

SUL TEOREMA DI GREEN NEL PIANO E NELLO SPAZIO.

Nota di **Mauro Picone** (Catania).

Adunanza del 27 aprile 1919.

1. Se D è un dominio regolare del piano (x, y) ¹⁾ di contorno C e $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono due funzioni continue in D , con i simboli

$$\int_D A d\sigma, \quad \int_{+C} (A dx + B dy),$$

designo, rispettivamente, l'integrale della funzione A esteso al dominio D e l'integrale curvilineo della forma differenziale $A dx + B dy$ esteso, nel verso positivo, al contorno C .

Se D è un dominio regolare dello spazio (x, y, z) (cfr. n° 9) di contorno S e A, B, C sono tre funzioni continue in D , con i simboli

$$\int_D A d\tau, \quad \int_{S_e} (A dz dx + B dx dy + C dy dz),$$

designo, rispettivamente, l'integrale della funzione A esteso al dominio D e l'integrale superficiale della forma differenziale

$$A dy dz + B dz dx + C dx dy,$$

esteso alla pagina esterna del contorno S .

2. Un dominio regolare D del piano (x, y) sia definito dalle condizioni

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x),$$

dove $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ sono funzioni continue con le loro derivate prime nel tratto chiuso

¹⁾ Cfr. W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2^{te} Auflage, Bd. I (Leipzig und Berlin, Teubner, 1912), p. 52 e p. 179.

(a_1, a_2) , per le quali è $\alpha_2(x) > \alpha_1(x)$, per ogni punto x *interno* al tratto indicato. Siano $B(x, y)$ e $B_x(x, y)$ due funzioni continue in D tali che, in ogni punto interno di D , sia

$$B_x = \frac{\partial B}{\partial x},$$

in queste sole ipotesi, sussiste la relazione

$$\int_D B_x d\sigma = \int_{+C} B dy ?$$

Tale relazione, che viene, in particolare, affermata dal teorema di GREEN nel piano, non è, in quelle sole ipotesi, dimostrata nei trattati d'Analisi.

Sia ora D_{xy} un dominio regolare del piano (x, y) e D un dominio regolare dello spazio definito dalle condizioni

$$(x, y) \text{ in } D_{xy}, \quad \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y),$$

ove $\alpha_1(x, y)$ e $\alpha_2(x, y)$ sono funzioni di x e di y continue con le loro derivate parziali prime nel dominio D_{xy} ²⁾, per le quali è $\alpha_1(x, y) < \alpha_2(x, y)$, per ogni punto interno di D_{xy} . Siano A, A_x, B, B_y quattro funzioni continue in D , tali che, in ogni punto interno di D , sia

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad B_y = \frac{\partial B}{\partial y},$$

in queste sole ipotesi, sussistono le relazioni

$$\int_D A_x d\tau = \int_{S_e} A dy dz, \quad \int_D B_y d\tau = \int_{S_e} B dz dx ?$$

Tali relazioni che vengono, in particolare, affermate dal teorema di GREEN nello spazio, non sono, del pari, in quelle sole ipotesi, dimostrate nei trattati d'Analisi.

Queste constatazioni rendono manifesta la necessità di riprendere lo studio del teorema di GREEN per vedere se non si possa stabilirlo, nel piano e nello spazio, in condizioni nelle quali i contorni dei domini riescano liberati da ipotesi restrittive della cui essenzialità è lecito dubitare *a priori*.

È peraltro ben nota l'importanza fondamentale del teorema di GREEN.

3. In questa nota stabilisco il teorema di GREEN, nel piano, per ogni dominio regolare, e, nello spazio, per ogni dominio regolare che sia decomponibile in domini normali (cfr. n° 10, 14 e 16).

²⁾ Avverto fin da ora che quando dico che una funzione f ammette in un dominio D la derivata parziale $f_u(u = x, y, z)$ continua, intendo dire che esiste in D una funzione continua f_u tale che, per ogni punto *interno* di D , è

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Ritengo però assai probabile che ogni dominio regolare dello spazio sia sempre decomponibile in domini normali. Tale questione di *Analysis situs* dello spazio è tuttora oggetto di studio da parte mia.

Il teorema di GREEN nel piano è stato già da me dimostrato, nelle stesse ipotesi qui poste, nella mia nota recente *Una nuova dimostrazione del teorema di GREEN*³⁾. La dimostrazione che ottengo qui (al n° 6), per quanto meno diretta, ha il vantaggio, su quella data nella nota ora citata, di essere più facilmente estendibile allo spazio e di essere, e ciò è notevolissimo, una conseguenza quasi immediata, per quanto fino ad ora inosservata, di un teorema contenuto in molti trattati d'Analisi.

