

REMARQUES SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MÉTHODES DE M. BOREL.

Par G. Valiron (Lyon).

Adunanza del 25 marzo 1917.

Dans un mémoire récemment publié dans les *Rendiconti* ¹⁾ MM. HARDY et LITTLEWOOD ont démontré des propositions intéressantes concernant la sommation des séries par la méthode de sommation exponentielle de M. BOREL, propositions qui généralisent celles énoncées par les mêmes auteurs dans un mémoire des *Proceedings of the London Mathematical Society* ²⁾. MM. HARDY et LITTLEWOOD établissent notamment le théorème suivant :

lorsque dans une série divergente le produit du terme général par la racine carrée de son rang reste fini, la série n'est pas sommable par les moyennes exponentielles.

Cette proposition se rattache à une propriété connue des fonctions entières d'une variable réelle, à coefficients positifs très réguliers, qui fut tout d'abord utilisée par M. BOREL dans le cas particulier de la fonction exponentielle : pour de telles fonctions le rapport de la somme d'un groupe de termes entourant le terme maximum à la valeur de la fonction tend vers *un* lorsque la variable croît indéfiniment ³⁾. La propriété précédente doit donc se généraliser, en modifiant convenablement l'hypothèse, au cas où l'on prend pour fonction sommatrice une fonction entière à coefficients très réguliers et, en particulier, lorsqu'on utilise les fonctions de MM. MITTAG-LEFFLER et LINDELOF. C'est ce que je me propose de montrer dans ce qui suit; je remplacerai d'ailleurs l'hypothèse faite sur le terme général par une autre, plus large, sur la somme de p termes consécutifs, p croissant indéfiniment en même temps que le rang de ces termes ⁴⁾.

¹⁾ G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Theorems concerning the Summability of Series by BOREL's exponential Method* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 36-53].

²⁾ G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *The Relations between BOREL's and CESÀRO's Methods of Summation* [Proceedings of the London Mathematical Society, series II, vol. XI (1912-1913), pp. 1-16].

Voir également le mémoire des mêmes auteurs: *Contributions to the Arithmetic Theory of Series* (ibidem, pp. 411-478).

³⁾ Voir É. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1901), p. 141 et suivantes.

⁴⁾ Une généralisation du même genre a été faite par M. E. LANDAU dans le cas du théorème

Je désignerai par c_n le coefficient de x^n dans le développement de TAYLOR de la fonction sommatrice $F(x)$, et montrerai d'abord (§ I) que des hypothèses assez simples sur la croissance de la dérivée seconde du logarithme de c_n , prise par rapport à n , entraînent déjà pour la sommabilité des conséquences très voisines de la proposition énoncée ci-dessus. Je montrerai ensuite (§ II) que, lorsque la somme s_n des n premiers termes de la série croît assez lentement, on peut mettre en évidence le terme maximum de la fonction entière, ce qui conduit à considérer une expression de la forme

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{q^2}{2}H(x)} s_{q+x}$$

dans laquelle $-H(n)$ est la dérivée seconde du logarithme de c_n par rapport à n . Cette nouvelle forme permet de resserrer les limites d'application du théorème de M. M. HARDY et LITTLEWOOD. En remplaçant enfin la somme précédente par une intégrale on arrivera à la démonstration du théorème définitif (§ III).

Le procédé de sommation introduit ci-dessus est la généralisation du procédé (E, a) de M. M. HARDY et LITTLEWOOD, je l'appellerai procédé (H) ; il sera légitime de l'employer lorsque le produit $H(x)x^2$ croît indéfiniment avec x [$H(x)$ tendant vers zéro], mais dans ces conditions il ne sera pas toujours possible d'établir l'équivalence avec la sommation par une fonction entière, ce sera le cas pour $H(x) = x^\alpha$, α étant compris entre -1 et -2 . On est alors conduit à la sommation (H) par la recherche de la limite, lorsque x tend vers un , d'une expression de la forme

$$\frac{\sum c_n^1 x^n s_n}{\sum c_n^1 x^n}$$

dans laquelle le dénominateur a pour rayon de convergence l'unité et des coefficients positifs satisfaisant à certaines conditions de régularité. Je montrerai (§ IV) que ce nouveau procédé de sommation est applicable à l'étude d'une série entière aux points réguliers du cercle de convergence.

Tous les procédés de sommation que je considérerai sont d'ailleurs basés sur la méthode générale des moyennes introduite par M. BOREL ⁵⁾ ce qui justifie le titre donné à cette note.

§ I.

1. Je supposerai d'abord que la fonction sommatrice $F(x)$ est de la forme suivante

$$F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n = \sum_0^\infty (1 + \alpha_n) e^{-G(n)} x^n,$$

de TAUBER: *Über einen Satz des Herrn LITTLEWOOD* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXV (1^o semestre 1913). pp. 265-276].

⁵⁾ Voir les *Leçons sur les séries divergentes*, l. c. 3), p. 92.

le produit nx_n étant borné en module et $G(x)$ étant une fonction jouissant des propriétés suivantes :

$$(A) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 G''(x)}{\log x} = \infty,$$

$$(B) \quad |G''(x_1) - G''(x)| < \varepsilon(x) G''(x)^6, \quad |x_1 - x| < [G''(x)(\log x)^{-1}]^{-\frac{1}{2} + \beta} \quad \beta > 0.$$

Le rôle de ces deux conditions apparaîtra dans la démonstration de la proposition fondamentale suivante.

