}(x') c(x).$$

Wandelt man hierin x in x' um und x' in x , so würde folgen, dass die rechte Seite von höherem als dem n^{ten} Grade in x ist, falls der Grad von A grösser ist als Null. Folglich hat man bis auf einen constanten Factor, den wir unterdrücken können,

$$(10) \quad F_r(x, x') = c_{\lambda}(x) c(x') - c_{\lambda}(x') c(x),$$

wobei λ einer der Indices ist, für welche die rechte Seite nicht identisch verschwindet. Bezeichnen wir

$$\frac{c_{\lambda}(x')}{c(x')} = \lambda',$$

so folgt aus dem Vergleiche von (8) mit (10), dass sich jeder Coefficient aus (8) als lineare ganze Function von λ' ausdrücken lässt,

$$(11) \quad \frac{c_{\kappa}(x')}{c(x')} = d_{\kappa} \cdot \lambda' + e_{\kappa},$$

wobei die d_{κ} , e_{κ} weder x noch x' enthalten.

Jetzt bestimmen wir für ein willkürliches x' die beiden Grössen g_1' , g_2' durch die Gleichungen

$$\frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')} = g_1', \quad \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')} = g_2';$$

dann folgt aus dem Umstande, dass die Grössen (7) zu den Wurzeln von (2) gehören

$$g_1' = \frac{1}{n} \left[\frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')} + \frac{\varphi_1(x_1')}{\psi(x_1')} + \dots + \frac{\varphi_1(x_{n-1}')}{\psi(x_{n-1}')} \right],$$

$$g_2' = \frac{1}{n} \left[\frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')} + \frac{\varphi_2(x_1')}{\psi(x_1')} + \dots + \frac{\varphi_2(x_{n-1}')}{\psi(x_{n-1}')} \right],$$

und daraus, dass g_1' , g_2' als symmetrische Functionen der Wurzeln von $F_r(x, x') = 0$ durch die Coefficienten von (8) und folglich wegen (11) durch λ' rational ausdrückbar sind, d. h. es ergibt sich

$$(12) \quad g_1 = R_1(\lambda), \quad g_2 = R_2(\lambda).$$

Die Unterdrückung der Accente soll andeuten, dass man von dem x' zu der Bezeichnung x übergegangen ist.

An den Euklid'schen Algorithmus knüpfen wir noch die folgende Bemerkung: $f_{r+1}(x, x')$ verschwindet für jeden Werth von x' . Es kann nun vorkommen, dass schon ein früheres $f_\alpha(x, x')$ für gewisse Werthe $x' = x'_0$ verschwindet, und zwar tritt dies stets dann und nur dann ein, wenn die sämtlichen Coefficienten des f_α einen und denselben Factor $h_\alpha(x')$ besitzen, der durch $x' = x'_0$ zum Verschwinden gebracht wird. x'_0 gehört dann zu den singulären Werthen von x' , für welche die Gleichungen

$$f_1(x; x'_0) = 0, \quad f_2(x; x'_0) = 0$$

mehr als n gemeinsame Wurzeln besitzen.

Wir wenden jetzt das Euklid'sche Verfahren auf die beiden Ausdrücke

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi_1(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \varphi_1(x) - \gamma_1 \psi(x), \\ \varphi_2(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \varphi_2(x) - \gamma_2 \psi(x) \end{aligned}$$

an, in denen x als Variable, γ_1, γ_2 als Parameter betrachtet werden sollen. Hierbei möge dann entstehen

$$(E_2) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 K_2 + \varphi_3, \\ \varphi_2 &= \varphi_3 K_3 + \varphi_4, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{r-1} &= \varphi_r K_r + \varphi_{r+1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

alle φ und alle K sollen dabei ganz in x und rational in γ_1, γ_2 sein, und zwar derart, dass jede einzelne Function auf ihren kleinsten Nenner gebracht ist.

Wir vergleichen nun die beiden ersten Gleichungen der beiden Schemata (E_1) und (E_2)

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 Q_2 + f_3 \\ \varphi_1 &= \varphi_2 K_2 + \varphi_3. \end{aligned}$$

und

Setzen wir in die letzte

$$(14) \quad \gamma_1 = \frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')}, \quad \gamma_2 = \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}$$

ein, so wird

$$\begin{aligned} \varphi_1(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \frac{f_1(x, x')}{\psi(x')}, \\ \varphi_2(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \frac{f_2(x, x')}{\psi(x')} \end{aligned}$$

und also

$$f_1 = f_2 \cdot K_2(x; \gamma_1, \gamma_2) + \psi(x') \varphi_3(x; \gamma_1, \gamma_2),$$

$$f_2 \cdot \{Q_2(x, x') - K_2(x; \gamma_1, \gamma_2)\} + \{f_3(x, x') - \psi(x') \varphi_3(x; \gamma_1, \gamma_2)\} = 0.$$