Il teorema di GREEN nello spazio è qui dimostrato come conseguenza di una nuova teoria degli integrali superficiali, che espongo al § 2, alla quale teoria appartiene il nuovo teorema del n° 15 da cui poi immediatamente discende quello di GREEN.

4. Sia Δ un dominio misurabile (un intervallo nel caso lineare) porzione del dominio misurabile D in cui è definita la funzione integrabile f . Si designi con $S(\Delta)$, indifferentemente, uno degli integrali

$$\int_{\Delta} f dx, \quad \int_{\Delta} f d\sigma, \quad \int_{\Delta} f d\tau,$$

$S(\Delta)$ è una funzione additiva di Δ che verifica il teorema della media rispetto alla funzione f ; per $S(\Delta)$ si ha cioè

$$S(\Delta' + \Delta'') = S(\Delta') + S(\Delta''),$$

$$\Delta \cdot m(\Delta) \leq S(\Delta) \leq \Delta \cdot M(\Delta),$$

ove Δ designa anche la misura di Δ , $m(\Delta)$ e $M(\Delta)$, rispettivamente, il limite inferiore e superiore di f in Δ .

Sussiste il

TEOREMA FONDAMENTALE. — *Se nel dominio misurabile D è definita una funzione continua f , ogni funzione additiva $S'(\Delta)$, della porzione variabile e misurabile Δ di D , che verifica il teorema della media rispetto alla funzione f , coincide con l'integrale $S(\Delta)$ di f esteso a Δ .*

Suddiviso, invero, il dominio Δ in domini parziali Δ_i , detti δ_i il diametro di Δ_i , m_i e M_i il minimo e il massimo di f in Δ_i , f_i un valore qualunque di f in Δ_i , si ha

$$S'(\Delta) = \sum S'(\Delta_i) \\ m_i \Delta_i \leq S'(\Delta_i) \leq M_i \Delta_i,$$

³⁾ M. PICONE, *Una nuova dimostrazione del teorema di GREEN* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V^a, t. XXVIII, 1° semestre 1919, pp. 270-273].

e quindi

$$\begin{aligned}\sum m_i \Delta_i &\leq S'(\Delta) \leq \sum M_i \Delta_i, \\ \sum (m_i - f_i) \Delta_i &\leq S'(\Delta) - \sum f_i \Delta_i \leq \sum (M_i - f_i) \Delta_i.\end{aligned}$$

Se ne ricava, in forza della continuità di f ,

$$S'(\Delta) = \lim_{\delta_i \rightarrow 0} \sum f_i \Delta_i = S(\Delta).$$

Le dimostrazioni date qui del teorema di GREEN nel piano e nello spazio, si fondano appunto sul teorema ora dimostrato. Per quanto questo teorema sia di immediata dimostrazione, esso, nella utilissima forma qui datagli, è qui per la prima volta esplicitamente enunciato.

§ 1.

Sul teorema di GREEN nel piano.

5. Scomposizione di un dominio regolare in domini normali. — Nel tratto chiuso (c_1, c_2) dell'asse delle u , siano definite due funzioni $\gamma_1(u)$, $\gamma_2(u)$, continue con le loro derivate prime, tali che sia

$$\gamma_2(u) > \gamma_1(u) \quad \text{per} \quad c_1 < u < c_2.$$

Ciascuno dei due domini del piano (x, y) , definito o dalle limitazioni

$$c_1 \leq x \leq c_2, \quad \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x),$$

a dalle limitazioni

$$c_1 \leq y \leq c_2, \quad \gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y),$$

dicesi un *dominio normale*.

Ogni dominio normale è regolare e semplicemente connesso. Si ha il teorema:

Ogni dominio piano regolare si può decomporre in domini normali ⁴⁾.

Trova qui posto una proprietà dei domini normali di cui faremo uso in seguito. Nel dominio normale D del piano (x, y) , sia definita una funzione continua $f(x, y)$, dico che esistono sempre due funzioni $h(x, y)$ e $k(x, y)$, continue in D , tali che, per ogni punto interno di D , è

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial k}{\partial y} = f(x, y).$$

Diciamo, invero, per i punti di D , a_1 e a_2 il minimo e il massimo della x , b_1 e b_2 il minimo e il massimo della y ; per essere il dominio D normale, si può costruire una

⁴⁾ Cfr. W. F. OSGOOD [loc. cit. ¹⁾], p. 179.

funzione $g(x, y)$, continua nel rettangolo $R(a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2)$, che coincide con f in ogni punto di D ⁵⁾. Le funzioni

$$h = \int_{a_1}^x g(\xi, y) d\xi + X(x), \quad k = \int_{b_1}^y g(x, \eta) d\eta + Y(y),$$

ove $X(x)$ e $Y(y)$ sono arbitrarie funzioni continue, rispettivamente della x e della y , definite in (a_1, a_2) e in (b_1, b_2) sono continue in D e, in ogni suo punto interno, soddisfano alle (1).