THEOREME I. — Si l'on désigne par $\xi(x)$ ou plus simplement par ξ le rang du terme maximum de la fonction entière $F(x)$ et par s_n une fonction de l'entier n dont le module reste inférieur à n^p (pour n supérieur à un nombre fixe A_0), on a l'égalité

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{F(x)} \left[\sum_0^{\infty} c_n s_n x^n - \sum_{N_1}^{N_2} c_n s_n x^n \right] = 0,$$

dans laquelle N_1 et N_2 désignent deux entiers définis par l'égalité

$$(2) \quad N_2 - \xi = \xi - N_1 = A(p) \sqrt[p]{\log \xi [G''(\xi)]^{-1}}.$$

D'après l'hypothèse faite sur s_n tout revient à démontrer la proposition pour $s_n = n^p$ et par suite à établir que les expressions

$$(3) \quad \frac{1}{F(x)} \sum_{N_2}^{\infty} c_n n^p x^n, \quad \frac{1}{F(x)} \sum_0^{N_1} n^p c_n x^n$$

ont pour limite zéro lorsque x croît indéfiniment. Je ferai la démonstration pour la première, la méthode étant la même pour la seconde. Je supposerai actuellement que dans la première expression (3) N_2 est un nombre quelconque supérieur à ξ , et je chercherai à le déterminer pour que l'expression tende vers zéro. Le nombre ξ est la partie entière, ou la partie entière augmentée d'une unité, de la racine de l'équation

$$(4) \quad G'(y) = \log x,$$

racine qui est unique dès que x est supérieur à un nombre x_0 facile à déterminer, puisque, d'après la condition (A), $G'(x)$ est croissante à partir d'une certaine valeur de x .

Posons

$$R(n, x) = \sum_n^{\infty} c_n n^p x^n$$

et comparons les termes de même rang dans $R(N_2, x)$ et $R(n_0, x)$, n_0 étant compris entre ξ et N_2 , on a

$$\rho_2 = \frac{c_{N_2+q} (N_2 + q)^p x^{N_2+q}}{c_{n_0+q} (n_0 + q)^p x^{n_0+q}} = \left(1 + \frac{\lambda(x)}{n_0} \right) \left(1 + \frac{N_2 - n_0}{n_0 + q} \right)^p x^{N_2 - n_0} e^{-G(N_2+q) + G(n_0+q)}$$

6) Dans tout ce qui suit je désignerai par $\varepsilon(x)$ toute fonction tendant vers zéro, et par $\lambda(x)$ toute fonction restant bornée lorsque x croît indéfiniment.

En appliquant à la fonction $G(x)$ la formule des accroissements finis, en s'appuyant sur la croissance de $G'(x)$, et en remplaçant $\log x$ par $G'(\xi + 1)$ qui lui est supérieur d'après la définition de ξ [égalité (4)], on voit que l'on a

$$\log \rho_q < (p + 1) \log \left(1 + \frac{N_2 - n_0}{\xi} \right) + (N_2 - n_0)[G'(\xi + 1) - G'(n_0)], \quad x > x_0,$$

ou finalement

$$\log \rho_q < (p + 1) \log \left(1 + \frac{N_2 - n_0}{\xi} \right) - (N_2 - n_0)(n_0 - \xi - 1)G''(\xi_1) \quad \left| \begin{array}{l} \xi_1 = \xi + \theta(n_0 - \xi - 1), \\ |\theta| < 1. \end{array} \right.$$

$G''(x)$ varie lentement d'après la condition (B), on est donc conduit à prendre pour n_0 une valeur différant de moins d'une unité de la moyenne de ξ et N_2 ; $R(N_2, x)$ sera alors inférieur au produit de $R(n_0, x)$ par le nombre $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = \left(1 + \frac{N_2 - \xi}{2\xi} \right)^{p+1} e^{-\frac{(N_2 - \xi - 1)^2}{4} G''(\xi_1)}.$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$R(N_2, x) < \frac{\gamma(x)}{1 - \gamma(x)} \sum_{\xi}^{N_2} n^p c_n x^n < \frac{\gamma(x) N_2^p}{1 - \gamma(x)} F(x)$$

et l'on peut évidemment choisir N_2 pour que le coefficient de $F(x)$ tende vers zéro, il suffit que le produit $\gamma(x) N_2^p$ tende lui-même vers zéro ce qui aura lieu si l'on prend

$$(N_2 - \xi - 1)^2 = (4p + 1) \frac{\log \xi}{G''(\xi)}, \quad x > A_1,$$

puisque la condition (B) permet alors de remplacer ξ_1 par ξ dans l'expression de $\gamma(x)$.

Le théorème I est donc démontré et l'on voit que $A(p)$ est inférieur à $4p + 1$ lorsque $\log \xi G''(\xi)$ croît indéfiniment.

Dans le cas où les nombres s_n sont bornés le raisonnement fait ci-dessus montre que l'égalité (1) est encore valable en prenant

$$N_2 - \xi = \xi - N_1 = \frac{1}{\varepsilon(\xi) \sqrt{G''(\xi)}},$$

et il est facile de se convaincre que cet intervalle ne peut être restreint.

2. Les conditions (A), (B) s'introduisent naturellement dans la démonstration du théorème précédent, ce sont des conditions de régularité n'apportant aucune restriction à la croissance de la fonction entière $F(x)$. En effet, la fonction $F(x)$ étant entière, le quotient de $G(x)$ par x a pour limite l'infini lorsque x croît indéfiniment, et par suite $G'(x)$ n'est pas borné supérieurement, supposer que ce nombre croît n'est donc qu'imposer une première condition de régularité; d'autre part, quel que soit α , le produit $x^{1+\alpha} G''$ n'est pas borné, ce qui achève de montrer que la condition (A) ne limite pas la croissance. Pour la condition (B) le même fait résulte de la remarque faite ci-dessus lorsque $G''(x)$ tend vers zéro; il est évident lorsque $G''(x)$ a une limite

ou bien croît indéfiniment en restant inférieur à $\log x$, enfin si le quotient de $G''(x)$ par $\log x$ reste supérieur à un nombre fixe la différence $N_2 - N_1$ restera finie sans que $G''(x)$ soit astreint à aucune autre condition. Les fonctions correspondant à ce dernier cas sont d'ordre nul, à croissance très lente, elles ne nous intéresseront pas dans la suite.