Der Grad von f_2 nach x ist höher als der von f_3 und der von φ_3 ; darum muss jede der beiden Klammern verschwinden:

$$Q_2(x, x') = K_2(x; \gamma_1, \gamma_2),$$

$$f_3(x, x') = \psi(x') \varphi_3(x; \gamma_1, \gamma_2);$$

d. h. wenn man in den Functionen

$$K_2(x; \gamma_1, \gamma_2), \quad \varphi_3(x; \gamma_1, \gamma_2)$$

die Substitution (14) macht, gehen sie in die Functionen

$$Q_2(x, x'), \quad \frac{f_3(x, x')}{\psi(x')}$$

über. Mit Hülfe dieses Resultates folgt aus

$$f_2 = f_3 Q_3 + f_4, \quad \varphi_2 = \varphi_3 K_3 + \varphi_4$$

das Entsprechende für

$$K_3, \varphi_4 \quad \text{und} \quad Q_3, \frac{f_4(x, x')}{\psi(x')}$$

u. s. f. und man erhält allgemein: die Functionen

$$K_\alpha(x; \gamma_1, \gamma_2), \quad \varphi_{\alpha+1}(x; \gamma_1, \gamma_2) \quad (\alpha=2, 3, 4, \dots)$$

gehen durch die Substitutionen (14) in die Functionen

$$Q_\alpha(x, x'), \quad \frac{f^{\alpha+1}(x, x')}{\psi(x')}$$

über. Insbesondere wird

$$(15) \quad \varphi_{r+1}\left(x; \frac{\varphi_1(x')}{\varphi(x)}, \frac{\varphi_2(x')}{\varphi(x)}\right) = \frac{f_{r+1}(x, x')}{\psi(x')} = 0,$$

werden. Aus diesem letzten Umstande folgt, dass in

$\varphi_{r+1}(x; \gamma_1, \gamma_2) = \{t_0(\gamma_1, \gamma_2)x^r + t_1(\gamma_1, \gamma_2)x^{r-1} + \dots\}; T(\gamma_1, \gamma_2)$
alle Coefficienten t_0, t_1, \dots einen gemeinsamen Theiler besitzen, der durch (14) identisch zu Null gemacht wird. Denn hätten sie keinen gemeinsamen Theiler, dann könnte man ganze Functionen

$$\tau_0(\gamma_1, \gamma_2), \tau_1(\gamma_1, \gamma_2), \dots$$

so bestimmen, dass

$$t_0(\gamma_1, \gamma_2) \tau_0(\gamma_1, \gamma_2) + t_1(\gamma_1, \gamma_2) \tau_1(\gamma_1, \gamma_2) + \dots = u(\gamma_2)$$

eine ganze, nicht verschwindende Function von γ_2 allein würde. Dann würde also auch

$$u\left(\frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}\right) \equiv 0$$

sein, was nicht möglich ist, da das Argument unendlich viele Werthe annehmen kann. Den Factor, dessen Existenz hierdurch nachgewiesen

ist, der also für (14) identisch verschwindet, wollen wir mit $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ bezeichnen und

$$(16) \quad \varphi_{r+1}(x; \gamma_1, \gamma_2) = \Phi(\gamma_1, \gamma_2) \widetilde{\varphi}_{r+1}(x; \gamma_1, \gamma_2)$$

setzen. Jeder irreducible Theiler von Φ gehört dann sicher der Eliminationsresultante von x für die Functionen (13) an.

Wäre umgekehrt $h(\gamma_1, \gamma_2)$ ein Factor der Resultante, und unterwerfen wir die Grössen γ_1', γ_2' lediglich der Bedingung $h(\gamma_1', \gamma_2') = 0$, dann besitzen

$$\varphi_1(x) - \gamma_1' \psi(x) = 0, \quad \varphi_2(x) - \gamma_2' \psi(x) = 0$$

mindestens eine gemeinsame Wurzel ξ , und somit haben

$$\varphi_1(x) \psi(\xi) - \varphi_1(\xi) \psi(x) = f_1(x, \xi),$$

$$\varphi_2(x) \psi(\xi) - \varphi_2(\xi) \psi(x) = f_2(x, \xi)$$

einen gemeinsamen Theiler. Setzt man daher ξ statt x' in (E_1) ein, dann wird ein $f_\alpha(x, \xi)$ verschwinden. Für $\alpha \leq r$ würde dies aber, wie wir gesehen haben, nur für eine endliche Anzahl von Werthen ξ möglich sein. Hier haben wir nun eine unendliche Zahl von γ_1', γ_2' und damit unendlich viele ξ ; folglich kann nur $\alpha = r + 1$ sein, d. h. alle die unendlich vielen Lösungen von $h(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ befriedigen auch

$$\varphi_{r+1}(x; \gamma_1, \gamma_2) = 0,$$

d. h. nach (16) ist $h(\gamma_1, \gamma_2)$ ein Factor von $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$. Es stimmen also die Primfactoren von $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ mit denen der Resultante von (13) überein.

Gleichwohl braucht Φ nicht die Eliminationsresultante von (13) zu sein. So liefert das Lüroth'sche Beispiel

$$g_1 = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 + 3x^2 + 1},$$

$$g_2 = \frac{x(x^2 + 1)}{x^4 + 3x^2 + 1}$$

als Resultante für (13) den Werth

$$(\gamma_1^2 + \gamma_1 - \gamma_2^2)^2,$$

während die Function $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ gleich

$$(\gamma_1^2 + \gamma_1 - \gamma_2^2)^1$$

wird.