6. Dimostrazione del teorema di GREEN nel piano. — In molti trattati di Analisi ⁶⁾, specialmente in quelli dedicati alla teoria delle funzioni analitiche, si dimostra, direttamente, senza fare uso del teorema di GREEN, il teorema:

« Se P e Q sono funzioni continue nel dominio regolare D di contorno C ; le
« quali possiedono, in ogni punto interno di D , la prima, la derivata rispetto a y , la
« seconda, la derivata rispetto a x , continue nell'interno di D ed eguali, si ha

$$\ll \int_C (P dx + Q dy) = 0.$$

Ora è notevolissimo che da tale teorema si deduce senz'altro quello di GREEN:

Se le funzioni $A(x, y)$, $B(x, y)$, $A_y(x, y)$, $B_x(x, y)$ sono definite nel dominio regolare D di contorno C e vi sono continue, e, se, in ogni punto interno di D , è

$$A_y(x, y) = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_x(x, y) = \frac{\partial B}{\partial x},$$

sussistono le relazioni

$$(2) \quad \int_D A_y d\sigma = - \int_{+C} A dx, \quad \int_D B_x d\sigma = \int_{+C} B dy.$$

Indicando con Δ un dominio regolare variabile, porzione di D , e con Γ il contorno di Δ , sarà dimostrata, ad esempio, la seconda delle (2), se faremo vedere che la funzione additiva di Δ :

$$(3) \quad \int_{+\Gamma} B dy,$$

verifica il teorema della media rispetto a B_x (cfr. n° 4). A tale scopo cominciamo dal supporre normale il dominio Δ .

1° CASO. — Il dominio Δ è definito dalle relazioni

$$b_1 \leq y \leq b_2, \quad \beta_1(y) \leq x \leq \beta_2(y).$$

⁵⁾ Non pare facile dimostrare la possibilità di costruire una tale funzione $g(x, y)$, per un qualsiasi dominio regolare.

⁶⁾ Cfr., per esempio, W. F. OSGOOD [loc. cit. ¹⁾], Kap. 4°, § 3.

Si ha allora

$$(4) \quad \int_{+\Gamma} B dy = \int_{b_1}^{b_2} (B[\beta_2(y), y] - B[\beta_1(y), y]) dy,$$

detti $m(\Delta)$ e $M(\Delta)$ il minimo e il massimo di B_x in Δ , si ha

$$[\beta_2(y) - \beta_1(y)] m(\Delta) \leq B[\beta_2(y), y] - B[\beta_1(y), y] \leq [\beta_2(y) - \beta_1(y)] M(\Delta),$$

dalla (4) si deduce perciò

$$(5) \quad \Delta \cdot m(\Delta) \leq \int_{+\Gamma} B dy \leq \Delta \cdot M(\Delta).$$

2° CASO. — Il dominio Δ è definito dalle relazioni

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x).$$

Poniamo

$$A(x, y) = \int_{\alpha_1(x)}^y B_x(x, \eta) d\eta.$$

Le funzioni A e B sono continue in Δ e vi possiedono, nel suo interno, la prima, la derivata, rispetto a y , la seconda, la derivata rispetto a x , continue ed eguali, si ha allora, in virtù del teorema ricordato sopra,

$$\int_{+\Gamma} (A dx + B dy) = 0,$$

e quindi

$$\int_{+\Gamma} B dy = - \int_{+\Gamma} A dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} B_x(x, y) dy,$$

onde segue, di nuovo, che la funzione (3) soddisfa alle (5).

Il dominio Δ sia ora il più generale dominio regolare. Siano $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, rispettivamente di contorni $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, i domini normali in cui si può decomporre (n° 5), il dominio Δ ; si ha

$$\int_{+\Gamma} B dy = \sum \int_{+\Gamma_i} B dy,$$

$$\Delta \cdot m(\Delta) \leq \sum \Delta_i m(\Delta_i) \leq \sum \int_{+\Gamma_i} B dy \leq \sum \Delta_i M(\Delta_i) \leq \Delta \cdot M(\Delta).$$

E risulta perciò dimostrato in generale quanto si voleva.

§ 2.

Integrali superficiali 7).