3. Considérons une série et désignons par s_n la somme de ses n premiers termes, nous dirons que la série est sommable B , de somme s , par la fonction entière $F(x)$ satisfaisant aux conditions (A), (B), si l'on a

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{F(x)} \sum_0^{\infty} \epsilon_n s_n x^n = s.$$

Une série convergente ayant pour somme s est sommable B avec la même somme. Certaines séries divergentes peuvent être sommables, par exemple la progression géométrique dont le terme général est ζ^n est sommable par les fonctions $F(x)$ vérifiant la condition

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(\zeta x)}{F(x)} = 0.$$

La région du plan des ζ pour laquelle cette égalité est vérifiée est d'un seul tenant, et permet de définir pour toute fonction de ζ une étoile de sommabilité ne dépendant que de la position des points singuliers. Pour que la sommation B permette le prolongement analytique dans une région ne dépendant que de la position des points singuliers, il est donc nécessaire que la condition (6) soit vérifiée pour des valeurs de ζ de module supérieur à un , ce qui exige que la fonction $F(x)$ soit d'ordre positif. Les fonctions d'ordre nul pourront cependant permettre la sommation de certaines séries divergentes, c'est ainsi que la progression géométrique sera sommable pour les valeurs de ζ de module égal à un lorsque la condition (6) sera vérifiée pour ces valeurs; il sera toutefois nécessaire que le quotient de $\log F(x)$ par le carré de $\log x$ ait une limite supérieure infinie lorsque x croît indéfiniment ⁷⁾. Nous supposerons dorénavant que cette condition est réalisée.

4. La propriété de la sommation B mise en évidence par MM. LITTLEWOOD et HARDY apparaît immédiatement, sous une forme encore imprécise, comme conséquence du théorème I. On obtient en effet le théorème suivant, valable pour toute fonction $F(x)$ satisfaisant aux conditions (A), (B):

THEOREME II. Désignons par $\sigma(n)$ le maximum du module de la différence $s_{n+p} - s_n$ lorsque la valeur absolue de p varie de 0 à

$$(\log n)^{\frac{1}{2}} [G''(n)]^{-\frac{1}{2}}$$

et supposons que $\sigma(n)$ ait pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. Dans ces conditions la série ne peut être sommable B par la fonction $F(x)$ sans être convergente.

⁷⁾ Voir G. VALIRON, *Thèse*, en particulier page 34.

Car s_n étant inférieur à n le théorème I est applicable, et comme l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{F(x)} \sum_{N_1}^{N_2} c_n s_n x^n - \frac{s_x}{F(x)} \sum_{N_1}^{N_2} c_n x^n \right] = 0$$

on voit que si la série est sommable B , de somme s , s_x a pour limite s ce qui démontre la proposition.

En prenant pour fonction $F(x)$ les fonctions $E(x, x)$ de M. MITTAG-LEFFLER, qui pour $x = 1$ donnent la fonction exponentielle, on a

$$E(x, x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad G(x) = \left(x\alpha + \frac{1}{2} \right) \log(x\alpha) - \alpha x,$$

la limite de variation de p est donc la même, à un facteur constant près, pour toutes ces fonctions et est égale à $k n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{-\frac{1}{2}}$.

Le résultat est le même pour les fonctions $E_{\sigma}(x)$ de M. LINDELOF, pour lesquelles on trouve

$$E_{\sigma}(x) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{n^{\sigma}} \right)^n, \quad G(x) = x\sigma \log x.$$

Pour les fonctions d'ordre infini $G''(x)$ décroît moins vite, et par suite le théorème II sera moins restrictif; ainsi pour la fonction $L_{\beta}(x)$ de M. LINDELOF on aura

$$L_{\beta}(x) = \sum_0^{\infty} \left[\frac{x}{\log(n + \beta)} \right]^n, \quad G(x) = x \log_2(x + \beta),$$

l'intervalle de variation de p sera ici égal à $k\sqrt{n}$.

§ 2.

5. Le théorème I qui restreint le nombre des termes déterminant la valeur de la fonction $F(x)$ conduit naturellement à mettre en évidence le terme maximum. Pour obtenir un résultat simple nous devons faire des hypothèses plus restrictives sur la croissance de la fonction $G''(x)$. Nous supposons que les conditions (A), (B) sont remplacées par les suivantes:

$$(A') \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 G''(x)}{(\log x)^3} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G''(x) \cdot \log x = 0;$$

$$(B') \quad \left| \frac{G''(x_1)}{G''(x)} - 1 \right| < B \left| \frac{x_1 - x}{x} \right|, \quad |x_1 - x| < \left[\frac{G''(x)}{\log x} \right]^{-\frac{1}{2} + \rho}, \quad B > 0, \quad \rho > 0.$$

Nous pourrions alors démontrer la proposition suivante:

THEOREME III. — La fonction $G''(x)$ vérifiant les conditions (A'), (B'), et la suite des nombres s_n satisfaisant à la condition

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_n| [1 + n G''(n)]}{n \sqrt{G''(n)}} = 0,$$

on a l'égalité

$$(7) \quad \frac{1}{F(x)} \sum_0^\infty c_n s_n x^n \sim \sqrt{\frac{G''(\xi)}{2\pi}} \sum_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)} s_n \quad 8).$$

Tout d'abord le théorème I étant applicable en vertu de la condition imposée à s_n et de la condition (A'), on peut remplacer dans le premier membre de l'égalité (7) les limites 0, ∞ par N_1 et N_2 . Désignons alors par $T(x)$ la valeur du terme maximum de $F(x)$, on aura

$$\begin{aligned} \log c_n x^n &= \log T(x) + (n - \xi) \log x + G(\xi) - G(n) + \frac{\lambda(\xi)}{\xi} \\ &= \log T(x) + (n - \xi) [\log x - G'(\xi)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (n - \xi)^2 G''(\xi + \theta(n - \xi)) + \frac{\lambda(x)}{\xi}, \quad |\theta| < 1. \end{aligned}$$

L'équation (4) montre que $\log x$ est égal à $G'(\xi + \theta')$, θ' étant inférieur à un en valeur absolue, par suite, en utilisant la condition (B'), on aura pour les valeurs de n comprises entre N_1 et N_2

$$\begin{aligned} \log c_n x^n &= \log T(x) - \frac{1}{2} (n - \xi)^2 G''(\xi) \\ &\quad + \lambda(x)(n - \xi) G''(\xi) + \lambda(x) \frac{1}{\xi} (n - \xi)^3 G''(\xi) + \lambda(x) \frac{1}{\xi}. \end{aligned}$$

On voit aisément, en utilisant de nouveau les conditions (A'), (B') et en tenant compte des valeurs de N_1 et N_2 , que les trois facteurs de $\lambda(x)$ tendent vers zéro lorsque x croît indéfiniment, on pourra donc écrire 9)