In (12) haben wir bewiesen, dass g_1 und g_2 rationale Functionen von λ sind. Aus dem obigen Resultate, dass $\varphi_r(x; \gamma_1, \gamma_2)$ durch (14) in $f_r(x, x') : \psi(x')$ übergeht, können wir umgekehrt den Schluss ziehen, dass λ eine rationale Function von g_1 und g_2 sei. In der That folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi_r \left(x; \frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')}, \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')} \right) &= \frac{f_r(x, x')}{\psi(x')} = \frac{c_0(x') F_r(x, x')}{d(x')} \\ &= \frac{c_0(x')}{d(x')} \{ c(x') x^n + c_1(x') x^{n-1} + \dots + c_n(x') \} \end{aligned}$$

durch Vergleichung der Coefficienten, dass jeder

$$\frac{c_0(x')}{d(x')} c(x'), \frac{c_0(x')}{d(x')} c_1(x'), \dots \frac{c_0(x')}{d(x')} c_n(x')$$

eine rationale Function der beiden Grössen

$$\frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')} = g_1(x'), \quad \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')} = g_2(x')$$

wird. Dasselbe findet daher auch für den Quotienten

$$\frac{c_0(x')}{d(x')} c_2(x') : \frac{c_0(x')}{d(x')} c(x') = \lambda'$$

statt, d. h. wir haben

$$(16) \quad \begin{aligned} \lambda' &= R(g_1(x'), g_2(x')), \\ \lambda &= R(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen. *Man kann also, wenn zwei beliebige Functionen*

$$g_1 = \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}, \quad g_2 = \frac{\varphi_2(x)}{\psi(x)}$$

gegeben sind, eine rational aus g_1, g_2 gebildete Grösse

$$\lambda = R(g_1, g_2)$$

finden, durch welche umgekehrt g_1 und g_2 vermittels

$$g_1 = R_1(\lambda), \quad g_2 = R_2(\lambda)$$

rational ausgedrückt werden können.

Wir wollen nun annehmen, dass in den Coefficienten von $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ in (1) noch beliebig viele Parameter y, z, \dots vorkommen. Dagegen soll die Eliminationsresultante von x aus den beiden Gleichungen (1) nur von g_1, g_2 , jedoch nicht von y, z, \dots abhängig sein, oder mit anderen Worten, g_1 und g_2 sollen einer rationalen Gleichung genügen, deren Coefficienten von x, y, z, \dots unabhängig sind.

Es sei also

$$(17) \quad g_1 = \frac{\varphi_1(x, y, \dots)}{\psi(x, y, \dots)}, \quad g_2 = \frac{\varphi_2(x, y, \dots)}{\psi(x, y, \dots)}$$

und $\Phi(g_1, g_2)$ die Eliminationsresultante nach x , welche von y, \dots frei ist. Unter a, b, \dots verstehen wir jetzt willkürliche Constanten, setzen

$$g_1 = \frac{\varphi_1(\xi, a, \dots)}{\psi(\xi, a, \dots)}, \quad g_2 = \frac{\varphi_2(\xi, a, \dots)}{\psi(\xi, a, \dots)}$$

und fragen nach den Werthepaaren g_1 und g_2 , für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, a, \dots) - g_1 \psi(\xi, a, \dots) &= 0, \\ \varphi_2(\xi, a, \dots) - g_2 \psi(\xi, a, \dots) &= 0 \end{aligned}$$

eine gemeinsame Wurzel ξ besitzen. Die Elimination von ξ liefert $\Psi(g_1, g_2)$, und da $g_1 = g_1, g_2 = g_2$ die Function Ψ zum Verschwinden bringt, so giebt es für $g_1 = g_1, g_2 = g_2$ eine gemeinsame Wurzel ξ . Man kann deshalb

$$\frac{\varphi_1(x, y, \dots)}{\psi(x, y, \dots)} = \frac{\varphi_1(\xi, \alpha, \dots)}{\psi(\xi, \alpha, \dots)}, \quad \frac{\varphi_2(x, y, \dots)}{\psi(x, y, \dots)} = \frac{\varphi_2(\xi, \alpha, \dots)}{\psi(\xi, \alpha, \dots)}$$

setzen und kommt dadurch auf die Voraussetzungen des Lüroth'schen Satzes zurück.

Wenn also die Functionen

$$g_1 = \frac{\varphi_1(x, y, z, \dots)}{\psi(x, y, z, \dots)}, \quad g_2 = \frac{\varphi_2(x, y, z, \dots)}{\psi(x, y, z, \dots)}$$

einer von x, y, z, \dots unabhängigen Gleichung

$$\Phi(g_1, g_2) = 0$$

genügen, dann kann man eine rational aus g_1, g_2 gebildete Grösse

$$\lambda = R(g_1, g_2)$$

finden, durch welche umgekehrt g_1 und g_2 vermittels

$$g_1 = R_1(\lambda), \quad g_2 = R_2(\lambda)$$

rational ausgedrückt werden können.

Giessen, den 9. Februar 1895.