7. Definizione di porzione di superficie regolare. — Sia D un dominio regolare del

7) In questo paragrafo preciso la definizione di dominio regolare dello spazio ed espongo, in breve, una nuova teoria degli integrali superficiali, particolarmente utile per il successivo studio del teorema di GREEN nello spazio.

piano (u, v) . Diremo *porzione di superficie regolare di base D* , il luogo S dei punti dello spazio le cui coordinate, al variare del punto (u, v) nel dominio D , sono date da

$$(6) \quad x = \lambda(u, v), \quad y = \mu(u, v), \quad z = \nu(u, v),$$

ove le funzioni λ, μ, ν hanno le seguenti proprietà:

1^a, esse sono continue in tutto D con le loro derivate prime;

2^a, i determinati jacobiani

$$(7) \quad X(u, v) = \frac{d(\mu, \nu)}{d(u, v)}, \quad Y(u, v) = \frac{d(\nu, \lambda)}{d(u, v)}, \quad Z(u, v) = \frac{d(\lambda, \mu)}{d(u, v)},$$

sono tali funzioni di u e di v in D , da risultare sempre ivi

$$(8) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 > 0;$$

3^a, se (u', v') è un punto qualsivoglia di D , le equazioni

$$(9) \quad \lambda(u, v) = \lambda(u', v'), \quad \mu(u, v) = \mu(u', v'), \quad \nu(u, v) = \nu(u', v')$$

nelle incognite u e v , non sono, simultaneamente, verificate in D che per $u = u', v = v'$.

Posto

$$d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

le funzioni E, F, G risultano continue in D , e si ha sempre ivi

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

Mentre un punto del piano (u, v) percorre, in un verso determinato, una curva regolare Λ del dominio D , il punto corrispondente della superficie S percorre, sempre in un verso, una linea regolare L .

Contorno L della porzione di superficie regolare S è la linea chiusa o il sistema di linee chiuse che corrisponde su S alle linee chiuse $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ costituenti il contorno C di D .

Verso positivo sul contorno L di S è quel determinato verso secondo cui un punto di S percorre L , mentre il punto corrispondente del piano (u, v) percorre, nel verso positivo, il contorno C di D .

L'asse n , per un punto P di S , che ha i coseni direttori

$$\begin{aligned} \cos(xn) &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \\ \cos(yn) &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \\ \cos(zn) &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(x, y)}{d(u, v)}, \end{aligned}$$

si dice *l'asse normale positivo in P* . L'asse opposto $-n$ si dice *l'asse normale negativo*.

La pagina della superficie che è volta verso l'asse normale positivo si dice la *pagina positiva*, l'altra la *pagina negativa*.

8. Definizione di superficie regolare aperta. — Il dominio regolare D di contorno C del piano (u, v) , sia suddiviso in k domini regolari D_1, D_2, \dots, D_k di contorni C_1, C_2, \dots, C_k . Diremo *superficie regolare aperta di base D* , il luogo S dei punti dello spazio le cui coordinate, al variare del punto (u, v) nel dominio D , sono date da

$$(6) \quad x = \lambda(u, v), \quad y = \mu(u, v), \quad z = \nu(u, v),$$

ove le funzioni λ, μ, ν , hanno le seguenti proprietà:

- 1^a, esse sono continue in tutto D ;
- 2^a, possiedono derivate parziali prime continue in ciascun dominio D_1, D_2, \dots, D_k ;
- 3^a, i determinanti jacobiani (7), che risultano funzioni di u e di v limitate in tutto D , discontinue, e con discontinuità di prima specie, lungo le porzioni dei contorni C_1, C_2, \dots, C_k che sono interne a D , devono inoltre essere tali che sia sempre in D verificata la (8);

4^a, se (u', v') è un punto di D , le equazioni (9), nelle incognite u e v , non sono verificate in D che per $u = u', v = v'$.

Una superficie regolare aperta si compone dunque di un certo numero k di porzioni di superficie regolari S_1, S_2, \dots, S_k di basi D_1, D_2, \dots, D_k . Tali superficie si saldano lungo parti dei loro contorni L_1, L_2, \dots, L_k .

Seguono le definizioni di *contorno L di S* , di *verso positivo su L* , di *pagina positiva e negativa* di S .

OSSERVAZIONE. — Nel seguito ci riferiremo sempre alla definizione data ora di superficie regolare aperta, ma è da osservare che i teoremi e i concetti che saranno stabiliti qui sussistono anche quando per superficie regolare aperta si intenda il luogo S dei punti dello spazio le cui coordinate sono date dalle (6), ove però le funzioni λ, μ, ν hanno le seguenti proprietà:

1^a, esse sono continue in tutto D , e tali che mentre il punto (u, v) percorre il contorno C di D nel suo verso positivo, il punto (x, y, z) descrive, sempre in un verso, una linea L o un sistema L di linee regolari semplici e chiuse dello spazio;

2^a, esse possiedono derivate parziali prime continue in ogni dominio che sia contenuto in uno qualunque dei domini D_1, D_2, \dots, D_k e che sia *completamente interno* al dominio D ;

3^a, i determinanti jacobiani (7), che risultano, in ogni dominio D' completamente interno a D , funzioni di u e di v limitate, discontinue, e con discontinuità di prima specie lungo i contorni C_1, C_2, \dots, C_k contenuti in D' , devono inoltre essere assolutamente integrabili nel dominio D , e tali che sia sempre in D' verificata la (8);

4^a, la medesima della proprietà 4^a della definizione precedente.