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} c_n x^n &= T(x) e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)} (1 + \alpha(n, \xi)) \\ \alpha(n, \xi) &= \lambda(x) \left[\frac{1}{\xi} + (n - \xi) G''(\xi) + \frac{1}{\xi} (n - \xi)^3 G''(\xi) \right], \end{aligned} \right.$$

ce qui conduira à l'égalité

$$(9) \quad \frac{1}{F(x)} \sum_0^\infty c_n s_n x^n \sim \frac{T(x)}{F(x)} \left[\sum_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)} s_n + \lambda(x) S(x) \{A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)\} \right],$$

dans laquelle $S(x)$ désigne le maximum de s_n dans l'intervalle N_1, N_2 et où l'on a

$$\left. \begin{aligned} A_1(x) &= \frac{1}{\xi} \sum_{N_1}^{N_2} u_n(\xi) \\ A_2(x) &= G''(\xi) \sum_{N_1}^{N_2} u_n(\xi) (n - \xi) \\ A_3(x) &= \frac{1}{\xi} G''(\xi) \sum_{N_1}^{N_2} u_n(\xi) (n - \xi)^3 \end{aligned} \right\} u_n(\xi) = e^{-\frac{(n-\xi)^2}{2} G''(\xi)}$$

8) Le signe \sim indiquera dans tout ce qui suit que le rapport des deux membres a pour limite un ou qu'ils tendent simultanément vers zéro.

9) C'est dans les mêmes conditions que l'on pourra écrire l'égalité (2. 125) du mémoire de M. M. LITTLEWOOD et HARDY, la démonstration du lemme 2. 12 devra être modifiée en conséquence.

On obtiendra des limites supérieures des sommes précédentes en remplaçant les limites N_1 et N_2 par 0 et ∞ ; or le nombre q étant entier et a positif on voit par un calcul bien simple que l'on a, quel que soit N ,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{n=N} e^{-an^2} n^q &< \lambda(N) + \int_0^\infty e^{-a^2x} x^q dx \\ &= \lambda(N) + B_q a^{-\frac{q+1}{2}} \begin{cases} B_q = q(q-2) \dots 2 \times 2^{-\frac{q+1}{2}} \sqrt{\pi}, & q = 2q', \\ B_q = q(q-2) \dots 3.1 \times 2^{-\frac{q+1}{2}}, & q = 2q' + 1. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

En utilisant cette inégalité et l'hypothèse faite sur s_n qui, eu égard à la condition (B'), entraîne pour $S(x)$ l'égalité (a) où n est remplacé par x , on aura

$$(11) \quad S(x) [A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)] = \varepsilon(x) [G''(x)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Il reste à calculer la valeur de $T(x)$, il suffit pour cela d'appliquer l'égalité (9) au cas où s_n est égal à un, on obtient ainsi l'égalité asymptotique

$$F(x) \sim T(x) \sum_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)}$$

dans laquelle on peut remplacer les limites N_1 et N_2 par $\pm \infty$, car on a pour cette somme un théorème analogue au théorème I. En remplaçant la somme ainsi obtenue par une intégrale dont la valeur est donnée par l'égalité (10) on trouve que le quotient de $F(x)$ par $T(x)$ est asymptotiquement égal à $\sqrt{\frac{2\pi}{G''(\xi)}}$. En portant la valeur ainsi trouvée pour $T(x)$ dans l'égalité (9) et en utilisant l'égalité (11) on obtiendra l'égalité (7). Le théorème III est donc démontré.

6. Le théorème III est un théorème d'équivalence; il établit en effet que s_n satisfaisant à la condition (a) le procédé de sommation B est équivalent à celui qui consisterait à chercher la limite de l'expression

$$(12) \quad \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{N_1'}^{N_2'} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q}, \quad N_2' = -N_1' = A \sqrt{\frac{\log x}{H(x)}},$$

lorsque x croît indéfiniment, la fonction $H(x)$ satisfaisant aux conditions imposées à $G''(x)$. Il est clair qu'il existe un théorème jouant, vis à vis de l'expression (12), le rôle du théorème I; on démontrera en effet, de la même façon la proposition suivante:

THEOREME I'. — Si la fonction $H(x)$ satisfait à la condition (A) et si s_n reste inférieure à partir d'un certain rang à n^p , on a

$$\lim_{x=\infty} \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \left[\sum_{N_1'}^{N_2'} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} - \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} \right] = 0.$$

Cette proposition introduit un nouveau procédé de sommation qui consiste à chercher la limite de l'expression

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q}$$

lorsque x croit indéfiniment par valeurs entières, $H(x)$ vérifiant l'égalité (A). Ce procédé est la généralisation de celui indiqué par M M. HARDY et LITTLEWOOD sous le nom de procédé (E, a) , je le désignerai sous le nom de *sommation H*. Des théorèmes III et I' on déduit le corollaire suivant.

THEOREME III'. — Si la fonction $H(x) = G''(x)$ vérifie les conditions (A'), (B'), et si s_n vérifie la condition (a), les procédés de sommation B et H sont équivalents.

Du mode de démonstration du théorème III on déduit facilement que, dans l'énoncé précédent, on peut remplacer l'égalité entre $H(x)$ et $G''(x)$ par l'égalité moins restrictive $G''(x) + \lambda(x) \frac{1}{x} \sqrt{G''(x)} = H(x)$.

Comme conséquence on voit par exemple, en se reportant au n° 3 que la sommation B par l'une ou l'autre des fonctions $E(x, \alpha)$ et $E_\alpha(x)$ est équivalente, si $s_n n^{-\frac{1}{2}}$ tend vers zéro, à la sommation H avec $H(x) = \frac{\alpha}{x}$.

7. Dans les théorèmes précédents nous avons supposé une limitation de s_n , cette limitation peut se déduire d'une hypothèse sur les termes de la série et de l'hypothèse de la sommabilité. On obtient le théorème suivant.

THEOREME IV. — Si la série dont la somme des n premiers termes est s est sommable B (ou H), et si l'on suppose que $\rho(n)$ désignant le maximum du module de $s_{n+p} - s_n$ lorsque p reste inférieur à $1 + \frac{1}{n G''(n)}$, on a

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$$

s_n vérifie la condition (a).

Les conditions imposées à la fonction sommatrice sont ici les conditions (A') et (B').