9. Definizione di superficie regolare chiusa e di dominio regolare dello spazio. — Si abbiano due superficie regolari aperte S', S'' della medesima base D_{uv} , rappresentate,

rispettivamente, dalle equazioni

$$\begin{aligned} x &= \lambda'(u, v), & y &= \mu'(u, v), & z &= \nu'(u, v), \\ x &= \lambda''(u, v), & y &= \mu''(u, v), & z &= \nu''(u, v), \end{aligned}$$

diremo che il loro insieme $S = (S', S'')$ costituisce una superficie regolare chiusa di base D_{uv} e di falde S' e S'' , se le funzioni $\lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu''$ soddisfano, ulteriormente, alle due proprietà:

1^a, se (u', v') e (u'', v'') sono due qualsivogliano punti interni di D_{uv} , è sempre

$$[\lambda'(u', v') - \lambda''(u'', v'')]^2 + [\mu'(u', v') - \mu''(u'', v'')]^2 + [\nu'(u', v') - \nu''(u'', v'')]^2 > 0;$$

2^a, in tutti i punti del contorno di D_{uv} è

$$\lambda' = \lambda'', \quad \mu' = \mu'', \quad \nu' = \nu''.$$

Il contorno L comune alle due falde S' e S'' si dice un contorno apparente per la superficie chiusa S .

Noi ammetteremo il

Postulato. — Una superficie regolare chiusa S divide i punti dello spazio in tre insiemi: l'insieme (limitato e aperto) dei punti interni alla superficie, l'insieme (limitato e chiuso) dei punti della superficie, l'insieme (illimitato e aperto) dei punti esterni alla superficie. Ciascuna falda della superficie S' volge costantemente una pagina (la diremo la pagina interna) verso i punti interni e l'altra (la diremo la pagina esterna) verso i punti esterni. Se per una falda è interna la pagina positiva, per l'altra è interna la negativa.

La normale esterna n_e in un punto ordinario di S è quell'asse sulla normale, verso cui si volga la pagina esterna della falda a cui il punto appartiene. La normale interna n_i è l'asse contrario. Converremo di designare sempre con S' quella falda di S la cui pagina positiva è altresì esterna. Se, dunque, n' e n'' designano gli assi normali positivi, rispettivamente, su S' e su S'' , avremo $n' = n_e$, $n'' = n_i$. Chiameremo *prima falda* la falda S' , *seconda falda* l'altra. L'insieme delle due pagine esterne (interne) delle due falde S' e S'' è la pagina esterna S_e (la pagina interna S_i) della superficie chiusa S .

Sia ora Σ una superficie regolare chiusa e $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$, m superficie, pur esse, regolari chiuse, costituite, ciascuna, di punti interni alla superficie Σ ed esterni alle rimanenti, l'insieme, perfetto e limitato, formato dai punti delle $m + 1$ superficie $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ e dai punti interni alla Σ ed esterni a ciascuna delle $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$, si dirà un dominio regolare.

L'insieme S delle superficie $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ costituisce il contorno del dominio regolare. Le superficie $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ possono, naturalmente, anche mancare. Pagina esterna S_e (pagina interna S_i) del contorno S del dominio regolare è l'insieme della pagina esterna (interna) di Σ e delle pagine interne (esterne) delle $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$. Seguono le definizioni di normale esterna n_e e di normale interna n_i al contorno S del dominio regolare.

10. Dominii normali e binormali dello spazio. — Nel dominio regolare D_{uv} del piano (u, v) siano definite due funzioni $\delta_1(u, v)$, $\delta_2(u, v)$, continue con le loro derivate parziali del primo ordine, tali che sia $\delta_2(u, v) > \delta_1(u, v)$, per ogni punto (u, v) interno a D_{uv} .

Il dominio i cui punti sono tutti e soli quelli per cui si ha

$$(y, z) \text{ in } D_{yz}, \quad \delta_1(y, z) \leq x \leq \delta_2(y, z),$$

ovvero, quelli per cui si ha

$$(z, x) \text{ in } D_{zx}, \quad \delta_1(z, x) \leq y \leq \delta_2(z, x),$$

oppure, infine, quelli per cui si ha

$$(x, y) \text{ in } D_{xy}, \quad \delta_1(x, y) \leq z \leq \delta_2(x, y),$$

si dice *dominio normale avente per base il dominio piano* D_{yz} , ovvero, *avente per base il dominio piano* D_{zx} , oppure, infine, *avente per base il dominio piano* D_{xy} .

Un dominio normale dello spazio che ha per base un dominio, del pari, normale, si dice *binormale*.

Si dimostra immediatamente che:

Ogni dominio normale dello spazio è regolare.

Ogni dominio normale dello spazio si scompone in domini binormali.

11. Definizione di integrale superficiale. — Sia S una superficie regolare aperta, di base D_{uv} , e di equazioni

$$x = \lambda(u, v), \quad y = \mu(u, v), \quad z = \nu(u, v),$$

contenuta in un dominio D dello spazio, in cui sono definite le tre funzioni continue $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$.

Come integrale superficiale della forma differenziale

$$(10) \quad A dy dz + B dz dx + C dx dy,$$

esteso alla pagina positiva della superficie S , designato con la notazione

$$(11) \quad \int_{+S} (A dy dz + B dz dx + C dx dy)$$

si intende il seguente integrale di piano

$$\int_{D_{uv}} \left[A(\lambda, \mu, \nu) \frac{d(\mu, \nu)}{d(u, v)} + B(\lambda, \mu, \nu) \frac{d(\nu, \lambda)}{d(u, v)} + C(\lambda, \mu, \nu) \frac{d(\lambda, \mu)}{d(u, v)} \right] d\sigma_{uv}.$$

Designando con $d\sigma$ l'elemento superficiale, e con n l'asse normale positivo della S , si ha

$$\int_{+S} (A dy dz + \dots) = \int_S [A \cos(xn) + B \cos(yn) + C \cos(zn)] d\sigma.$$

All'integrale superficiale della forma differenziale (10), esteso alla pagina negativa della superficie S , designato con la notazione

$$\int_{-S} (A dy dz + B dz dx + C dx dy),$$

si assegnerà naturalmente, il valore contrario di (11). Si ha

$$\int_{-S} (A dy dz + \dots) = \int_S [A \cos(x, -n) + \dots] d\sigma.$$

Rappresenti ora $S = (S', S'')$ una superficie regolare chiusa di falde S' e S'' . Designiamo con S_e la pagina esterna e con S_i la pagina interna di S . *Come integrale superficiale della forma differenziale (10), esteso alla pagina esterna di S , designato con la notazione*

$$(12) \quad \int_{S_e} (A dy dz + B dz dx + C dx dy),$$

si intende la somma

$$\int_{+S'} (A dy dz + \dots) + \int_{-S''} (A dy dz + \dots).$$

Si ha

$$\int_{S_e} (A dy dz + \dots) = \int_S [A \cos(x, n_e) + B \cos(y, n_e) + C \cos(z, n_e)] d\sigma.$$

Seguono le definizioni e le notazioni relative all'integrale superficiale della forma differenziale (10) esteso alla pagina interna S_i di S .

Sia infine S il contorno di un dominio regolare Δ contenuto in D , e il contorno S sia costituito dalle $m + 1$ superficie regolari e chiuse $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$. *Come integrale superficiale della forma differenziale (10), esteso alla pagina esterna S_e del contorno S di Δ , integrale designato sempre con la notazione (12), si intende la somma*

$$\int_{\Sigma_e} (A dy dz + \dots) = \sum_{r=1}^m \int_{\Sigma_r} (A dy dz + \dots).$$

12. Teorema di STOKES. — Se le funzioni A, B, C , continue in D , ammettono ivi le derivate parziali del primo ordine continue, per ogni superficie regolare aperta S , di contorno L , contenuta in D , sussiste la relazione

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{+S} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \right] \\ = \int_{+L} (A dx + B dy + C dz). \end{aligned} \right.$$

Se S si compone di più porzioni di superficie regolari S_r di contorni L_r , i due integrali, nei due membri dell'eguaglianza da dimostrare, si decompongono, rispettiva-

mente, nella somma degli integrali estesi alle pagine positive delle superficie S_r e nella somma degli integrali estesi, nel verso positivo, ai contorni L_r ; basterà pertanto dimostrare il teorema nel caso che la superficie regolare aperta S si componga di un'unica porzione di superficie regolare. Sia D_{uv} la base, di contorno C , della superficie, si ha

$$\begin{aligned} & \int_{+L} (A dx + B dy + C dz) \\ &= \int_{+C} \left[\left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv \right] \\ &= \int_{D_{uv}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right] d\sigma_{uv} \\ &= \int_{+S} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \right], \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare ⁸⁾.

13. Corollari del teorema di STOKES. COROLLARIO I. — Se S è una superficie regolare chiusa, contenuta in D , si ha

$$(14) \quad \int_{S_e} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \right] = 0.$$

Ed inverso

$$\int_{S_e} = \int_{+S'} + \int_{-S''} = \int_{+S'} - \int_{+S''} = \int_{+L} - \int_{+L} = 0.$$

Il teorema sussiste anche se S designa il contorno di un dominio regolare contenuto in D .