Je ferai la démonstration dans le cas de la sommation B , qui est le moins simple. Il est tout d'abord évident que, s_n restant inférieur à kn , le théorème I s'applique; on peut d'autre part remplacer s_n par $s_\xi + (s_n - s_\xi)$ et séparer les termes correspondant à s_ξ , enfin majorer la différence $|s_n - s_\xi|$ par $\varepsilon(x) \frac{\xi G''(\xi)(n - \xi)}{1 + \xi G''(\xi)}$, ce qui donne l'égalité

$$s_\xi = s[1 + \varepsilon(x)] + \varepsilon(x) \frac{\xi G''(\xi)}{1 + \xi G''(\xi)} \sum_{N_1}^{N_2} c_n (n - \xi) x^n.$$

En remplaçant $c_n x^n$ par la valeur donnée par l'égalité (8), on voit que la somme figurant dans le second membre de l'égalité précédente est inférieure au produit de

$T(x)$ par $A(x)$: $G''(\xi)$, et par suite inférieure à $\frac{1}{\sqrt{G''(\xi)}}$ et l'on retombe sur l'égalité

(a) puisque ξ est susceptible de prendre toutes les valeurs.

Lorsque le produit $x G''(x)$ ne tend pas vers zéro, c'est-à-dire lorsque la sommation B est faite par une fonction entière d'ordre fini ou nul, l'énoncé du théorème IV se simplifie, s_n vérifie la condition (b) lorsque le terme général tend vers zéro; la condition (a) se simplifie elle-même et exprime que s_n est inférieur à $\varepsilon(n)[G''(n)]^{-\frac{1}{2}}$.

8. La substitution de la sommation H à la sommation B , possible d'après ce qui précède lorsque les nombres s_n vérifient la condition (a) ou la condition énoncée au n° précédent, permet de donner un énoncé plus précis du théorème II:

THEOREME II'. — Si la maximum $\sigma(n)$ de $|s_{n+p} - s_n|$, lorsque p prend toutes les valeurs inférieures à $\frac{1}{\sqrt{G''(n)}}$, tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et si la série est sommable B (ou H), de somme s , la fonction $G''(x)$ [ou $H(x)$] satisfaisant aux conditions (A') et (B'), la série est convergente et a pour somme s .

On se trouve en effet dans les limites d'application du théorème III, et l'on a dans un cas comme dans l'autre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{N'_1}^{N'_2} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} = s, \quad N'_2 = -N'_1 = A \sqrt{\frac{\log x}{H(x)}},$$

[$H(x)$ étant remplacé par $G''(x)$ dans le cas de la sommation B]. On mettra s_x en évidence comme au n° 7, et on majorera la différence $|s_{x+q} - s_x|$ par $\varepsilon(x)[1 + q\sqrt{H(x)}]$ conformément à l'hypothèse, on obtiendra ainsi l'égalité

$$s_x + \varepsilon(x)\sqrt{H(x)} \sum_{N'_1}^{N'_2} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} [1 + q\sqrt{H(x)}] \approx s$$

et, en achevant le calcul comme ci-dessus, on voit que s_n est asymptotiquement égal à s , ce qui démontre la proposition.

La condition imposée à la série est évidemment vérifiée lorsque le terme général a_n reste, à partir d'un certain rang, inférieur à $\varepsilon(n)\sqrt{G''(n)}$ on a ainsi la proposition suivante, qui comprend celle démontrée par MM. HARDY et LITTLEWOOD dans leur premier mémoire:

Si la série de terme général a_n est sommable B par les fonctions $E(x, \alpha)$ ou $E_\alpha(x)$, et si le produit $a_n\sqrt{n}$ tend vers zéro, la série est convergente.

9. Dans le cas où la suite $\sigma(n)$ introduite dans l'énoncé du théorème II' est seulement bornée on peut encore faire les mêmes raisonnements que ci-dessus, et l'on est conduit à la proposition suivante qui jouera un rôle fondamental dans la suite:

LEMME. — Considérons une série sommable B (ou H) [les fonctions $G''(x)$ ou $H(x)$ vérifiant les conditions (A') et (B')], et supposons que la somme s_n des n premiers

termes satisfasse à la condition suivante: $\alpha(n)$ étant une fonction tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment le maximum $\sigma(n)$ de $|s_{n+p} - s_n|$ lorsque p reste inférieur à $\alpha(n)[G''(n)]^{-\frac{1}{2}}$ est lui-même inférieur à $A\alpha(n)$; alors la somme s_n est bornée en module.

Comme conséquence de ce lemme on voit que s_n étant borné en module, on peut appliquer la remarque faite à la fin du n° 1 (la même remarque pouvant être faite dans le cas de la sommation H), on aura donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{G''(x)}{2\pi}} \sum_{N'_1}^{N'_2} e^{-\frac{1}{2}q^2 G''(x)} s_{x+q} = s, \quad N'_2 = -N'_1 = \frac{1}{\varepsilon(x)\sqrt{G''(x)}}$$

et ceci quel que soit $\varepsilon(x)$. L'intervalle utile dans la recherche de la limite est ainsi, à un facteur près croissant aussi lentement que l'on veut, le même que celui dans lequel $|s_{n+p} - s_n|$ reste infiniment petit. On prévoit donc que, si la sommabilité B a encore lieu lorsque $G''(x)$ est remplacé par son produit par un nombre arbitrairement grand, la condition imposée aux s_n entraînera la convergence. On démontrera rigoureusement cette propriété en utilisant la valeur du reste trouvée au n° 1, mais la démonstration sera plus simple par la méthode de MM. LITTLEWOOD et HARDY.

§ 3.

10. Je montrerai maintenant rapidement que, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur $G''(x)$ ou $H(x)$, on peut étendre la portée du théorème •II' et obtenir l'énoncé définitif sous la forme suivante:

THEOREME II' — Si une série est sommable B (ou H), de somme s , et si la somme s_n des n premiers termes satisfait à la condition

$$(c) \quad |s_{n+p} - s_n| < \alpha(n), \quad p < \alpha(n)[G''(n)]^{-\frac{1}{2}} \quad \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0 \right]$$

la série est convergente, de somme s .