COROLLARIO II. — Se f è una qualunque funzione di x, y, z , che possenga, in D , le derivate seconde miste continue e se S è il contorno di un dominio regolare contenuto in D , si ha

$$\int_{S_e} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz = \int_{S_e} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx = \int_{S_e} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy.$$

Ed inverso, se si pone nella (14)

$$C = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad A = B = 0,$$

⁸⁾ Nella dimostrazione della formola (13) interviene l'ipotesi della esistenza e continuità di tutte le derivate parziali del primo ordine delle funzioni A, B, C . Ma la formola sussiste supponendo solo l'esistenza e la continuità delle derivate che in essa compaiono. Ciò si dimostra con un ragionamento analogo a quello fatto dal DE LA VALLÉE-POUSSIN in un'analogia circostanza. Cfr. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale*, 2^{me} édition, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1912), p. 24.

si trova

$$\int_{S_e} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx \right) = 0.$$

COROLLARIO. III. — Se L , M , N sono, rispettivamente, funzioni (continue) soltanto di y e z , di z e x , di x e y , definite nel parallelepipedo

$$R(a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2),$$

nel quale è contenuto un dominio regolare di contorno S , si ha

$$\int_{S_e} L(y, z) dy dz = \int_{S_e} M(z, x) dz dx = \int_{S_e} N(x, y) dx dy = 0.$$

Ed invero, esiste in R una funzione f , delle sole due variabili y e z , tale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = L(y, z),$$

onde segue

$$\int_{S_e} L(y, z) dy dz = \int_{S_e} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz = \int_{S_e} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx = 0,$$

poichè $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

§ 3.

Sul teorema di GREEN nello spazio.

14. Dominii regolari-normali. — In questo paragrafo ci limiteremo a considerare quei domini regolari che risultano dalla riunione di domini normali. Assai probabilmente si ottengono così tutti i domini regolari. Mancando, per ora, di una dimostrazione completa di ciò, ci permettiamo di introdurre, forse provvisoriamente, un'ulteriore denominazione, chiamando *dominii regolari-normali* quelli che ci limitiamo a considerare in questo paragrafo.

Si osservi che: Ogni dominio regolare-normale si può decomporre in domini bi-normali.

15. Un nuovo teorema della teoria degli integrali superficiali. — Se P , Q , R sono tre funzioni continue nel dominio regolare-normale D che possiedono, nell'interno di D , la prima, la derivata rispetto a x , la seconda la derivata rispetto a y , la terza, la derivata rispetto a z , continue ed eguali fra loro, si ha

$$(15) \quad \int_{S_e} P dy dz = \int_{S_e} Q dz dx = \int_{S_e} R dx dy \quad ^9).$$

⁹⁾ Questo teorema è da avvicinare al Corollario II del teorema di STOKES, enunciato al n° 13.

Poichè ogni dominio regolare-normale si può decomporre in domini binormali, il nostro teorema sarà dimostrato non appena esso sarà stabilito per tali domini. Sia dunque D un dominio binormale avente per base, ad esempio, il dominio normale D_{xy} del piano (x, y) , D essendo definito dalle condizioni

$$(x, y) \text{ in } D_{xy}, \quad \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y).$$

Esiste (cfr. n° 5) una funzione $N(x, y)$, continua nel dominio D_{xy} , funzione solamente di x e di y , per cui si ha:

$$\frac{\partial N}{\partial y} = R[x, y, \alpha_1(x, y)] + Q[x, y, \alpha_1(x, y)] \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}.$$

Definiamo una funzione $f(x, y, z)$, in D , ponendo, per ogni punto (x, y, z) di D ,

$$f(x, y, z) = \int_{\alpha_1(x, y)}^z Q(x, y, \zeta) d\zeta + N(x, y).$$

Per tale funzione si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= Q(x, y, z), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \int_{\alpha_1(x, y)}^z Q_y(x, y, \zeta) d\zeta + \frac{\partial N}{\partial y} + Q[x, y, \alpha_1(x, y)] \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ &= \int_{\alpha_1(x, y)}^z R_\zeta(x, y, \zeta) d\zeta + R[x, y, \alpha_1(x, y)] = R(x, y, z). \end{aligned}$$

Ma allora, se D' è un qualunque dominio regolare di contorno S' , completamente interno a D , si ha

$$\int_{S'_e} (Q dz dx - R dx dy) = \int_{S'_e} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \right) = 0,$$

come si deduce del Corollario I del teorema di STOKES, per $B = C = 0$, $A = f$. Ne segue, per il contorno S di D ,

$$\int_{S_e} Q dz dx = \int_{S_e} R dx dy.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\int_{S_e} P dz dx = \int_{S_e} R dx dy.$$

Ne seguono le (15) per il dominio binormale D .

OSSERVAZIONE. — Se, per ipotesi, si desse soltanto l'esistenza e la continuità di P , Q , P_x , Q_y , con la condizione $P_x = Q_y$, ne seguirebbe sempre

$$\int_{S_e} P dy dz = \int_{S_e} Q dz dx,$$

poichè, posto,

$$\int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} P_x(x, y, \zeta) d\zeta = \int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} Q_y(x, y, \zeta) d\zeta = R(x, y, z),$$

si avrebbe $R_x = P_x = Q_y$.