Je suivrai le mode de démonstration de MM. LITTLEWOOD et HARDY et remplacerai d'abord dans la sommation H la série par une intégrale en établissant la propriété suivante:

THEOREME III'. — Si $H(x)$ vérifie les conditions (A'), (B'), si le maximum $\rho(n)$ du module de $s_{n+p} - s_n$ pour $p \leq 1 + \frac{1}{nH(n)}$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et si la série est sommable H , on a

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_x^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} \sim \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 H(x)} f(t+x) dt,$$

$f(x)$ désignant une fonction nulle pour x négatif, linéaire dans tout intervalle $n, n+1$, et prenant pour $x = n$ la valeur s_n .

La démonstration résulte des deux faits suivants:

1° dans les deux membres on peut remplacer les limites par des nombres N'_1 et N'_2 tels que $N'_2 = -N'_1 = A(\log x)^{\frac{1}{2}} [H(x)]^{-\frac{1}{2}}$, la propriété résulte du théorème I' pour le premier membre puisque s_n est inférieur à n et découlerait d'un théorème analogue pour l'intégrale.

2° Pour les valeurs de t comprises entre les entiers q et $q + 1$, on a

$$e^{-\frac{t^2}{2}H(x)} = e^{-\frac{1}{2}q^2H(x)} [1 + \lambda(x)qH(x)], \quad |q| < N'_2,$$

$$f(t+x) = s_{q+x} + \varepsilon(x); \quad f(t+x) < \frac{\varepsilon(x)x\sqrt{H(x)}}{1+xH(x)}, \quad |t| < N'_2$$

l'inégalité écrite en dernier lieu étant conséquence du théorème IV.

Je désignerai par méthode de sommation L le procédé qui consiste à attribuer pour somme à la série dont la somme des n premiers est s_n , la limite pour n infini (si cette limite existe) de l'intégrale

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2H(x)} f(t+x) dt, \quad [f(y) = s_n + (s_{n+1} - s)(y - n), \quad n \leq y \leq n + 1].$$

Les théorèmes III et III' montrent que, lorsque les s_n vérifient la condition (b), les méthodes de sommation (B), (H), (L) sont équivalentes, $G''(x) = H(x) + \lambda(x) \frac{x}{\sqrt{H(x)}}$ vérifiant les conditions (A') et (B').

II. Nous supposons dorénavant que $H(x)$ est décroissante et désignerons par $K(x)$ la fonction inverse de $\frac{2}{H(x)}$, $K(x)$ est croissante et son quotient par \sqrt{x} a pour limite ∞ ; la méthode de sommation L consiste dès lors à chercher la limite, pour x infini, de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}t^2} f(t + K(x)) dt.$$

Nous pourrions, à partir de cette nouvelle forme, établir la proposition fondamentale suivante:

Supposons que la fonction $K(x)$ admette des dérivées première et seconde continues et vérifiant les conditions

$$(C) \quad \begin{cases} AK(x) < xK'(x) < BK(x) \\ K''(x) \cdot x^2 < CK(x), \end{cases} \quad (A > 0)$$

et supposons qu'une série soit sommable, de somme s , à l'aide de cette fonction, la somme s_n des n premiers termes étant d'ailleurs bornée, cette série est alors sommable L à l'aide de la fonction $K(xa)$, quel que soit le nombre a supérieur à un.

On peut évidemment supposer que s est nul, et on doit vérifier que l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{a} \varphi(x, a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}t^2} f[t + K(x)] dt = 0$$

étant réalisée pour une valeur de a , elle l'est encore pour les valeurs supérieures, ou plus simplement que l'égalité a encore lieu lorsque a est remplacé par $a + \delta$ ($\delta < a$). Or on a

$$\begin{aligned} \varphi(x, a) &= \sum_0^n \frac{(-1)^i}{\pi} \frac{\delta^i}{i!} I_i(x) + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 (a - \delta')} \times \\ &\times \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\delta t^2}{x} \right)^{n+1} f[t + K(x)] dt \quad (\delta' < \delta) \\ I_i(x) &= x^{-i-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 a} t^{2i} f[t + K(x)] dt, \end{aligned}$$

et, comme $f[t + K(x)]$ est borné, le second terme de $\varphi(x, a)$ est inférieur à

$$\frac{A}{(n+1)! \sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 a} \left(\frac{t^2 \delta}{x} \right)^{n+1} dt = \frac{2A}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta}{a} \right)^{n+\frac{1}{2}} du < \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

Par suite tout revient à montrer que les fonctions $I_i(x)$ tendent vers zéro lorsque x croît indéfiniment, et, puisque $I_0(x)$ tend vers zéro, il suffit de vérifier que $I_n(x)$ tendant vers zéro il en est de même de $I_{n+1}(x)$. Or les $I_n(x)$ sont bornés, d'autre part on a en dérivant

$$I'_n(x) = -\frac{2n+1}{2x} I_n(x) + \frac{a}{x} I_{n+1}(x) + x^{-n-\frac{1}{2}} K'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 a} t^{2n} f[t + K(x)] dt$$

en intégrant par partie la dernière intégrale on obtient finalement

$$(13) \quad I'_n(x) = -\frac{2n+1}{2x} I_n(x) + \frac{a}{x} I_{n+1}(x) + \frac{2K'(x)}{\sqrt{x}} [a I_{n+\frac{1}{2}}(x) - 2n I_{n-\frac{1}{2}}(x)].$$

En utilisant les propriétés (C) on déduit de cette égalité

$$|I'_n(x)| = \frac{\lambda(x)}{x^2} + \lambda(x) \frac{K(x)}{x^{5/2}} + \lambda(x) \frac{[K(x)]^2}{x^3}$$

comme $\frac{\sqrt{x}}{K(x)}$ tend vers zéro c'est le troisième terme qui donne son ordre à la somme, on a donc simultanément

$$(14) \quad |I'_n(x)| = \lambda(x) x^{-3} [K(x)]^2, \quad |I_n(x)| = \varepsilon(x);$$

admettons pour l'instant que l'on puisse déduire de là l'inégalité

$$(15) \quad |I'_n(x)| = \varepsilon(x) x^{-\frac{3}{2}} K(x).$$

En portant cette valeur dans l'égalité (13), en faisant n égal à zéro et en résolvant par rapport à $I_{\frac{1}{2}}$ on trouvera que cette fonction tend vers zéro; d'une façon générale,

en faisant $n = \frac{1}{2}p$ et en résolvant par rapport à $I_{\frac{1}{2}(p+1)}$ on trouvera que cette fonction tend vers zéro, et par suite la proposition en vue est démontrée.

Il reste à montrer que les égalités (14) entraînent l'inégalité (15). Désignons par

$\alpha(x)$ une fonction décroissante tendant vers zéro qui soit constamment supérieure à $|I_n(x)|$ et formons la suite de nombres x_i définis de proche en proche par l'égalité $(x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{\alpha(x_i)x_i^3}{[K(x_i)]^2}$; d'après la formule de la moyenne il existe un nombre x'_i compris entre chaque couple de nombres x_i, x_{i+1} pour lequel on a

$$|I'_n(x'_i)| = \frac{|I_n(x_{i+1}) - I_n(x_i)|}{|x_{i+1} - x_i|} < \sqrt{\frac{2\alpha(x_i)}{x_i^3}} K(x_i)$$

et entre x'_i et x'_{i+1} on a encore, en vertu de cette même formule

$$\begin{aligned} |I'_n(x)| &< |I'_n(x'_i)| + |x - x'_i| |I''_n(x'_i)| < \sqrt{\frac{2\alpha(x_i)}{x_i^3}} K(x_i) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{\alpha(x_i)} x_i^3}{K(x_i)} + \frac{\sqrt{\alpha(x_{i+1})} x_{i+1}^3}{K(x_{i+1})} \right) \cdot \frac{\lambda(x) [K(x'_i)]^2}{x'_i}. \end{aligned}$$

D'autre part la première condition (C) montre après intégration que $K(x')$ est inférieur au produit de $K(x)$ par $\left(\frac{x'}{x}\right)^{\lambda(x)}$, par suite $\frac{x'_{i+1}}{x'_i}$ étant de la forme $1 + \varepsilon(x)$ on voit que l'on obtient l'égalité (15).

12. La démonstration du théorème II'' est alors bien aisée, en supposant que la fonction $G''(x)$ [ou $H(x)$] vérifie les conditions (A'), (B') et que l'inverse de $2[G''(x)]^{-1}$ [ou de $2[H(x)]^{-1}$] satisfait aux conditions (C). En effet, le lemme du n° 9 montre que s_n est borné, le théorème III' est applicable donc la série sommable L , et d'après ce qui précède elle l'est par toute fonction $K(ax)$, a étant fixe mais aussi grand que l'on veut. On a ainsi l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(s - s_{K(x)} - \sqrt{\frac{a}{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}at^2} \{f[t + K(x)] - f[K(x)]\} dt \right) = 0$$

dans laquelle on peut remplacer les limites d'intégration par $\pm (ax)^{\frac{1}{2} + \alpha}$, dans cet intervalle la quantité entre crochets est inférieure à $2tx^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon(x)$ et l'on obtient

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} (s - s_{K(x)}) < a^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui achève la démonstration.

Les conditions imposées à $G''(x)$ ou à $H(x)$ peuvent se simplifier, la première relation (C) entraîne une relation analogue pour $G''(x)$, on a donc en intégrant

$$\frac{G''(x_1)}{G''(x)} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{\lambda(x)}$$

et si dans cette égalité on fait $x_1 = x[1 + \varepsilon(x)]$ on obtient

$$G''[x + \varepsilon(x)x] = G''(x) \left(1 + \frac{x_1 - x}{x}\right)^{\lambda(x)} = G''(x) \left(1 + \lambda(x) \frac{x_1 - x}{x}\right)$$

ce qui montre que la relation (B') est certainement vérifiée. En résumé il suffit que $G''(x)$ satisfasse à la condition (A') et qu'en posant $H(x) = G''(x) + \lambda(x) \frac{\sqrt{G''(x)}}{x}$ l'inverse de $H(x)$ vérifie les conditions (C).

Les conditions (C) sont vérifiées par toutes les fonctions simples à croissance rationnelle ¹⁰⁾ de sorte que le théorème II'' est valable pour la sommation B par les fonctions $E_\alpha(x)$ et $E(x, \alpha)$ l'énoncé étant alors le même que pour la sommation exponentielle.

§ 4.

13. D'après ce qui a été dit au n° 2 le produit $x^{1+\alpha} G''(x)$ ne saurait être borné lorsque $G''(x)$ est une fonction déduite des coefficients d'une fonction entière, et ceci quel que soit le nombre positif α , $G''(x)$ ne peut donc être égal à $x^{-\beta}$, β étant supérieur à un. Une telle limitation ne s'impose pas dans la méthode de sommation H qui continuera à jouir des propriétés exprimées par les théorèmes I', IV, II''. Il existe ainsi des fonctions $H(x)$ pour lesquelles la sommation H n'est pas analogue à la sommation B . On peut alors rattacher la sommation H à la sommation par des séries entières de rayon de convergence égal à un.

Considérons la série de rayon de convergence un

$$\varphi(x) = \sum_0^{\infty} c_n^i x^n = \sum_0^{\infty} e^{-G_1(n)} \left(1 + \frac{\lambda(n)}{n} \right) x^n,$$

le quotient de $G_1(x)$ par x tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment, nous supposons que $G_1(x)$ est une fonction négative décroissante, dérivable deux fois, la dérivée première $G_1'(x)$ étant négative tandis que $G_1''(x)$ est positif. Nous supposons de plus que $G_1''(x)$ vérifie les conditions (A') et (C).

Nous dirons que la série de terme général $s_n - s_{n-1}$ est sommable A , de somme s , si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_0^{\infty} c_n^i s_n x^n}{\varphi(x)} = s.$$

On pourra démontrer les mêmes propositions qu'aux § précédents, et notamment l'équivalence à la sommation H ou L en prenant comme plus haut $H(x) = G_1''(x) + \lambda(x) \frac{\sqrt{G_1''(x)}}{x}$; en particulier le théorème II'' est applicable à la sommation A .

14. Il est aisé de se rendre compte de la nature de l'extension ainsi réalisée. Le quotient de $G_1(x)$ par x tendant vers zéro la dérivée $G_1'(x)$ admet zéro pour limite inférieure pour x infini, et par suite aussi le produit $x G_1''(x)$; les fonctions $G_1''(x)$ tendent donc vers zéro plus rapidement que les fonctions $G''(x)$ et l'on pourra prendre

¹⁰⁾ loc. cit. 7)

finalemeut pour $H(x)$ des fonctions dont la croissance est comprise entre celles des fonctions $\frac{(\log x)^3}{\varepsilon(x)x^2}$ et $\frac{\varepsilon(x)}{\log x}$.