16. Dimostrazione del teorema di GREEN nello spazio. — Si dimostra ora immediatamente il teorema di GREEN nello spazio:

Se le funzioni A , A_x , B , B_y , C , C_x sono definite nel dominio regolare-normale D , e vi sono continue, e se in ogni punto interno di D è

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad B_y = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad C_x = \frac{\partial C}{\partial x},$$

sussistono le eguaglianze

$$(16) \quad \int_D A_x d\tau = \int_{S_e} A dy dz, \quad \int_D B_y d\tau = \int_{S_e} B dz dx, \quad \int_D C_x d\tau = \int_{S_e} C dx dy.$$

Per dimostrare, ad esempio, la terza di queste eguaglianze, basta far vedere (cfr. i n° 4 e 6) che la funzione additiva di D

$$\int_{S_e} C dx dy,$$

supposto D normale, verifica il teorema della media rispetto a C_x , cioè che, detti m e M il minimo e il massimo di C_x in D , ed indicando con D altresì il volume di D , si ha

$$(17) \quad mD \leq \int_{S_e} C dx dy \leq MD.$$

Occorre distinguere tre casi, secondo la specie del dominio normale.

I CASO. — Il dominio normale D è definito dalle condizioni

$$(x, y) \text{ in } D_{xy}, \quad \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y).$$

Si ha allora

$$\int_{S_e} C dx dy = \int_{D_{xy}} (C[x, y, \alpha_2(x, y)] - C[x, y, \alpha_1(x, y)]) d\sigma_{xy},$$

ed essendo

$$(\alpha_2 - \alpha_1)m \leq C(x, y, \alpha_2) - C(x, y, \alpha_1) \leq (\alpha_2 - \alpha_1)M,$$

se ne deduce la (17).

II CASO. — Il dominio normale D è definito dalle condizioni

$$(y, z) \text{ in } D_{yz}, \quad \beta_1(y, z) \leq x \leq \beta_2(y, z).$$

Poniamo

$$A(x, y, z) = \int_{\beta_1(y,z)}^{\beta_2(y,z)} C_x(\xi, y, z) d\xi.$$

Le funzioni A e C sono continue in D e vi possiedono, nel suo interno, la prima, la derivata rispetto a x , la seconda, la derivata rispetto a z , continue ed eguali, ma allora, in virtù del teorema del n° precedente, si ha

$$\int_{S_e} C dx dy = \int_{S_e} A dy dz,$$

e quindi

$$\int_{S_e} C dx dy = \int_{D_{yz}} d\sigma_{yz} \int_{\beta_1(y,z)}^{\beta_2(y,z)} C_z(x, y, z) dx,$$

onde segue, di nuovo, la (17).

III CASO. — Il terzo caso si tratta come il secondo.

OSSERVAZIONE. — Una dimostrazione del teorema di GREEN nello spazio si ottiene anche estendendo il metodo della mia nota citata [loc. cit. ³]) seguito per la dimostrazione del teorema di GREEN nel piano. L'estensione riesce però senza difficoltà soltanto se si suppone il contorno S , del dominio regolare-normale D , privo di punti singolari.

17. Un'applicazione. — Sono manifesti i perfezionamenti, in rigore e in generalità, che il contenuto di questo e del precedente paragrafo deve conferire, per esempio, alla trattazione dei problemi dei valori al contorno per le equazioni alle derivate parziali della fisica-matematica.

Non vogliamo rinunciare di darne qui un piccolo saggio, stabilendo, con ogni generalità e rigore, due notissime formole della teoria del potenziale.

Le formole (16) si riducono all'unica seguente

$$(18) \quad \int_D (A_x + B_y + C_z) d\tau = \int_S [A \cos(xn) + B \cos(yn) + C \cos(zn)] d\sigma,$$

ove n designa la normale esterna al contorno S di D . Supponiamo che la funzione $V(x, y, z)$ sia continua, con le sue derivate prime, nel dominio D e che l'origine O delle coordinate sia esterna a D . Se P è un punto dello spazio designiamo con ρ la grandezza e l'asse del vettore \vec{OP} . Ponendo, nella (18),

$$A = V \frac{x}{\rho^3}, \quad B = V \frac{y}{\rho^3}, \quad C = V \frac{z}{\rho^3},$$

si ottiene la relazione

$$\int_D \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial V}{\partial \rho} d\tau = \int_S V \frac{\cos(\rho n)}{\rho^2} d\sigma,$$

e, per $V = 1$,

$$\int_S \frac{\cos(\rho n)}{\rho^2} d\sigma = 0.$$

Catania, Aprile 1919.

MAURO PICONE.