Il importe de montrer que les nouveaux modes de sommation obtenus sont utiles (dans le cas ou il y a equivalence à la sommation B le fait résulte de ce que la sommation B est utile) je montrerai donc que la sommation A permet, lorsque la fonction $\varphi(x)$ est convenablement choisie de sommer certaines séries divergentes. Supposons que $\varphi(x)$ admette le point un pour point essentiel et n'ait pas d'autre point singulier sur le cercle de convergence, ce qui aura lieu en particulier en prenant $\varphi(x) = E\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $E(x)$ étant une fonction entière à coefficients positifs. Considérons d'autre part une série de terme général a_n et telle que la série entière $\sum a_n \zeta^n$ admette le point $\zeta = 1$ pour point régulier, la valeur de la fonction en ce point étant A ; la fonction $\sum s_n \zeta^n$ (s_n désignant toujours la somme des n premiers termes, $s_n = \sum_0^n a_i$) admettra le point $\zeta = 1$ pour pôle simple de résidu A . Dans ces conditions un théorème connu de M. BOREL sur la multiplication des singularités montre que la fonction $\sum c_n^i s_n x^n$ admettra aussi $x = 1$ pour point essentiel, le développement de LAURENT autour de ce point étant le même que celui de $\varphi(x) \times A$, il suit de là que le quotient par $\varphi(x)$ aura pour limite A lorsque x tendra vers un. La série sera donc sommable A .

15. Dans ce qui précède j'ai fait une hypothèse sur la nature analytique de la fonction sommatrice, mais il est facile de voir que les seules hypothèses sur la régularité de la croissance suffisent, dans certains cas pour assurer la sommabilité, c'est ainsi que la sommation de la progression géométrique de raison un sera toujours possible. Il suffit de montrer la propriété pour la sommation H à laquelle on peut donner la forme commode suivante: la série est sommable H par la fonction $\theta(x)$ satisfaisant à la transformée de (A') si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-[\theta(x)]}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}q^2} s_{q+[\theta(x)]} = s, \quad [\theta(x)] = \text{partie entière de } \theta(x).$$

Comme pour la progression géométrique s_n est égal à $\frac{1 - \zeta^n}{1 - \zeta}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-[\theta(x)]}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}q^2} s_{q+[\theta(x)]} = \frac{1}{1 - \zeta} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-[\theta(x)]}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}q^2} - \frac{1}{1 - \zeta} \frac{\zeta^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-[\theta(x)]}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}q^2} \zeta^q,$$

le premier terme du second membre a pour limite $\frac{1}{1 - \zeta}$, d'autre part le module de ζ étant égal à un, la somme qui figure dans le second terme est asymptotiquement égale à la même somme prise à partir de la valeur $-\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon(x)}$ (théorème I') donc à cette somme prise à partir de la valeur $-x$. Or la progression est sommable par les

moyennes exponentielles, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-[x]}^{+\infty} e^{-\frac{q^2}{x}} \chi^q = 0$$

et par suite la série est sommable H .

En se reportant au n° 3, on voit que l'on a incidemment démontré la propriété suivante :

Si les coefficients de la fonction $F(x)$ vérifient les conditions (A') et (B') on a la relation

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(\chi x)}{F(x)} = 0 \quad (|\chi| = 1, \chi \neq 1).$$

on pourrait énoncer une propriété analogue pour les séries entières.

16. Il est par contre aisé de montrer que la sommation H ne constitue pas un procédé de prolongement analytique satisfaisant aux conditions énoncées au n° 3, car la sommation de la progression géométrique de raison supérieure à un n 'est pas possible. D'après ce qui a été dit ci-dessus il suffit de voir que l'expression

$$\frac{\chi^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-\theta(x)}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} \chi^q, \quad |\chi| > 1$$

ne tend pas vers zéro lorsque x croît indéfiniment. On ne changera pas la limite en remplaçant dans la somme $[\theta(x)]$ par ∞ et l'on aura à considérer le produit

$$\frac{\chi^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} F(\chi, x), \quad F(\chi, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} \chi^q.$$

Quels que soient x et χ la fonction $F(\chi, x)$ vérifie l'identité

$$F(\chi, x) = \chi e^{-\frac{1}{x}} F(\chi e^{-\frac{1}{x}}, x)$$

supposons alors que χ soit de la forme $e^{\frac{P}{Q} + 2i\pi\omega}$, ($\omega = \frac{R}{Q}$), P, Q, R étant des entiers et ω irréductible, ce qui ne restreint pas la généralité, posons en outre $x = Qy$, on aura en appliquant yP fois l'identité précédente

$$\frac{\chi^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} F(\chi, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi Qy}} \chi^{[\theta(Qy)]} e^{y\frac{P^2}{Q} + i\omega Py} F(e^{2i\pi\omega}, yQ).$$

Le calcul de $F(e^{2i\pi\omega}, yQ)$ se fait aisément, on a, en utilisant encore une fois le théorème I'

$$F(e^{2i\pi\omega}, yQ) \sim 2 \sum_0^{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{y}}{\varepsilon(y)} u_n,$$

$$u_n = \sum_{nQ}^{(n+1)Q} e^{-\frac{1}{yQ} q^2} \cos 2\pi \frac{qR}{Q} = \frac{1 + \varepsilon(y)}{y} e^{-\frac{1}{yQ} n^2} \left(\frac{1}{2} n(Q-1) + B \right)$$

par suite

$$F(e^{2i\pi\omega}, y, Q) \sim 2 \sum_0^{\frac{\sqrt{y}}{\varepsilon(y)}} e^{-\frac{1}{yQ} n^2} \frac{1}{y} \left(\frac{1}{2} n(Q-1) + B \right) \sim \frac{1}{2} Q(Q-1)$$

ce qui montre que le produit $\frac{z^{[0(x)]}}{\sqrt{\pi x}} F(z, x)$ croît indéfiniment et démontre la proposition.

Paris, 9 janvier 1917.

G. VALIRON.